

Periodisk summa av sinusar

Låt $x(t) = A\sin(\omega_a t + \alpha) + B\sin(\omega_b t + \beta)$.

Om $\frac{\omega_a}{\omega_b} \in \mathbb{Q} \iff x(t)$ är T -periodisk, dvs. $x(t) = x(t + T)$

med $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$, där $\omega_1 = \text{SGD}(\omega_a, \omega_b)$

Största Gemensamma Delare (SGD)
= Greatest Common Divisor (GCD)

Exempel –

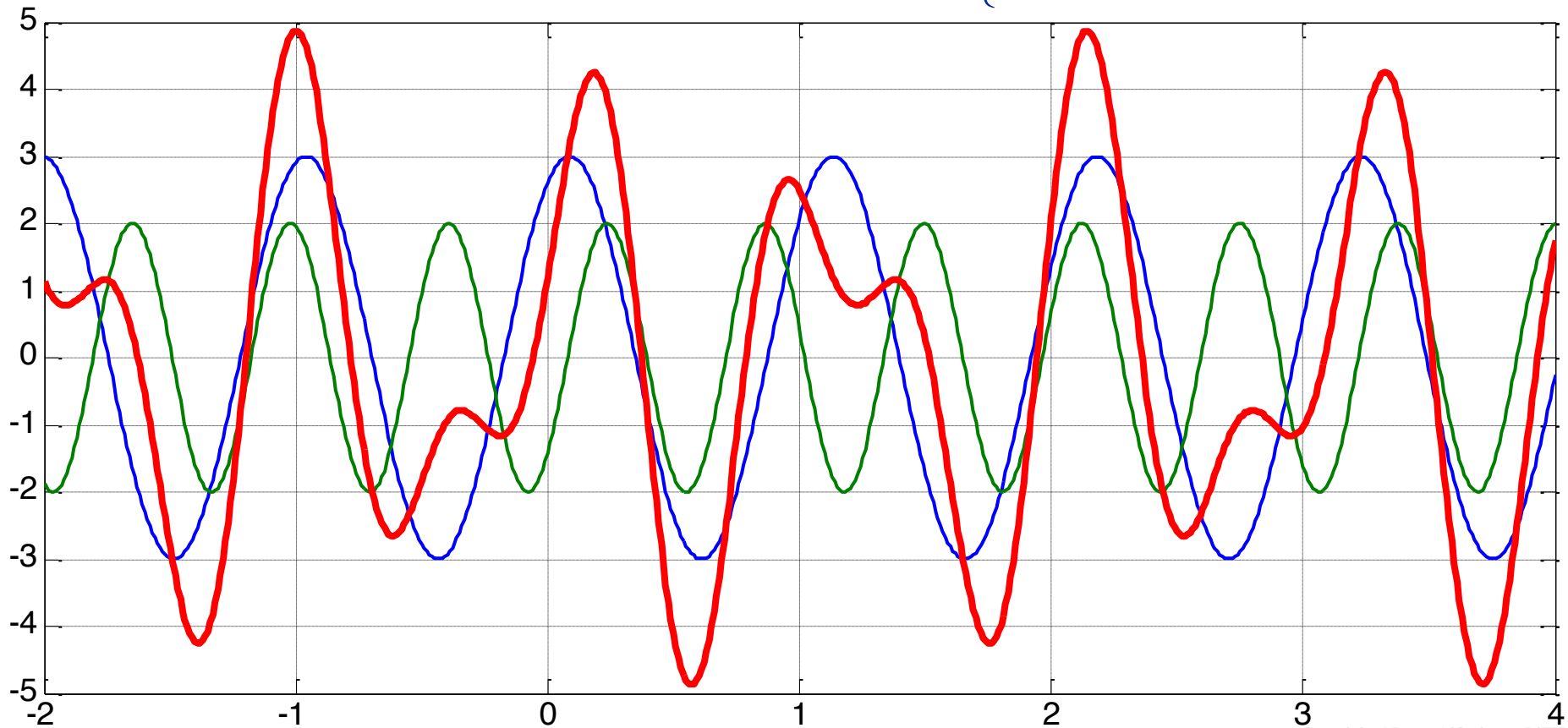
test av periodicitet:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3\sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right) \\ w(t) = 2\sin(9t) - 5\cos\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(5t - \frac{\pi}{2}\right) \\ z(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t - \frac{\pi}{2}\right) + 7\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \end{array} \right.$$

