

# LAPLACETRANSFORMEN

$$\text{Antag } \begin{cases} x(t < 0) = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty \Rightarrow \underline{\mathcal{F}\{x(t)\}} \nexists \quad (\text{enligt grunddef.}) \end{cases}$$

Låt  $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$ , där  $\sigma \in \mathbb{R}$ , sådan att

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(t)| dt < \infty \quad \forall \quad \sigma > \text{något } \sigma_0 \geq 0$$

Följaktligen existerar  $\mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\}$

**(Enkelsidig) laplacetransform, forts.**

$$\Rightarrow \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$$

$$= X(\sigma + j\omega) = X_I(s) = \mathcal{L}_I\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

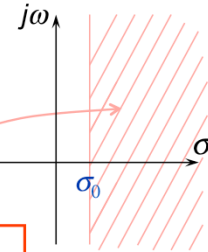
Låt  $s = \sigma + j\omega$

$X(s) = X_I(s)$ : Enkelsidig laplacetransform

Konvergensområde:  $\sigma = \text{Re}\{s\} > \sigma_0$

OBS!  $\begin{cases} \mathcal{F}\{x(t)\} \nexists \Leftrightarrow \sigma_0 > 0 \\ \mathcal{F}\{x(t)\} \exists \Leftrightarrow \sigma_0 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$



## Dubbelsidig laplacetransform

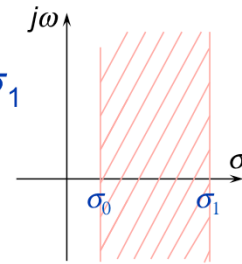
- ♦ Låt  $x(t) \exists \forall t$  och låt  $\mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \exists$  för något reellt  $\sigma$  i intervallet  $\sigma_0 < \sigma < \sigma_1$ :

$$X_{\text{II}}(s) = \mathcal{L}_{\text{II}}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Dubbelsidig  
laplacetransform

Konvergensomr. för  $X_{\text{II}}(s)$ :  $\sigma_0 < \sigma = \text{Re}\{s\} < \sigma_1$

(OBS! Om  $\mathcal{F}\{x(t)\} \exists \Leftrightarrow j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för  $X(s)$ !)



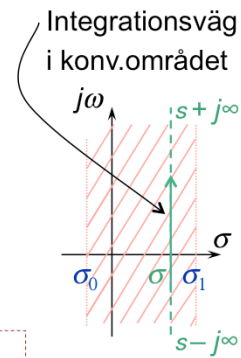
## Invers laplacetransform

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

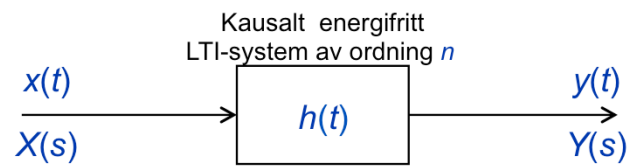
I denna kurs erhåller vi ofta (oftast) transformer och deras inverser från någon **laplacetransformtabell!**

Samma inverstransforms samband för den dubbel-sidiga laplacetransformen som för den enkelsidiga!

**OBS:** Laplacetransformanalys finns i **Kap. 6**, men: Definition av laplacetransform, dess existensvillkor samt bevis av olika viktiga transformegenskaper finns i **Appendix D!!**



## SYSTEMANALYS



Många LTI-system kan beskrivas med en differentialekvation:

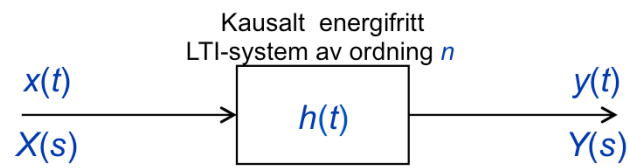
$$a_0 y(t) + \sum_{i=1}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = b_0 x(t) + \sum_{j=1}^m b_j \frac{d^j x(t)}{dt^j}$$

Antag  $x(t < 0) = 0$  (Kausalt system ger då  $y(t < 0) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}_I$  kan användas)

$$\mathcal{L}_I \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = sY(s) - y(0^-) \quad \mathcal{L}_I \left\{ \frac{d^i y(t)}{dt^i} \right\} = s^i Y(s) - s^{i-1} y(0^-) - s^{i-2} y'(0^-) - \dots$$

Copyright © 2011, All rights reserved. LTI

# SYSTEMANALYS



Vi har:  $\left\{ \begin{array}{l} x(t < 0) = 0 \Rightarrow x(0^-) = 0, x'(0^-) = 0, \dots \text{ osv.} \\ \text{Energifritt system} \Rightarrow y(0^-) = 0, y'(0^-) = 0, \dots \text{ osv.} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow Y(s) \cdot \sum_{i=0}^n a_i s^i = X(s) \cdot \sum_{j=0}^m b_j s^j$$

