Lektionsuppgifter – FILTER (kursbokens kapitel 7)

Notera: 3 dB-gränsvinkelfrekvensen, som i kursboken betecknas ω_0 eller $\omega_{3\text{dB}}$, betecknas här istället som Ω (från beteckning i tidigare kursbok)!!

1. Ett kausalt och stabilt elektriskt filter/LTI-system av ordning $n = 3$ skall helt filtrera bort likspänningskomponenter och (co)sinussignaler med vinkelfrekvensen $2 \cdot 10^3$ rad/s. Sinussignaler med vinkelfrekvens 100 rad/s skall passera filtret utan någon amplitudförändring. Slutligen skall LTI-systemets systemfunktion ha nivåkonstanten $K = 1$ samt endast reellvärda poler.

   a) Vilka nollställen och poler hos filtrets/systemets systemfunktion $H(s)$ är nödvändiga – och varför? Bestäm $H(s)$, inklusive konvergensområde.

   b) Rita fullständigt pol-nollställediagram för $H(s)$.

   c) Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$.

2. Ett visst amplitudnormerat lågpassfilter av butterworth-typ har 3 dB-gränsvinkelfrekvensen $\Omega = 100$ rad/s och filtrets dämpningsfaktor skall vara *högst* $\frac{1}{10}$ vid vinkelfrekvensen 150 rad/s, dvs. $|H(150)| \leq \frac{1}{10}$.

   a) Vilket ordning måste filtret minst ha?

   b) Bestäm dämpningsfaktorn $|H(150)|$ för butterworthfiltret med lägsta ordning enligt uppgift a). Ange även motsvarande dämpning i decibel.

   c) Rita pol-nollställediagrammet till butterworthfiltrets systemfunktion $H(s)$, dvs. filtret i uppgift a)-b). Ange i grafen vinkelavståndet mellan polerna.

3. Ett amplitudnormerat butterworthfilter av ordning *n*, med systemfunktion $H_{\text{B}}(s)$ har 3 dB-gränsvinkelfrekvens Ω rad/s. Systemfunktionens nivåkonstant är Ω^n.

   a) Visa, utgående från systemfunktionen, att $|H_{\text{B}}(\omega)| = 1$ vid $\omega = 0$ rad/s.

   b) Om man hos systemfunktionen lägger till *n* nollställen i origo och ändrar nivåkonstanten till 1, så erhålls ett amplitudnormerat högpassfilter som även det har 3 dB-gränsvinkelfrekvensen Ω rad/s. Visa detta!

4. Skissera typiska pol-nollställediagram till systemfunktionen för nedanstående kausala och stabila amplitudnormerade tidskontinuerliga filter.
   Skissera även amplitudkaraktäristiken för varje filter.

   a) Ett *lågpassfilter* med maximalt flat amplitudkaraktäristik, av ordning 5, som har 3 dB-gränsfrekvens ca. 10 Hz.
   b) Ett *lågpassfilter* av ordning 5, med 3 dB-gränsfrekvens ca. 10 Hz, men som har högre dämpning i spärrbandet än filtret i uppgift a).
   c) Ett *högpassfilter* med maximalt flat amplitudkaraktäristik, av ordning 4, som har 3 dB-gränsfrekvens ca. 10 Hz.
   d) Ett *bandpassfilter* av ordning 6, som har mitt-vinkelfrekvens ca. 50 rad/s och bandbredd (mellan undre och övre 3 dB-gränsvinkelfrekvenserna) på ca. 20 rad/s.

5. Man vill konstruera ett tidskontinuerligt amplitudnormerat lågpassfilter av ordning 6, med 3 dB-gränsvinkelfrekvensen $\Omega = 500$ rad/s. En av många lösningar (lösning A) är att använda ett butterworthfilter av ordning 6. En annan lösning (lösning B) är att kaskadkoppla två likadana butterworthfilter av ordning 3, där båda filtren har 3 dB-gränsvinkelfrekvens Ω_0.

   a) Bestäm Ω_0.
   b) Vilket av systemen (lösning A eller B) är bäst? Förklara!

LÖSNINGAR:

1. a) • Ett nollställe i origo hos $H(s)$ tar bort ev. likspänningskomponent hos insignalen $x(t)$.
($|H(\omega=0)| = 0$)

• $x(t) = \hat{X}\cos/\sin(2\cdot 10^3 t + \varphi) \Rightarrow$ /stabilt/

$$\Rightarrow y(t) = \hat{X}\underbrace{|H(2\cdot 10^3)|}_{|H(\omega)|_{\omega=2\cdot 10^3}} \cos/\sin(2\cdot 10^3 t + \ldots) = 0$$

$\Rightarrow |H(\omega)|_{\omega=2\cdot 10^3} = 0 \Rightarrow H(s)$ måste ha nollställen i $s = \pm j 2\cdot 10^3$

• Ordning 3 $\Rightarrow$ 3 poler — reella, enl. uppgift. Låt, för enkelhetens skull, alla ligga på samma ställe; $s = -a < 0$ (<0 ty kausalt & stabilt)

