

TSKS06 Linjära system för komm.

Kursdel Elektriska kretsar

Föreläsning 4

Växelströmsteori: Introduktion, $j\omega$ -metoden
Labförberedelser

Mikael Olofsson
Institutionen för Systemteknik (ISY)
Ämnesområdet Elektroniska kretsar och system

Växelströmsteori – Passiva komponenter

Resistans $\frac{u(t)}{i(t)}$ $u(t) = Ri(t)$

Kapacitans $\frac{u(t)}{i(t)}$ $i(t) = C \frac{d}{dt} u(t)$

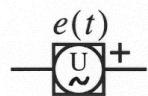
Induktans $\frac{u(t)}{i(t)}$ $u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

Växelströmsteori

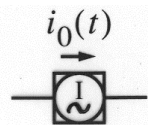
Tidsberoende storheter:

Spänning $u(t)$
Ström $i(t)$
Effekt $p(t)$

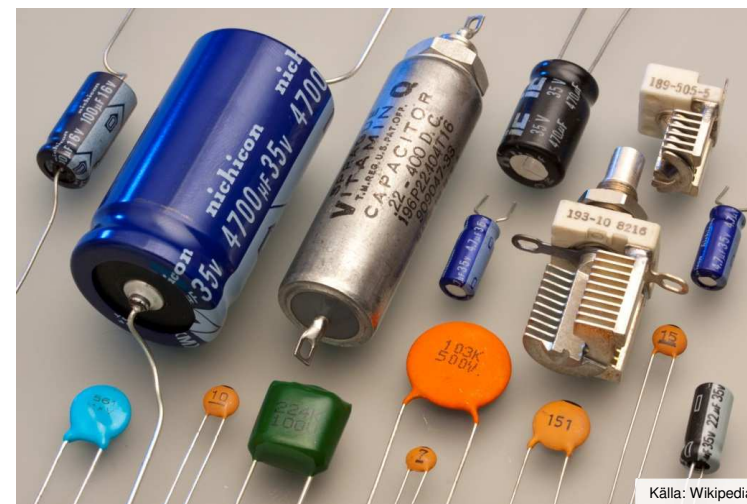
Ideal spänningskälla



Ideal strömkälla



Kapacitans – Kondensatorer



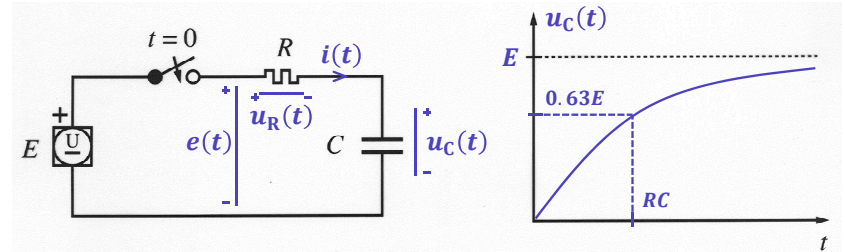
Källa: Wikipedia

Induktans – Spolar



Källa: Wikipedia

Uppladdning av en kapacitans



Initialtillstånd: $u_C(0^-) = 0$ $e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E, & t \geq 0. \end{cases}$ $u_C(t) + u_R(t) = e(t)$

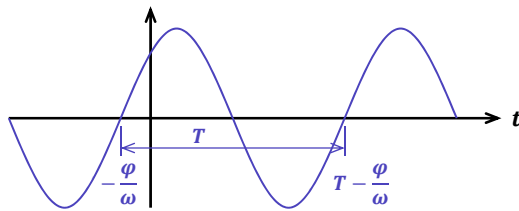
$$u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{d}{dt} u_C(t)$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$$

$t \geq 0: u_C(t) + RC \frac{d}{dt} u_C(t) = E$
Homogen och partikulär lösning \Rightarrow
 $u_C(t) = (1 - e^{-t/RC})E$

Stationär sinussignal

$$x(t) = \hat{X} \sin(\omega t + \varphi)$$



Symbol	Förklaring
$x(t)$	Momentanvärde
\hat{X}	Amplitud (toppvärde)
ω	Vinkelfrekvens [rad/s]
φ	Fasvinkel [rad]
T	Periodtid [s]
f	Frekvens [Hz]

$$f = \frac{1}{T} \quad \omega = 2\pi f$$

Momentan effekt

$$p(t) = u(t)i(t)$$

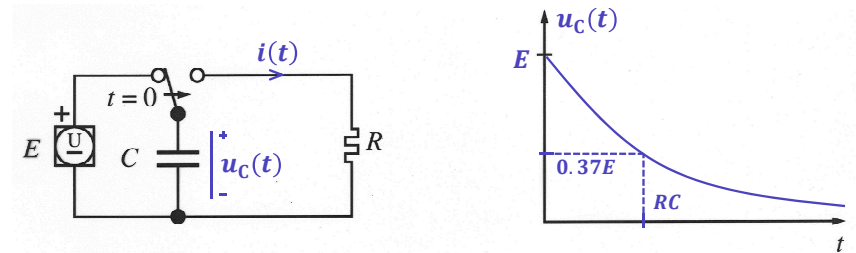
Aktiv effekt:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