Systemfunktionen:

Alt. "Överföringsfunktionen"

$$H(s) = \left. \frac{Y(s)}{X(s)} \right|_{\text{alla initial-tillstånd} = 0} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}$$

## Systemfunktion, forts

Dvs. för energifria LTI-system gäller:

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

Om stabilt system

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$



$$y(t) = (x * h)(t)$$

### Systemegenskap | $\mathcal{L}$ -transformtyp

Kausalt

Enkelsidig,  $\mathcal{L}_I$

Icke-kausalt

Dubbelsidig,  $\mathcal{L}_{II}$

- Om systemet **ej** är energifritt:

$$y(t) = (x * h)(t) + y_{zi}(t)$$

- OBS:  $y_{zi}(t)$  kan bara erhållas från diff.ekv. m.h.a.  $\mathcal{L}_I$ , inte  $\mathcal{L}_{II}$

Copyright © 1999, 2003, 2006, 2011

## Pol-Nollställediagram

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (s - n_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$K = \frac{b_m}{a_n}$ : **Nivåkonstanten**

$n_j$ : **Nollställen** till  $H(s) \equiv$  täljarpolynomets nollställen

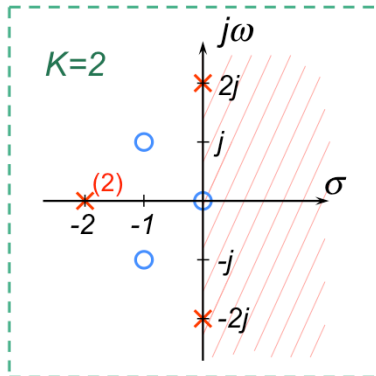
$p_i$ : **Poler** till  $H(s) \equiv$  nämnarpolynomets nollställen



## Pol-Nollställediagram, forts

Exempel:

$$H(s) = \frac{2s^3 + 4s^2 + 4s}{s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 16s + 16} = 2 \cdot \frac{s(s+1+j)(s+1-j)}{(s+2)^2(s+2j)(s-2j)}$$



Nollställen:

$$n_0 = 0 \quad n_1 = -1 - j \quad n_2 = -1 + j$$

Poler:

$$p_1 = p_2 = -2 \quad p_3 = -2j \quad p_4 = 2j$$

Konvergensområde för  $H(s)$

om kausalt system:  $\text{Re}\{s\} > -2$

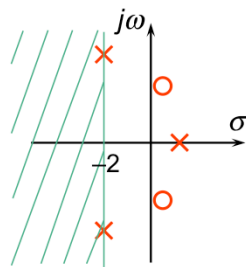
## KAUSALITET & konvergensområde för $H(s)$

De tre typerna av sammanhängande konvergensområde motsvarar för systemfunktionen  $H(s)$  olika kausalitetsfall:

Antikausalt system

$$h(t \geq 0) = 0$$

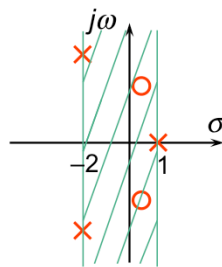
$$\underline{\text{Re}\{s\} < -2}$$



Allmänt icke-kausalt system

$$h(t < 0, t \geq 0) \neq 0$$

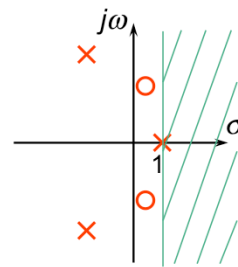
$$\underline{-2 < \text{Re}\{s\} < 1}$$



Kausalt system

$$h(t < 0) = 0$$

$$\underline{\text{Re}\{s\} > 1}$$



Copyright © 2004, MIT

## Poler, nollställen och tidssignal

- ♦ Laplacetransformens poler anger, tillsammans med deras respektive positioner, vilka typer av termer (dvs. signaltermer eller impulssvarstermer) som ingår i motsvarande tidsuttryck.

Enkelpol (reell):  
(  $s = -\alpha$ ,  $\text{Re}\{s\} > -\alpha$ )

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+\alpha}\right\} = e^{-\alpha t} \cdot u(t)$$

Enkla komplexkonj. polpar:  
(  $s = -\alpha \pm j\omega_0$ ,  $\text{Re}\{s\} > -\alpha$ )

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}\right\} = e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$$

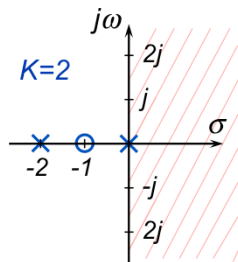
- ♦ Laplacetransformens nollställen inverkar främst på den relativa styrkan av de olika termerna.

