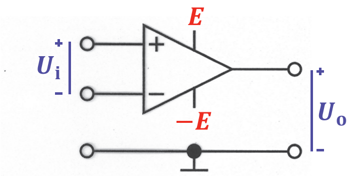
TSKS06 Linjära system för komm.
Kursdel Elektriska kretsar

Föreläsning 7
Operationsförstärkare – Aktiva filter

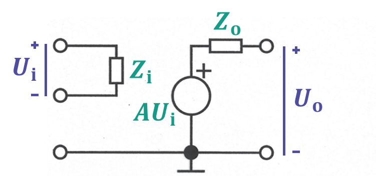
Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Elektroniska kretsar och system

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Operationsförstärkaren – allmänt



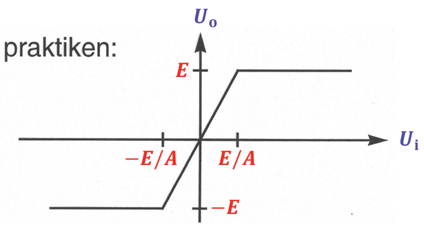
Symbol



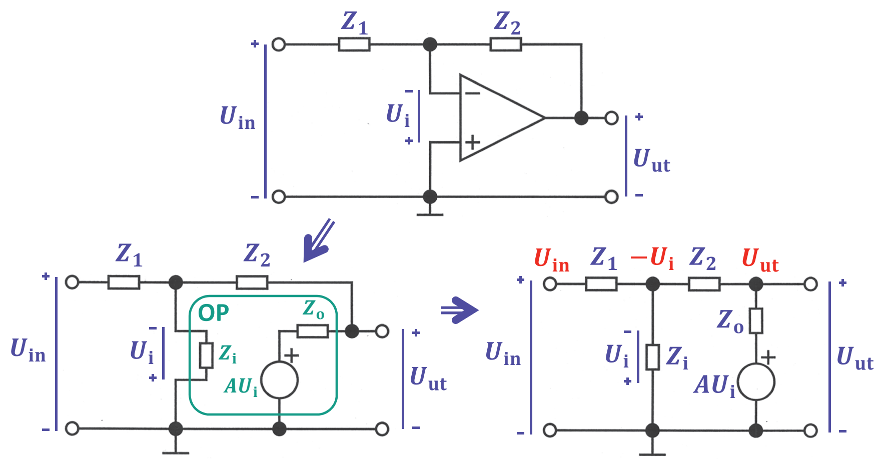
Småsignalschema

		Normala värden
Matningsspänning	E	2-18 V
Förstärkning	A	10^4 - 10^6
Inimpedans	Z_i	$10^6 - 10^{12}\ \Omega$
Utimpedans	Z_o	$10 - 100\ \Omega$

I praktiken:



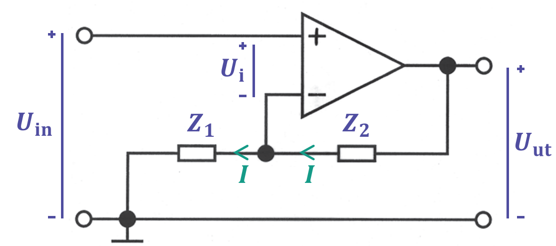
Inverterande förstärkare



Icke-inverterande förstärkare

Nästan ideal operationsförstärkare

$Z_o = 0$
$Z_i = \infty$
$A < \infty$



Lab 2 – Förberedelseuppgifter

a. Bestäm ett uttryck för frekvensfunktionen $H(f)$, där f är naturlig frekvens, samt motsvarande amplitudkarakteristik $|H(f)|$ för det aktiva filtret i figur 1 på sidan 3. Betrakta operationsförstärkaren som ideal.

b. Bestäm ett uttryck för maxvärdet för $|H(f)|$ samt ett uttryck för den frekvens där detta maxvärde inträffar. Denna frekvens brukar kallas centerfrekvens eller mittfrekvens. Notera att denna frekvens normalt inte är mitt emellan gränsfrekvenserna.