Summa av cos/sin

$$x(t) = \underbrace{3 \sin\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{röd kurva}} + \underbrace{2 \cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{blå kurva}}$$

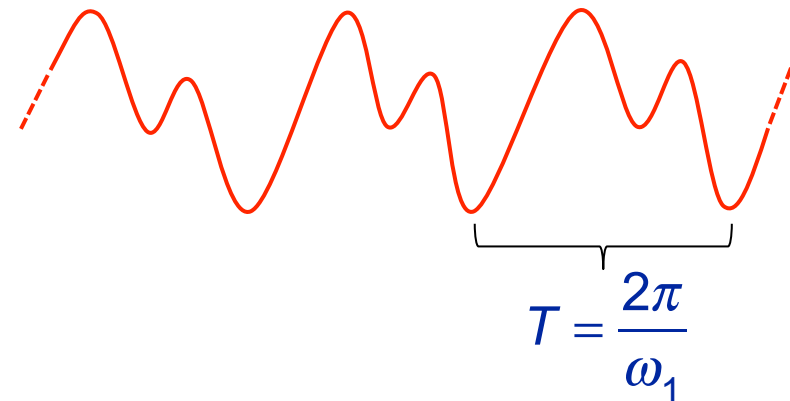
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{6}{10} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \\ \omega_1 = \text{SGD}(6,10) = 2 \text{ rad/s} \\ \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \pi \text{ sek} \end{array} \right.$$



Fouriersserieutveckling av periodiska signaler

En fysikalisk T -periodisk signal $x(t)$,
dvs. $x(t) = x(t+T)$, kan uttryckas
som följande summa av sinusar:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$$



⇔ **Fouriersserieutveckling av $x(t)$**

$\omega_1 = 2\pi f_1$: grundvinkelfrekvens

X_0 : medelvärdesnivå

$f_1 = \frac{1}{T}$: grundfrekvens

$\hat{X}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$: grundton

$\hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$, $k = 2, 3, 4, \dots$: övertoner