Effektivvärde:

$$X_e = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \frac{\hat{X}}{\sqrt{2}}$$

Urladdning av kapacitans



Initialtillstånd: $u_C(0^-) = E$

$t \geq 0:$
 $u_C(t) = Ri(t) = -RC \frac{d}{dt} u_C(t)$
 $i(t) = -C \frac{d}{dt} u_C(t)$

$u_C(t) + RC \frac{d}{dt} u_C(t) = 0$
Homogen (och partikulär) lösning \Rightarrow
 $u_C(t) = Ee^{-t/RC}$

jω-metoden

1. Ersätt strömmar, spänningar och källor med deras komplexa motsvarigheter:
3. Lös problemet med likströmsteori.

$$a(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$A = \hat{A} e^{j\varphi} = b + jc$$

$$b = \hat{A} \cos \varphi \quad c = \hat{A} \sin \varphi$$

2. Ersätt R , L , C med deras impedanser:

$$Z_L = j\omega L \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C} \quad Z_R = R$$

4. Gör omvändningen till punkt 1:

$$A = \hat{A} e^{j\varphi} = b + jc \Rightarrow$$

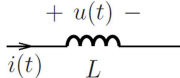
$$a(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\hat{A} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\varphi = \arg(b + jc) = \operatorname{atan} \frac{c}{b} \quad (\pm\pi)$$

Om $b < 0$

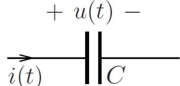
Härledning jω-metoden 2(2)

Induktans  $u(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$

$$\operatorname{Im}\{U e^{j\omega t}\} = L \frac{d}{dt} \operatorname{Im}\{I e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\left\{L I \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\{L I j\omega e^{j\omega t}\}$$

Lösning: $U = j\omega L I$

Impedans: $Z_L = j\omega L$

Kapacitans  $i(t) = C \frac{d}{dt} u(t)$

$$\operatorname{Im}\{I e^{j\omega t}\} = C \frac{d}{dt} \operatorname{Im}\{U e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\left\{C U \frac{d}{dt} e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\{C U j\omega e^{j\omega t}\}$$

Lösning: $I = j\omega C U \Rightarrow U = \frac{1}{j\omega C} I$

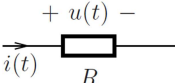
Impedans: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

Härledning jω-metoden 1(2)

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \phi_u) = \operatorname{Im}\{\hat{U} e^{j(\omega t + \phi_u)}\} = \operatorname{Im}\left\{\underbrace{\hat{U} e^{j\phi_u}}_U e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\{U e^{j\omega t}\}$$

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \phi_i) = \operatorname{Im}\{\hat{I} e^{j(\omega t + \phi_i)}\} = \operatorname{Im}\left\{\underbrace{\hat{I} e^{j\phi_i}}_I e^{j\omega t}\right\} = \operatorname{Im}\{I e^{j\omega t}\}$$

Resistans

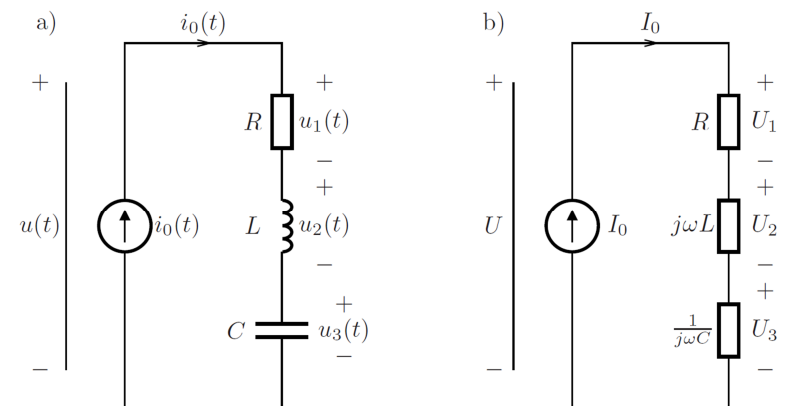
 $u(t) = R i(t)$

$$\operatorname{Im}\{U e^{j\omega t}\} = R \operatorname{Im}\{I e^{j\omega t}\} = \operatorname{Im}\{R I e^{j\omega t}\}$$