c. Anta att kapacitansvärdena är $C_1 = C_2 = 10\,\text{nF}$ samt beräkna värdena på R_1 respektive R_2 så att filtret får gränsfrekvenserna 1 kHz och 4 kHz. *Vad blir då centerfrekvensen? Och vad blir maxvärdet för $|H(f)|$?* Anteckna detta på raden Teoretiskt i tabell 1 på sidan 4.

d. Vilka motståndsvärden i E12-serien ligger närmast de exakt beräknade värdena? E12-serien finns återgiven på sidan 199 i *S Söderkvist: Kretsteori och elektronik.*

E-serier 1(2)

I labsalen finns:

- motstånd i E12-serien från 1kΩ till 1MΩ,
- kondensatorer i E6-serien från 10pF till 100nF.

E-serierna är approximativt exponentiellt stigande siffror.

Se kursboken, sidan 199 för fler E-serier.

E24	E12	E6	E3
10	10	10	10
11			
12	12		
13			
15	15	15	
16			
18	18		
20			
22	22	22	22
24			
27	27		
30			

E24	E12	E6	E3
33	33	33	
36			
39	39		
43			
47	47	47	47
51			
56	56		
62			
68	68	68	
75			
82	82		
91			

E-serier 2(2)

Kvoterna mellan på varandra följande siffror i en E-serie är approximativt lika. Exempelvis E6-serien:

$$\frac{15}{10} = 1.5 \quad \frac{22}{15} \approx 1.47 \quad \frac{33}{22} = 1.5$$

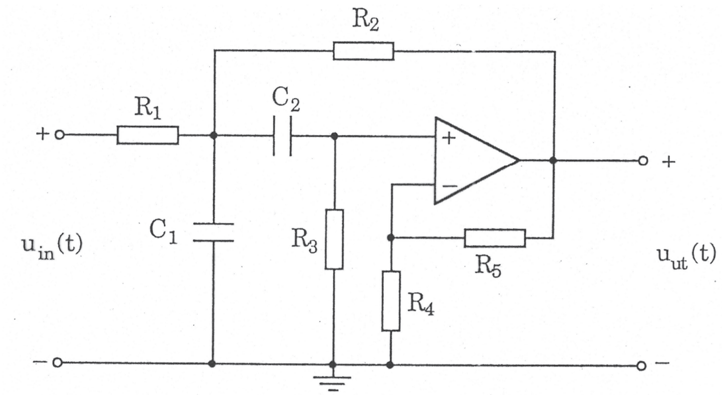
$$\frac{47}{33} \approx 1.42 \quad \frac{68}{47} \approx 1.45 \quad \frac{100}{68} \approx 1.47$$

E6
10
15
22
33
47
68

Att jämföra med:

