Föreläsning 2 – Faltning & Differentialekvationsbeskrivning (Kapitel 3 resp. 2)

Bild 1. Faltning

Från PPT-bild 6 i föreläsning 1 erhåller vi sambandet $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$, där vi alltså tänker oss en godtycklig tidskontinuerlig signal $x(t)$ som en integral av ett kontinuum av förskjutna diracimpulser $\delta(t-\tau)$, där varje sådan diracimpuls har vikten $x(\tau)$. Detta gicks igenom och härleddes på tavlan under föreläsning 1, i samband med visandet av PPT-bild 6. En liknande härledning finns i kapitel 3.4. En kort härledning av faltningsintegralen $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$, motsvarande den som översiktligt visas på PPT-bild 1, visas i kapitel 3.5 – se speciellt tabellen på sidan 84.

Bild 2. Faltning, forts.

- Läs kapitel 3.2, sidan 76. Notera att det alltid är möjligt att falta två godtyckliga funktioner $x(t)$ och $h(t)$. Det är bara när en av dem är absolutintegrerbar och den andre är *åtminstone* begränsad som faltningsintegralen/-integralerna garanterat konvergerar.
- Läs kapitel 3.6, sidan 85–86
  - *Kausalitet.* Slutsats: Ett LTI-system är kausalt om och endast om $h(t) = 0$ för $t < 0$. Ytterligare samband för kausalitet och impulssvaret gås igenom i samband med lösandet av räkneexemplet, uppgift b), på nästa PPT-bild.
  - *Egenskaper*: Faltningen är kommutativ, associativ och distributiv.
  - *Kaskadkoppling*: Ekvation 3.24 är en viktig slutsats! OBS: sambandet gäller bara om det efterföljande systemet (system 2 i figur 3.9) *inte belastar* det första systemet, dvs. ekvation 3.20 måste gälla både för det enskilda systemet och i det kaskadkopplade fallet.
    För två kaskadkopplade elektriska filter/system innebär detta att det efterföljande systemet inte får dra någon ström från det första systemet.

Bild 3. Räkneexempel – faltning

- Förbered dig innan föreläsningens räkneexempel genom att gå igenom exempel 3.1 i kapitel 3.3.
- Förberedelse inför lösning av deluppgift b):
  - Läs om *kausalitet*, se texten ovan, under föregående PPT-bild.
  - Stabilitet: Se nästa PPT-bild.
- Deluppgift c), stegsvar $g(t)$: Se kapitel 1.7 (speciellt ekvation 1.23 & 1.24) och exemplet i kapitel 3.3.

Bild 4. Stabilitet

Läs om *stabilitet* i kapitel 3.9, sidan 95–96.

Slutsats: Ett LTI-system är *stabilt* om och endast om $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$.

Bild 5. Differentialekvationsbeskrivning av LTI-system – kapitel 2

Förhållandet mellan insignal och utsignal för de flesta LTI-system av intresse kan beskrivas med hjälp av en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter. Att koefficienterna är konstanta är nödvändigt för tidsinvariansen. Läs kapitel 2.1–2.2, sidan 57–58!

- Läs kapitel 2.4, där författaren bevisar att ett differentialekvationsbeskrivet system är linjärt och tidsinvariant. OBS: motsvarande skall även din projektgrupp göra och redovisa, för den LTI-systemmodell som ni undersöker i er inlämningsuppgift! Dock bör ni göra detta enklare/tydligare än vad författaren gör på sidan 62–64…
- Det räcker att läsa resten av kapitel 2.4 översiktligt (sidan 65–67), det enda ni behöver känna till, är definition 2.1 och 2.2 på sidan 66 – om utsignalens *fria svängning* $y_{\mathrm{zi}}(t)$ och dess *tvungna svängning* $y_{\mathrm{zs}}(t)=(x*h)(t)$ och att utsignalen generellt kan uttryckas som summan av dessa, $y(t)=y_{\mathrm{zi}}(t)+y_{\mathrm{zs}}(t)$ (ekvation 2.40). I kursen kommer vi oftast att begränsa oss till *energifria system*, dvs. när alla initialtillstånd är noll, vilket innebär att $y_{\mathrm{zi}}(t)=0$ och $y(t)=y_{\mathrm{zs}}(t)$.
- Kapitel 2.3 illustrerar, med exempel 2.1, hur man löser en differentialekvation och erhåller utsignalsbeskrivningen $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ (se ekvation A.2 på sidan 338 i appendix A).
  - Å ena sidan förutsätts ni redan ha den kunskapen och färdigheten vad gäller lösning av differentialekvationer, men repetera vid behov kapitel 2.3 och appendix A.
  - Å andra sidan kommer ni aldrig att behöva lösa någon differentialekvation på detta sätt i kursen. Ni kommer i stället att använda er av olika transformmetoder, som resulterar i mycket enklare beräkningar.
- Tolkning av de två sista punkterna längst ned till höger på powerpointbilden:
  - När en signal ”släpps på” systemet vid $t=t_0$, dvs. $\begin{cases} x(t)=0; & t<t_0 \\ x(t)\neq 0; & t\geq t_0 \end{cases}$, så behöver man känna till begynnelsevärdena/initialtillstånden för utsignalen $y(t)$ vid $t=t_0+$ för att beräkna $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$ för $t\geq t_0$, medan man använder sig av begynnelsevärdena/initial-tillstånden för utsignalen $y(t)$ vid $t=t_0-$ för att beräkna $y_{\mathrm{zi}}(t)$. Detta är att föredra, eftersom (1) det i praktiken är enklare att erhålla/mäta initialtillstånden innan man ”släpper på” insignalen.

    Den tvungna svängningen $y_{\mathrm{zs}}(t)$ beror *inte* på några initialvillkor eftersom $y_{\mathrm{zs}}(t)$, enligt sin definition, är oberoende av initialtillstånden (dvs. fallet då systemet är energifritt). $y_{\mathrm{zs}}(t)$ erhålls i stället direkt som faltningen $(x*h)(t)$.
- Det räcker att läsa kapitel 2.5 översiktligt, den s.k. ”passningsmetoden” ingår inte i kursen.
- Kapitel 2.5 visar ett exempel på ett mekaniskt svängningssystem. Läs översiktligt.

Två exempel på differentialekvationsbeskrivna LTI-system

På föreläsningssidan finns ett pdf-dokument med två exempel på differentialekvationsbeskrivna LTI-system – ett elektriskt nät/system och ett mekaniskt svängningssystem. Båda systemen är av ordning 2, där systemordningen definieras som den högsta derivatan av utsignalen.