} deltoner

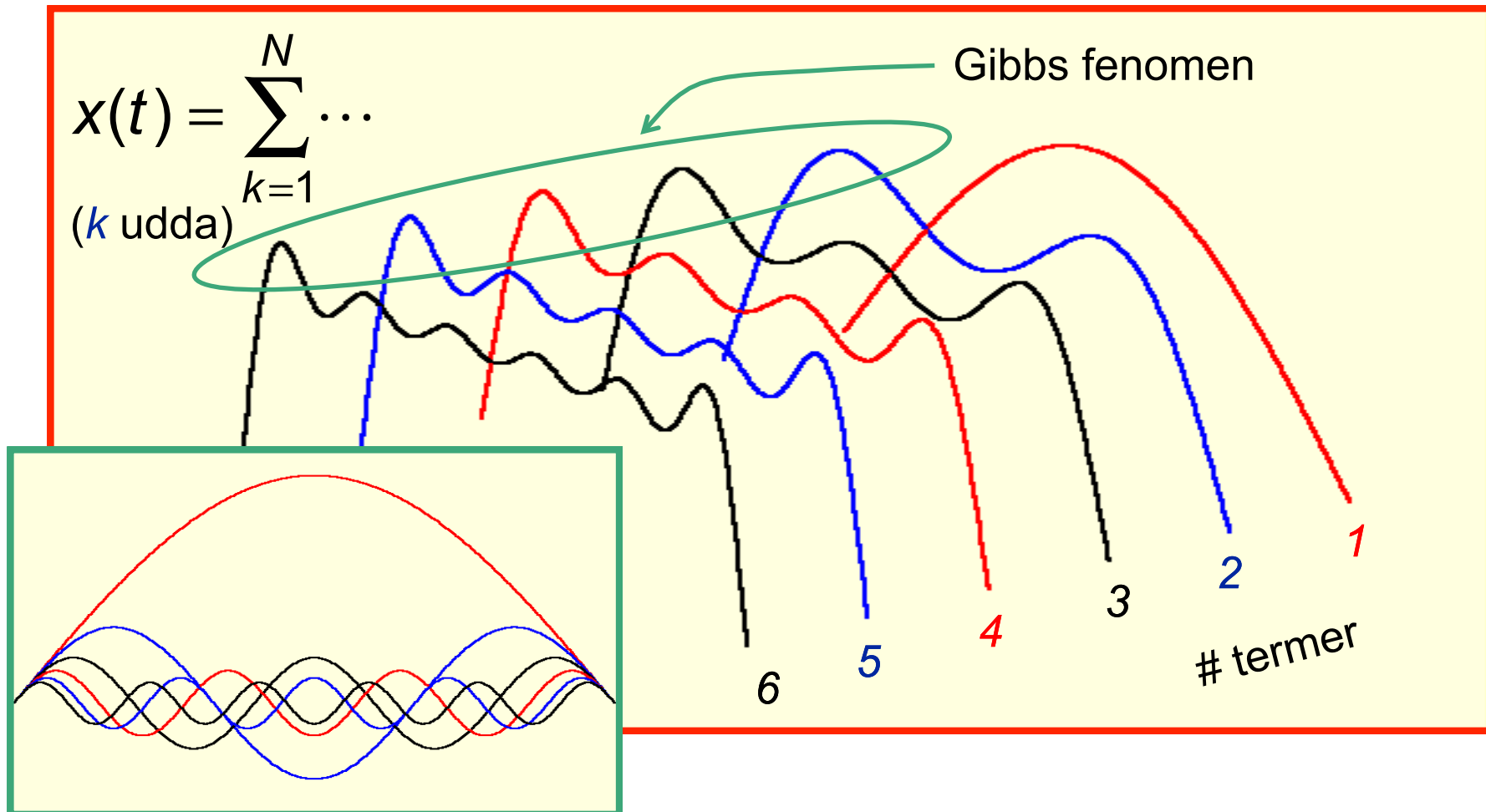
Ex: Approximation av fyrkantvåg



$$x(t) = \sum_{k=1}^N \dots$$

(k udda)

Gibbs fenomen



Fourierserieutveckling

JAVA-demo:

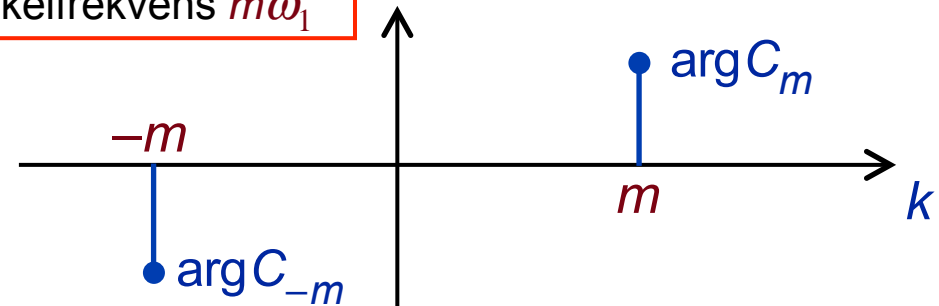
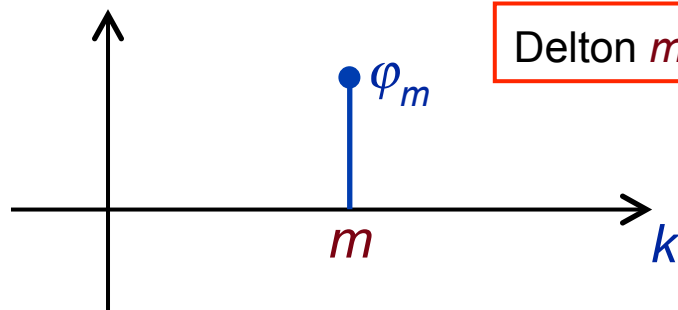
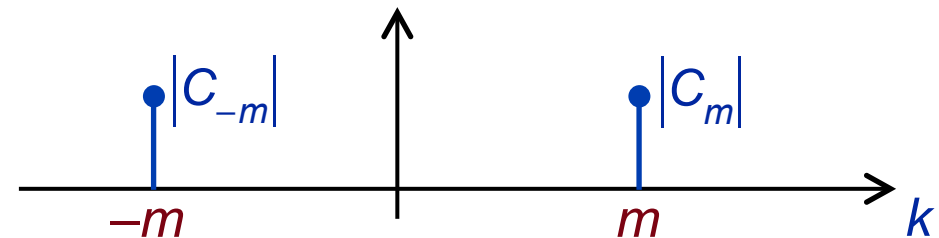
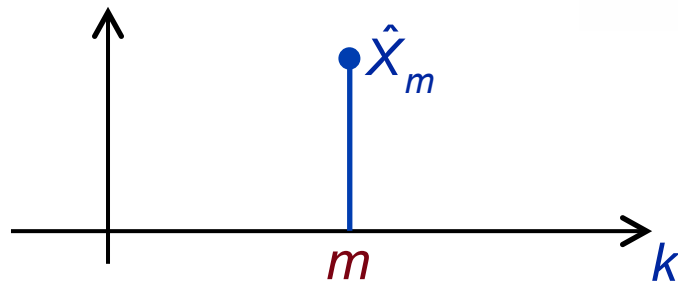
Generering av periodiska signaler med hjälp av (co)sinusformade basfunktioner:

www.falstad.com/fourier

OBS – testa även detta själv!

Spektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

$$\hat{X}_m \sin(m\omega_1 t + \varphi_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m} \cdot e^{jm\omega_1 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m^* = C_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_1 t}$$



Delton m har vinkelfrekvens $m\omega_1$

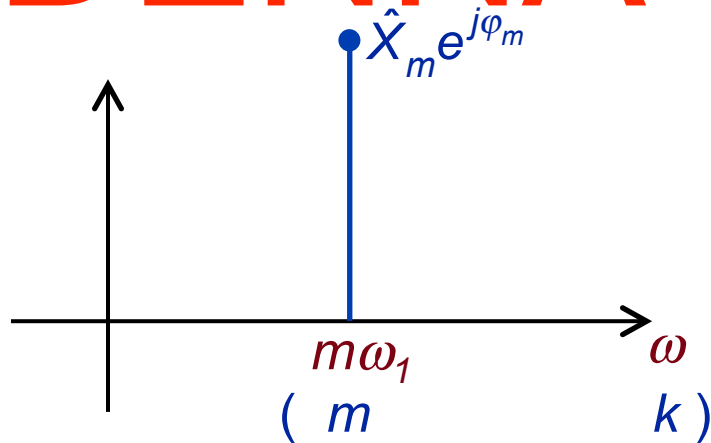
Enkelsidigt amplitudspektrum
resp. fasspektrum

Dubbelsidigt amplitudspektrum
resp. fasspektrum

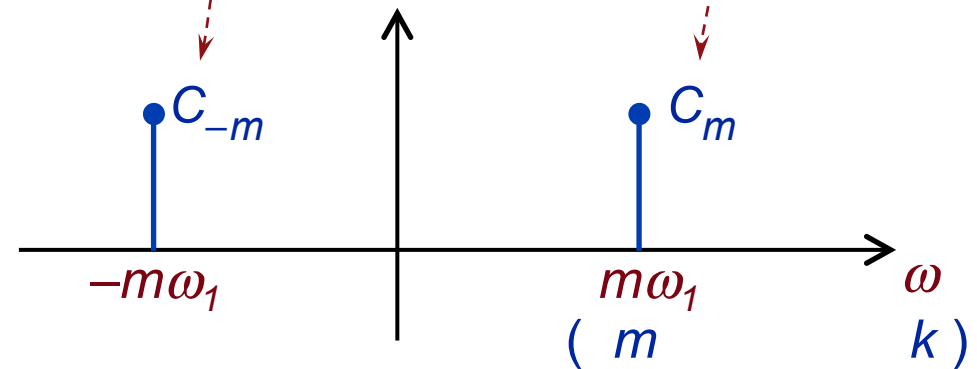
Spektrum – grafisk frekvensbeskrivning av signal

$$\hat{X}_m \sin(m\omega_1 t + \varphi_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m} \cdot e^{jm\omega_1 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\left(\varphi_m - \frac{\pi}{2}\right)}}_{C_m^* = C_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_1 t}$$

DENNA SIDA UTGÅR!!