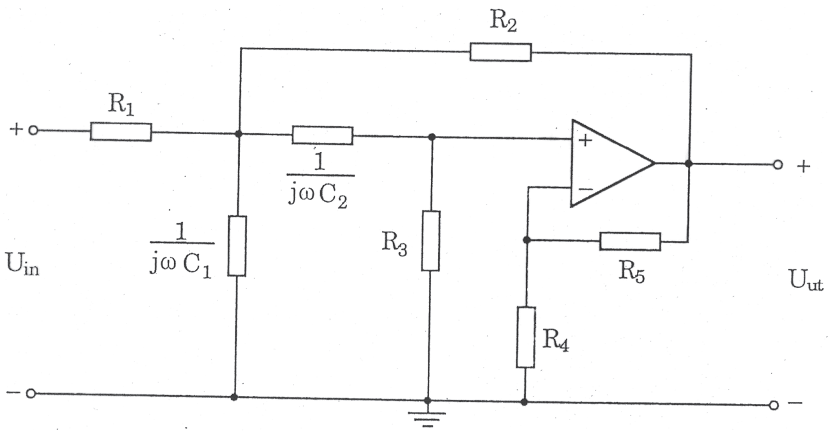
$$\sqrt[6]{10} \approx 1.47$$

Exempel aktivt filter

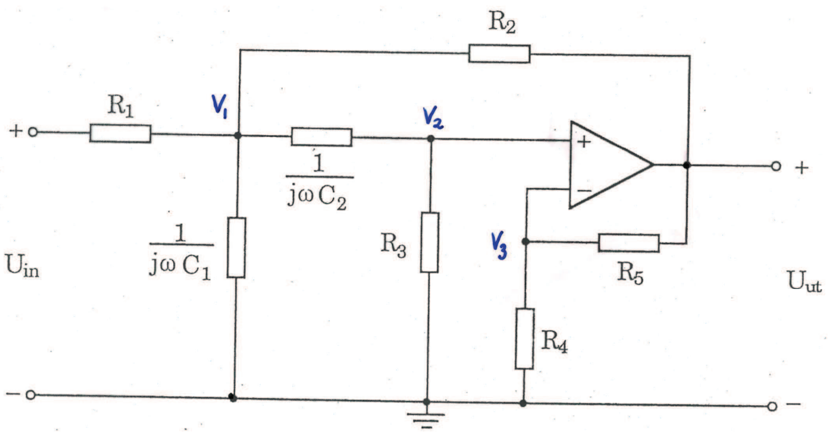


R_1=R_2=R_3=R_4=R_5= 1 Ω, C_1=C_2=1 F.
OP-förstärkaren är ideal.

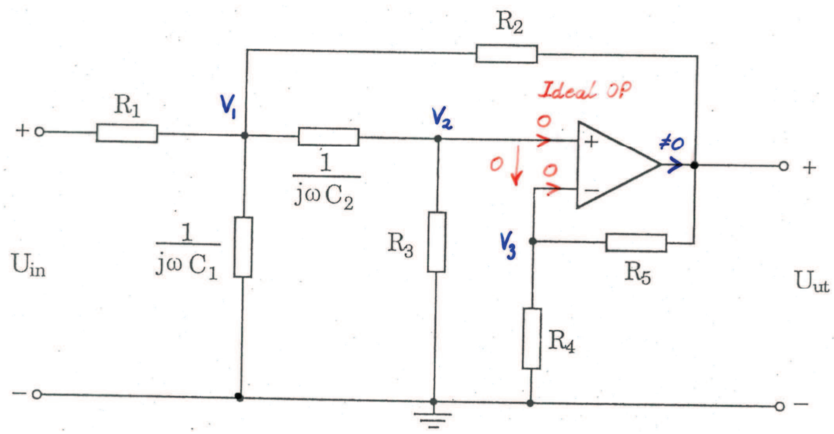
Exempel aktivt filter



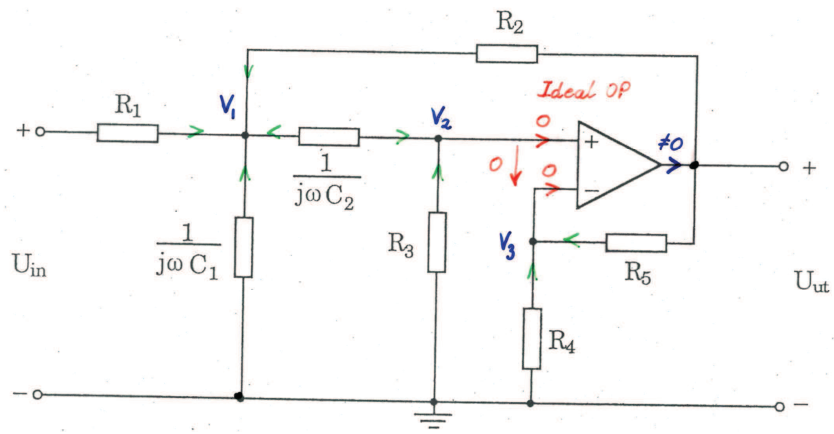
Exempel aktivt filter



Exempel aktivt filter



Exempel aktivt filter



Mikael Olofsson

ISY/EKS

www.liu.se

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Anteckningar från tavlan

Följande sidor innehåller mina anteckningar av det som hamnade på tavlan både då jag härledde uttrycket för inverterande och icke-inverterande förstärkare, men också då jag löste exemplet. Dessa anteckningar innehåller mer än vad som faktiskt hamnade på tavlan.