# Överlagrade pol-nollställediagram

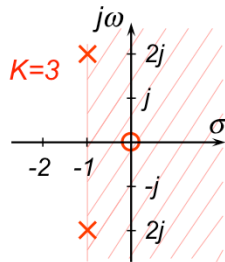
Exempel:  $x(t) = (1 + e^{-2t})u(t) \xrightarrow{\text{Kausalt LTI-system}} h(t) \rightarrow y(t)$

$$X_1(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+2}$$

$$= \frac{2(s+1)}{s(s+2)}$$

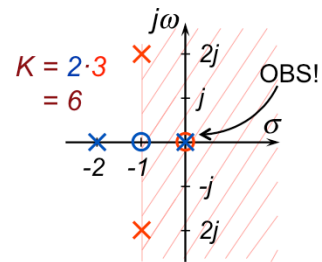


$$H_1(s) = \frac{3s}{(s+1)^2 + 2^2}$$



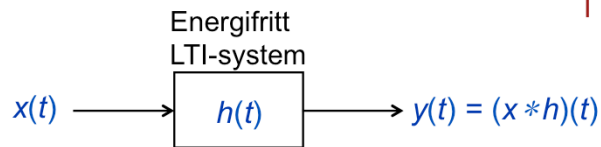
$$Y_1(s) = X_1(s) \cdot H_1(s)$$

$$= \frac{2(s+1)}{\cancel{s}(s+2)} \cdot \frac{3\cancel{s}}{(s+1)^2 + 2^2}$$



Copyright © Lasse Ahlfors, LITF

## STABILITET



Vi vet:

Systemet är stabilt om  $|x(t)| \leq M < \infty \rightarrow |y(t)| \leq N < \infty \quad \forall t$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

Dvs.  $j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för  $H(s)$

Dvs. för ett **stabilt LTI-system** gäller

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

**Marginellt stabilt LTI-system**  $\Leftrightarrow j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för  $H(s)$  och alla dess poler på  $j\omega$ -axeln är *enkla*.

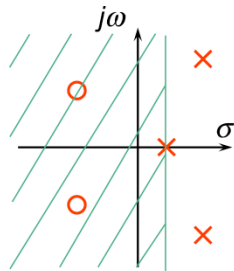
**OBS:** För systemfunktionen till både stabila och marginellt stabila LTI-system gäller att antal poler  $\geq$  antal nollställen

## Stabilitet & Kausalitet (sammanfattning)

Polplaceringar hos  $H(s)$  för **stabila LTI-system**, beroende på kausalitetsegenskap:

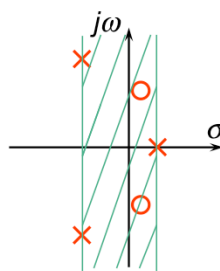
1) Stabilt & Antikausalt system

⇒ Alla poler i HHP



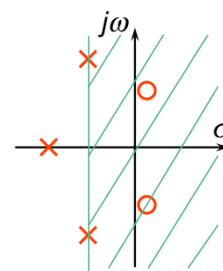
2) Stabilt & Allmänt icke-kausalt system