Enkelsidigt
komplext spektrum



Dubbelsidigt
komplext spektrum

Antingen
ω-axel eller
k-axel

Fouriersserieutveckling, sammanfattn:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t} = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

Samband:

$$X_0 = C_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) dt$$

$$\hat{X}_{k>0} = 2|C_k|$$

$$\varphi_{k>0} = \arg C_k + \frac{\pi}{2}$$

Grundvinkelfrekvens $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

Amplitudspektrum

Fasspektrum

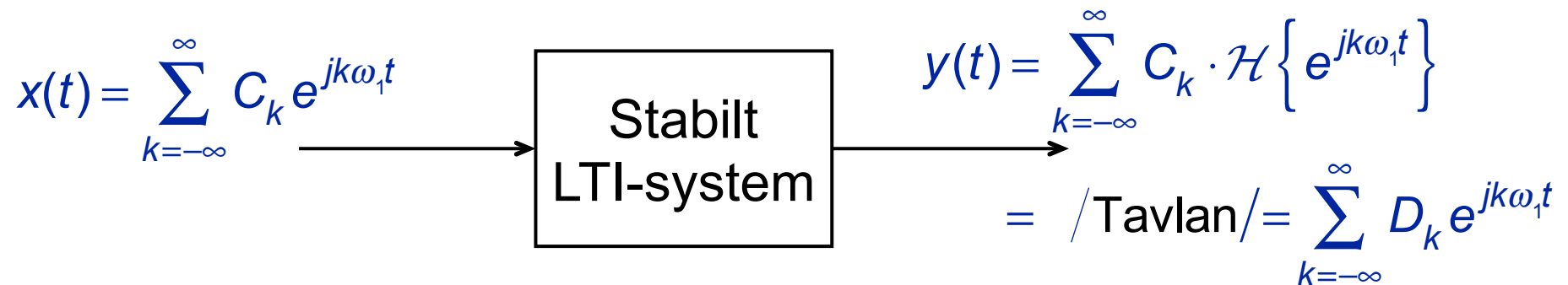
där

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

Komplexa
fouriersserie-
koefficienter

$$x(t) \text{ reellv\u00e4rd} \\ \Leftrightarrow C_{-k} = C_k^*$$

LTI-system: periodiskt in \Rightarrow periodiskt ut



$$\text{Ex. 1: } y(t) = x(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1(t-t_0)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{C_k e^{-jk\omega_1 t_0}}_{D_k} e^{jk\omega_1 t}$$

$$\text{Ex. 2: } y(t) = x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \frac{d(e^{jk\omega_1 t})}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{jk\omega_1 \cdot C_k}_{D_k} e^{jk\omega_1 t}$$

Ex. 2 \Rightarrow Allmänt samband:

C_k för den periodiska signalen $x(t)$ kan erhållas från $C_{kx'}$ för derivatasignalen $x'(t)$:

$$C_k = \frac{C_{kx'}}{jk\omega_1}$$

Kretsberäkningar (här söks $y(t)$)

1. Fourierserietveckla källsignalerna (t.ex. en källa $x(t)$)
2. Använd likströmsteori för källornas medelvärden ($X_0 \Rightarrow Y_0$)

3. Använd $j\omega$ -metoden för källornas deltoner:

$$\hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k) \rightarrow X_k = \hat{X}_k e^{j\varphi_k} \quad R, \quad jk\omega_1 L, \quad \frac{1}{jk\omega_1 C}$$