Detta bör fungera som en utgångspunkt inför förberedelseuppgifterna till lab 2.

Dessa anteckningar är skrivna avsedda för mina ögon. De kan därför vara en aning svårlästa här och där. Kommentarer som jag annars skulle ha sagt i samband med detta saknas till en del.

Inverterande förstärkare 1(2)

Nodanalys! KCL:

Nod $-U_i$:

$$\frac{U_{in}-(-U_i)}{Z_1}+\frac{U_i}{Z_i}+\frac{U_{ut}-(-U_i)}{Z_2}=0$$

$$\Rightarrow (Z_iZ_2+Z_1Z_2+Z_1Z_i)U_i+Z_1Z_iU_{ut}=-Z_iZ_2U_{in} \quad (1)$$

Nod U_{ut}:

$$\frac{-U_i-U_{ut}}{Z_2}+\frac{AU_i-U_{ut}}{Z_0}=0 \Rightarrow (AZ_2-Z_0)U_i=(Z_2+Z_0)U_{ut} \quad (2)$$

U_i ur (2) i (1) $\Rightarrow$

$$(Z_iZ_2+Z_1Z_2+Z_1Z_i+Z_iZ_0+Z_1Z_0+AZ_1Z_i)\cdot U_{ut}$$
$$=(Z_0Z_i-AZ_2Z_i)U_{in}$$

Inverterande förstärkare 2(2)

$$\Rightarrow U_{ut}=\frac{Z_0Z_i-AZ_2Z_i}{(Z_1+Z_i)(Z_2+Z_0)+(A+1)Z_1Z_i}U_{in}$$

$$=\frac{\frac{Z_0}{A}-Z_2}{\frac{1}{A}\left(\frac{Z_1}{Z_i}+1\right)(Z_2+Z_0)+\left(1+\frac{1}{A}\right)Z_1}U_{in}$$

$$\xrightarrow[\substack{Z_0\to 0\\ Z_i\to\infty}]{}\frac{-Z_2}{\frac{1}{A}\cdot Z_2+\left(1+\frac{1}{A}\right)Z_1}U_{in}\xrightarrow[A\to\infty]{}-\frac{Z_2}{Z_1}U_{in}$$

Freq. fkn: $H(\omega)\approx-\frac{Z_2}{Z_1}$, $Z_{in}\approx Z_1$, $Z_{ut}\approx 0$.

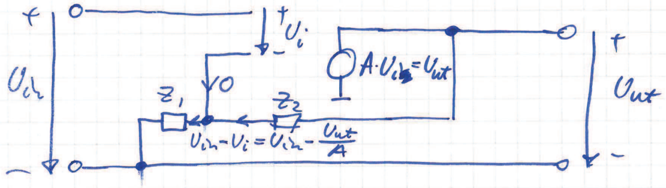
Not:

$$U_i=-\frac{Z_i(Z_2+Z_0)}{(Z_1+Z_i)(Z_2+Z_0)+(A+1)Z_1Z_i}U_{in}\to 0,\quad \substack{Z_0\to 0\\ Z_i\to\infty\\ A\to\infty}$$

Typiskt för neg. återkoppl. OP.

Icke-inverterande förstärkare 1(2)

Enklare modell med $Z_i=\infty$, $Z_0=0$.
OH Icke-inv. först. + pålägg.