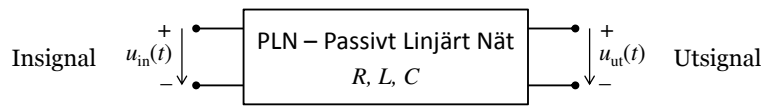
Lösning: $U = R I$

Impedans: $Z_R = R$

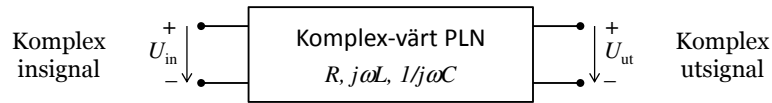
Exempel jω-metoden



Passiva filter – Introduktion



$j\omega$

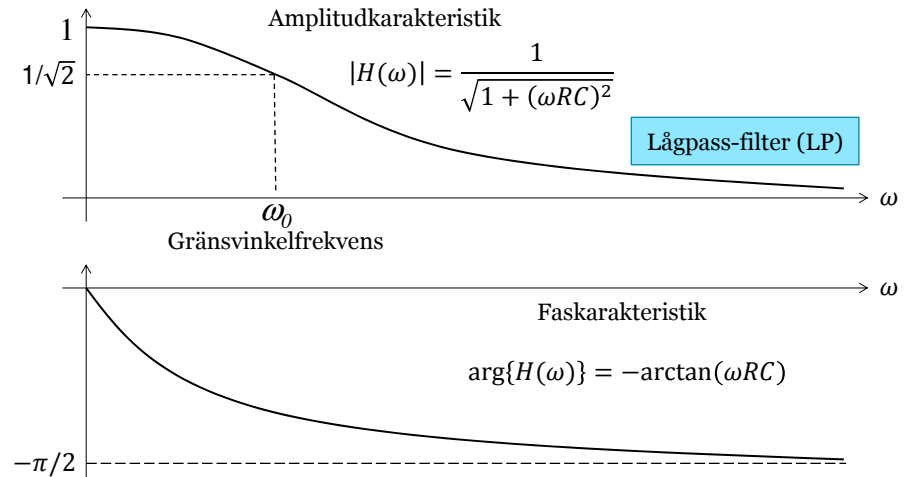
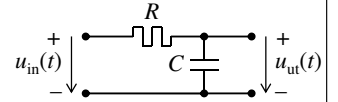


Samband: $U_{ut} = H(\omega) U_{in}$

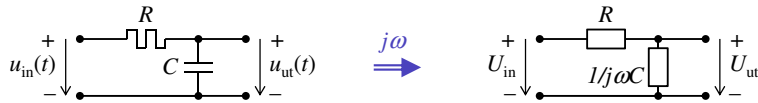
$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\arg\{H(\omega)\}} = U_{ut}/U_{in}$$

Labels: $|H(\omega)|$ is Amplitudkaraktäristik, $\arg\{H(\omega)\}$ is Faskaraktäristik, $H(\omega)$ is Frekvensfunktion.

Passiva filter – Exempel 2(2)



Passiva filter – Exempel 1(2)



Spänningsdelning ger

$$U_{ut} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R} U_{in} = \frac{1}{1 + j\omega RC} U_{in}$$

Frekvensfunktion

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

Amplitudkaraktäristik

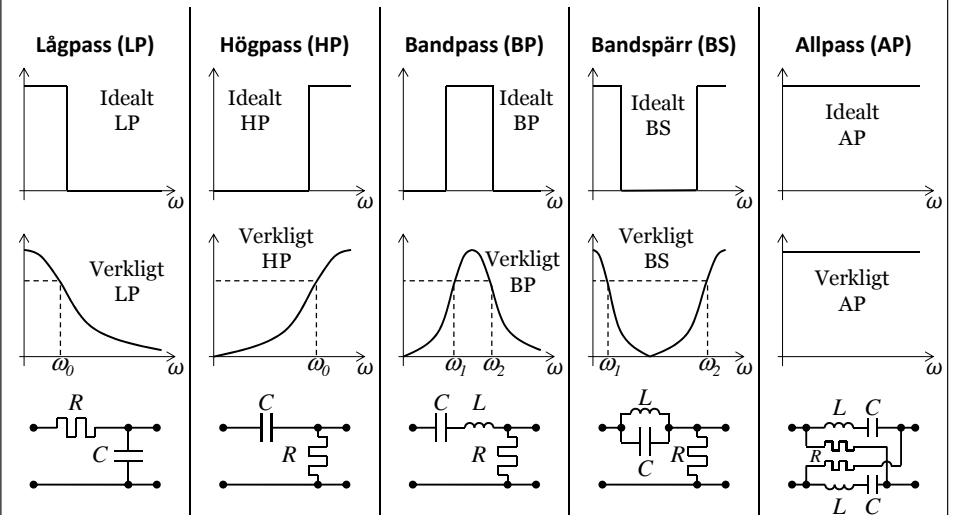
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

Faskaraktäristik

$$\arg\{H(\omega)\} = -\arctan(\omega RC)$$

$$u_{in}(t) = \hat{U}_{in} \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow u_{ut}(t) = \hat{U}_{in} |H(\omega)| \sin(\omega t + \varphi + \arg\{H(\omega)\})$$

Olika frekvensselektiva filter



Mikael Olofsson
ISY/EKS

www.liu.se