Beräkna sökt storhet på komplex form:

$$Y_k = \hat{Y}_k e^{j\psi_k} \quad \Rightarrow \quad \text{Delton } k: \quad y_k(t) = \hat{Y}_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$$

4. Superposition ger tidsuttrycket för sökt storhet:

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \sin(k\omega_1 t + \psi_k)$$

Signalmedeleffekt

Signal(medel)effekten P är ett *storleksmått* för en T -periodisk signal $x(t)$

(jämför med elektrisk aktiv effekt):
$$P = X_e^2 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |x(t)|^2 dt$$

Parsevals formel/teorem:

$$P = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2$$

Bevis (kolla själv!):

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = X_e^2 = X_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_{ke}^2 = \left/ X_{ke} \right. = \frac{\hat{X}_k}{\sqrt{2}} = \frac{2|C_k|}{\sqrt{2}} \left/ = C_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 2|C_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |C_k|^2 \right.$$

Fourieranalys & fouriersyntes

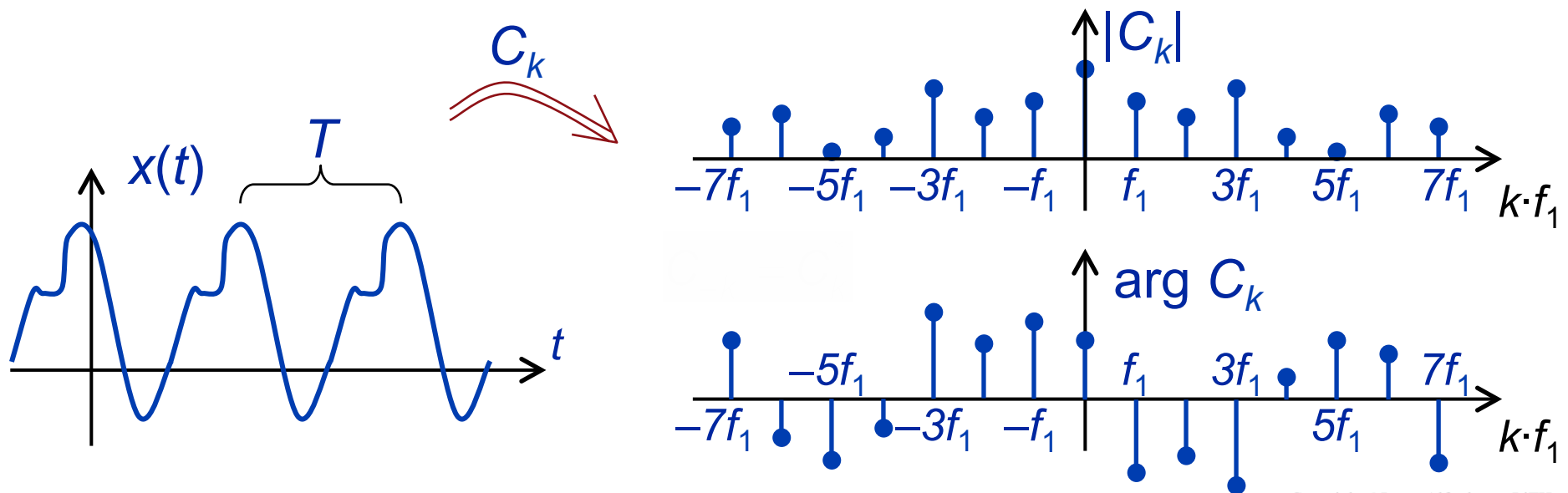
Fourieranalys:

$x(t)$ och ω_1 (eller T) är givna.

$$\text{Bestäm } C_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

Signalens frekvensspektrum, dvs. C_k ritad som funktion av k , frekvens f eller vinkelfrekvens ω , är ofta av intresse.

Vanligen ritas man då amplitudspektrum och fasspektrum:



Fourieranalys & fouriersyntes

Fouriersyntes:

C_k och ω_1 (eller T) är givna.

Bestäm/skapa $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_1 t}$

I praktiska sammanhang nöjer man sig med en approximation: $x_M(t) = \sum_{k=-M}^M C_k e^{jk\omega_1 t}$