KCL i $U_{in}-U_i$: med $U_i=\frac{U_{ut}}{A}$

$$\frac{-\left(U_{in}-\frac{U_{ut}}{A}\right)}{Z_1}+\frac{U_{ut}-\left(U_{in}-\frac{U_{ut}}{A}\right)}{Z_2}=0.$$

Icke-inverterande förstärkare 2(2)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{AZ_1}+\frac{1+\frac{1}{A}}{Z_2}\right)U_{ut}=\left(\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}\right)U_{in}$$

$$\left(\frac{Z_2}{A}+\left(1+\frac{1}{A}\right)Z_1\right)U_{ut}=(Z_2+Z_1)\,U_{in}$$

$$U_{ut}=\frac{Z_1+Z_2}{\left(1+\frac{1}{A}\right)Z_1+\frac{Z_2}{A}}\,U_{in}\to\frac{Z_1+Z_2}{Z_1}\,U_{in},\quad A\to\infty$$

$$H(\omega)\approx\frac{Z_1+Z_2}{Z_1}$$

$$Z_{in}=\infty,\quad Z_{ut}=0.$$

Not:

$$U_i=\frac{U_{ut}}{A}=\frac{Z_1+Z_2}{\left(\frac{1}{A}+1\right)Z_1+\frac{Z_2}{A}}\cdot\frac{1}{A}\,U_{in}\to 0,\quad A\to\infty$$

Igen!

Exempel aktivt filter 1(11)

Ideal OP $\Rightarrow$ $I_+=I_-=0$
$\Rightarrow$ $V_2=V_3$

KCL i punkterna 1, 2 & 3:

$$\frac{U_{in}-V_1}{R_1}+\frac{0-V_1}{1/j\omega C_1}+\frac{V_2-V_1}{1/j\omega C_2}+\frac{U_{ut}-V_1}{R_2}=0$$

$$\frac{V_1-V_2}{1/j\omega C_2}+\frac{0-V_2}{R_3}=0$$

$$\frac{U_{ut}-V_3}{R_5}+\frac{0-V_3}{R_4}=0$$

Exempel aktivt filter 2(11)

Uppgift: Bestäm filtertyp, gränsfreq. och ev. center freq. för
$R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=1\,\Omega$, $C_1=C_2=1\,F$

och $V_2=V_3$ $\Rightarrow$

$$U_{in}-V_1-j\omega V_1+j\omega V_2-j\omega V_1+U_{ut}-V_1=0 \qquad (1)$$

$$j\omega V_1-j\omega V_2-V_2=0 \qquad (2)$$

$$U_{ut}-V_2-V_2=0 \Rightarrow V_2=U_{ut}/2 \qquad (3)$$

(3) i (1) & (2) $\Rightarrow$

$$U_{in}-(2+j2\omega)V_1+\left(j\frac{\omega}{2}+1\right)U_{ut}=0 \qquad (4)$$

$$j\omega V_1-\left(\frac{1}{2}+j\frac{\omega}{2}\right)U_{ut}=0 \Rightarrow V_1=\frac{1+j\omega}{j2\omega}\,U_{ut} \qquad (5)$$

Exempel aktivt filter 3(11)

⑤ i ④

$$U_{in} - \frac{(1+j\omega)^2}{j\omega}U_{ut} + \left(j\frac{\omega}{2}+1\right)U_{ut} = 0$$

$$U_{in} = \frac{(1+j\omega)^2 - j\omega\left(j\frac{\omega}{2}+1\right)}{j\omega}U_{ut}$$

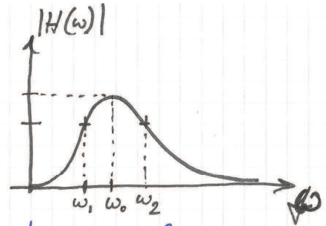
$$= \frac{1+j2\omega - \omega^2 + \omega^2/2 - j\omega}{j\omega}U_{ut}$$

$$= \frac{1+j\omega-\omega^2/2}{j\omega}U_{ut}$$

$$H(\omega) = \frac{U_{ut}}{U_{in}} = \frac{j\omega}{1+j\omega-\omega^2/2} = \frac{1}{1+j\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)}$$