⇒ Poler i VHP & HHP



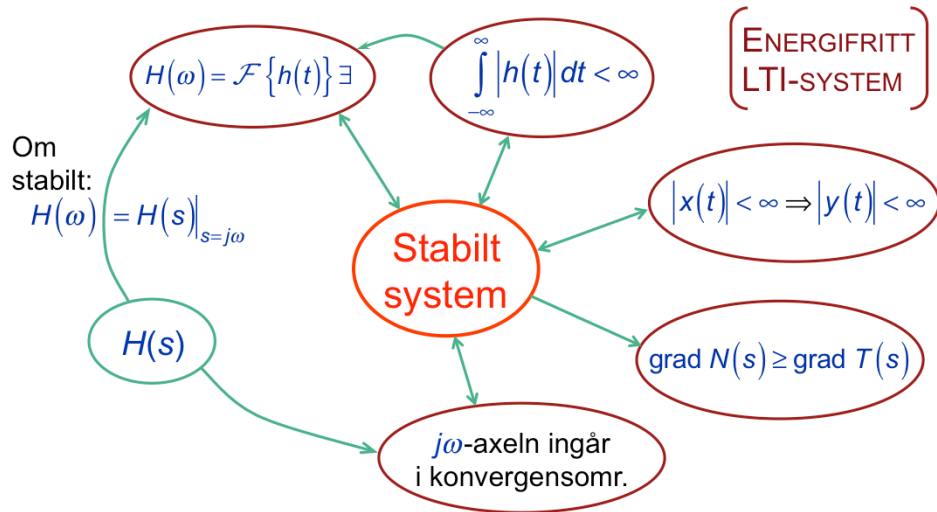
3) Stabilt & Kausalt system

⇒ Alla poler i VHP



# Stabilitetsrelationer,

$$H(s) = \frac{T(s)}{N(s)} \exists$$



## $|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer

Stabilt LTI-system  
 $\downarrow$   
 $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \left\{ \begin{aligned} &K \cdot \frac{(j\omega - n_1)(j\omega - n_2) \cdots (j\omega - n_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_N)} = K \cdot \frac{r_1 e^{j\phi_1} \cdot r_2 e^{j\phi_2} \cdots r_M e^{j\phi_M}}{d_1 e^{j\theta_1} \cdot d_2 e^{j\theta_2} \cdots d_N e^{j\theta_N}} \\ &|H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)} \end{aligned} \right.$

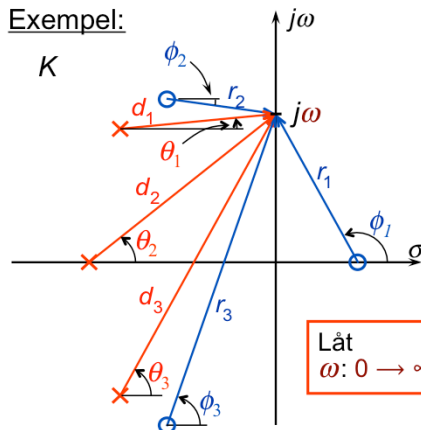
Amplitudkaraktärstiken:

$$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdots r_M}{d_1 \cdot d_2 \cdots d_N}$$

Faskaraktärstiken:

$$\arg H(\omega) = \arg K + (\phi_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)$$

Exempel:





## Kretsberäkningar, linjära *RLMC*-nät (passiva kretselement, laplacetransformerbara källor)

METODIK, beräkna godtycklig nätspänning / -ström:

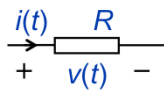


Om nätförändringar sker vid  $t = t_0$  ( här antas  $t_0 = 0$  )  $\Rightarrow$  Betrakta alla källor som inkopplade vid  $t = t_0 \Rightarrow \mathcal{L}\{x(t-t_0)u(t-t_0)\} = X(s)e^{-st_0}$

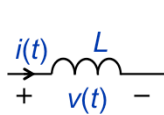
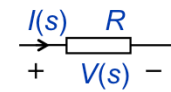


## Kretsberäkningar, metodik (forts)

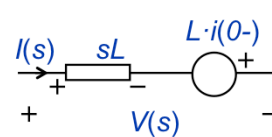
3) Ersätt passiva nätelement med **operatorscheman**:



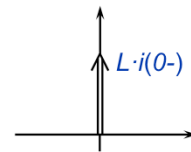
$$v(t) = R \cdot i(t) \Leftrightarrow \boxed{V(s) = R \cdot I(s)}$$



$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Leftrightarrow \boxed{V(s) = sL \cdot I(s) - L \cdot i(0^-)}$$



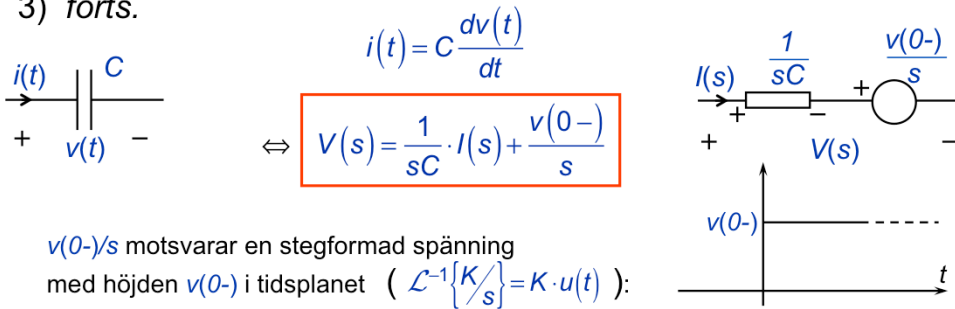
$L \cdot i(0^-)$  motsvarar en impulsformad spänning med styrkan  $L \cdot i(0^-)$  i tidsplanet ( $\mathcal{L}^{-1}\{K\} = K \cdot \delta(t)$ ):



Copyright © Lars Ahlborn, LTU

## Kretsberäkningar, metodik (forts)

3) forts.



- |    |                    |               |   |
|----|--------------------|---------------|---|
| 4) | Likströmsteori     | $\Rightarrow$ | Sökt storhets laplacetransform ( $Y(s)$ )                       |
| 5) | Inverstransformera | $\Rightarrow$ | Sökt storhets tidsuttryck ( $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ ) |