Exempel aktivt filter 4(11)

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{2}-\frac{1}{\omega}\right)^2}}$$



$|H(\omega)| \to 0, \quad \omega \to 0$

$|H(\omega)| \to 0, \quad \omega \to \infty$

$|H(\omega)|_{max} = 1$ vid $\frac{\omega}{2} = \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega^2 = 2$

∴ Bandpassfilter m. center(vinkel)frekvens $\omega = \sqrt{2}$

center frekvens: $f_0 = \omega/2\pi = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}$

Gränsfrekvenser:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(\omega)|_{max} \Rightarrow \frac{\omega}{2} - \frac{1}{\omega} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \mp 2\omega - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \pm 1 \pm \sqrt{1+2} \Rightarrow$$

Exempel aktivt filter 5(11)

Fyra lösningar, varav två positiva:

$$\omega_1 = \sqrt{3} - 1 \Rightarrow f_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\pi}$$

$$\omega_2 = \sqrt{3} + 1 \Rightarrow f_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\pi}$$

Klart!

Åter till ursprungsekv.
Uttryckt i $R_1, \ldots, R_5$ & C_1, C_2:

$$H(\omega) = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{\frac{R_4}{R_4+R_5}\left(1+\frac{1}{j\omega C_2 R_3}\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+j\omega(C_1+C_2)\right) - \frac{j\omega C_2 R_4}{R_4+R_5} - \frac{1}{R_2}}$$

Exempel aktivt filter 6(11)

Sätt $R_1 = \ldots = R_5 = 1\Omega$:

$$H(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{j\omega C_2}\right)\left(2+j\omega(C_1+C_2)\right) - \frac{j\omega C_2}{2} - 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{C_1+C_2}{2C_2} + j\left(\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2}\right)}$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left[\left(\frac{C_1+C_2}{2C_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2\right]^{1/2}}$$

Max:

$$|H(\omega)|_{max} = \frac{2C_2}{C_1+C_2} \quad \text{då} \quad \frac{\omega C_1}{2} = \frac{1}{\omega C_2}$$

Exempel aktivt filter 7(11)

Ny uppgift: Bestäm C_1 & C_2 så att $f_1 = 1\ Hz$ & $f_2 = 5\ Hz$

Alltså $\omega_1 = 2\pi$, $\omega_2 = 10\pi$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(\omega)|_{max} \Rightarrow |H(\omega)|^2 = \frac{1}{2}|H(\omega)|_{max}^2$$

$$\frac{1}{\left(\frac{C_1+C_2}{2C_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2C_2}{C_1+C_2}\right)^2 = \frac{1}{2\left(\frac{C_1+C_2}{2C_2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega C_1}{2} - \frac{1}{\omega C_2}\right)^2 = \left(\frac{C_1+C_2}{2C_2}\right)^2 \qquad \boxed{\text{mult. m. } 2C_2}$$

$$\left(\omega C_1 C_2 - \frac{2}{\omega}\right)^2 = (C_1+C_2)^2 \Rightarrow$$

$$\omega C_1 C_2 - \frac{2}{\omega} = \pm(C_1+C_2)$$

Not: $\omega > \omega_0 \Rightarrow$ pos parentes.
$\omega < \omega_0 \Rightarrow$ neg parentes.

Exempel aktivt filter 8(11)

Ena gr.v.fr. hör t. + ($>\omega_0$), andra t. − ($<\omega_0$):

$$10\pi C_1 C_2 - \frac{1}{5\pi} = C_1 + C_2$$

$$2\pi C_1 C_2 - \frac{1}{\pi} = -(C_1 + C_2)$$

Not: Fel val av gr.fr. ger här negativa värden för C_1 & C_2.

Summan av ekv $\Rightarrow$

$$12\pi C_1 C_2 = \frac{6}{5\pi} \Rightarrow C_1 C_2 = \frac{1}{10\pi^2} \quad (6)$$

Skriv om

$$2\pi C_1 C_2 - \frac{1}{25\pi} = \frac{1}{5}(C_1 + C_2)$$

$$2\pi C_1 C_2 - \frac{1}{\pi} = -(C_1 + C_2)$$

Differensen av ekv $\Rightarrow$

$$\frac{6}{5}(C_1 + C_2) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{25\pi} = \frac{24}{25\pi} \Rightarrow C_1 + C_2 = \frac{4}{5\pi}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{4}{5\pi} - C_1 \quad (7)$$

Exempel aktivt filter 9(11)

(7) i (6) $\Rightarrow$

$$C_1\left(\frac{4}{5\pi} - C_1\right) = \frac{1}{10\pi^2} \Rightarrow C_1^2 - \frac{4}{5\pi}C_1 + \frac{1}{10\pi^2} = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{4}{10\pi} \pm \sqrt{\frac{16}{100\pi^2} - \frac{1}{10\pi^2}} = \frac{4 \pm \sqrt{6}}{10\pi} \approx \begin{cases} 205\ mF \\ 49.4\ mF \end{cases}$$

Välj en, t.ex $C_1 = 205\ mF$

Det ger $C_2 = 49.4\ mF$

och $|H(\omega)|_{max} = \frac{2 \cdot 49.5}{205 + 49.5} = 0.389$

vid $\omega_0 = \sqrt{2/C_1C_2} = \sqrt{2/49.5 \cdot 205 \cdot 10^{-6}} = 14.0$ rad/s.

$f_0 = \omega_0/2\pi = 2.23\ Hz$

Not: Byt C_1 & C_2 $\Rightarrow$ $|H(\omega)|_{max} = \frac{2 \cdot 205}{205 + 49.5} = 1.61$

Vid samma f_0.

Exempel aktivt filter 10(11)

Närmaste värden ur E6-serien:

$C_1 = 220\ mF$

$C_2 = 47\ mF$

Not: I labuppgiften räknar ni ut resistanser och väljer närmevärden ur E6-serien.

Detta ger

$$|H(\omega)|_{max} = \frac{2 \cdot 47}{220 + 47} = 0.352$$

Omkastade C_1 & C_2 ger

$$|H(\omega)|_{max} = \frac{2 \cdot 220}{220 + 47} = 1.65$$

Centerfrekvens

$$\omega_0 = \sqrt{2/C_1C_2} = \sqrt{2/0.220 \cdot 0.047} = 13.9 \text{ rad/s.}$$

$$f_0 = \omega_0/2\pi = 2.21\ Hz$$

Exempel aktivt filter 11(11)

Gränsfrekvenser

$$\omega^2 C_1 C_2 \pm (C_1+C_2)\omega - 2 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega^2 \pm \frac{C_1+C_2}{C_1C_2} - \frac{2}{C_1C_2} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\omega = \pm\frac{C_1+C_2}{2C_1C_2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{C_1+C_2}{2C_1C_2}\right)^2 + \frac{2}{C_1C_2}} = \frac{\pm(C_1+C_2) \overset{+}{(-)} \sqrt{(C_1+C_2)^2 + 8C_1C_2}}{2C_1C_2}$$

$$= \frac{\pm 0.267 \overset{+}{(-)} \sqrt{0.267^2 + 8\cdot 0.22\cdot 0.047}}{2\cdot 0.22\cdot 0.047} = \pm 12.91 + 18.98$$

$$= \begin{cases} 31.89 = \omega_2 & \Rightarrow \quad f_2 = \omega_2/2\pi = 5.08 \\ 6.07 = \omega_1 & \Rightarrow \quad f_1 = \omega_1/2\pi = 0.966 \end{cases}$$