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s(s^2 + (2\cdot 10^3)^2)}{(s+a)^3} \quad (K=1)$$

$$\text{Stabilt} \Rightarrow H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{j\omega(-\omega^2 + 4\cdot 10^6)}{(a+j\omega)^3}$$

$$\Rightarrow |H(\omega)| = \frac{|\omega|\cdot|(-\omega^2 + 4\cdot 10^6)|}{(\sqrt{a^2+\omega^2})^3}$$

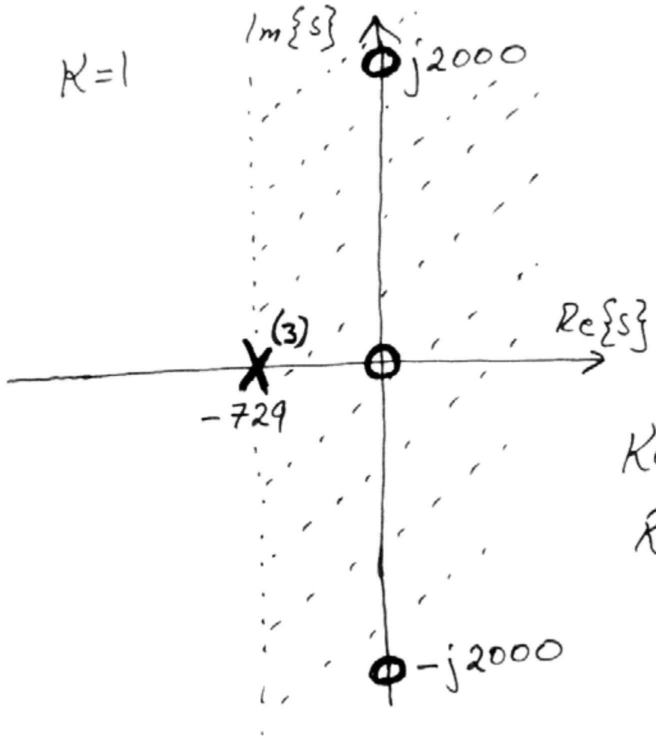
$$\text{Enl. uppgift: } |H(100)| = \frac{100(-100^2 + 4\cdot 10^6)}{(a^2 + 100^2)^{3/2}} = 1$$

$$\Rightarrow \underline{a \approx 729}$$

$$\therefore H(s) = \frac{s(s^2 + 4\cdot 10^6)}{(s+729)^3}$$

Konvergensområde: $\mathrm{Re}\{s\} > -729$
($\Leftrightarrow$ kausalt & stabilt)

1. b) $K=1$



Konv.område:

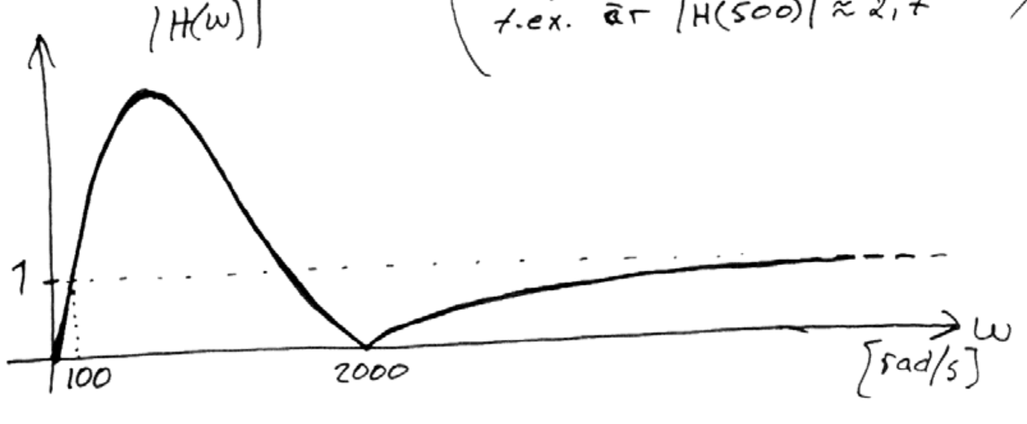
$\mathrm{Re}\{s\} > -729$

c) $|H(0)| = |H(2000)| = 0$, $|H(100)| = 1$

$$\lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega\to\infty} \frac{|-\omega^3 + \omega\cdot 4\cdot 10^6|}{(729^2+\omega^2)^{3/2}} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \frac{\left|1 - \frac{4\cdot 10^6}{\omega^2}\right|}{\left(\frac{729}{\omega^2}+1\right)^3} = \frac{1-0}{(0+1)^3} = 1 \quad (=K\,?)$$

(Att $|H(\omega)|_{max}$ blir ungefär som i figuren kan testas: t.ex. är $|H(500)| \approx 2{,}7$)



2\. a) Butterworthfiltrets amplitudkaraktäristik:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2n}}} \; ; \; \Omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$|H(150)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{150}{100}\right)^{2n}}} \leq \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}5^{2n} \geqslant 10^2 - 1 = 99$$

$$= \quad 2n \cdot \log 1{,}5 \geqslant \log 99$$

$$\Rightarrow \quad n \geqslant \frac{\log 99}{2 \cdot \log 1{,}5} \approx 5{,}7 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{n_{min} = 6}}$$

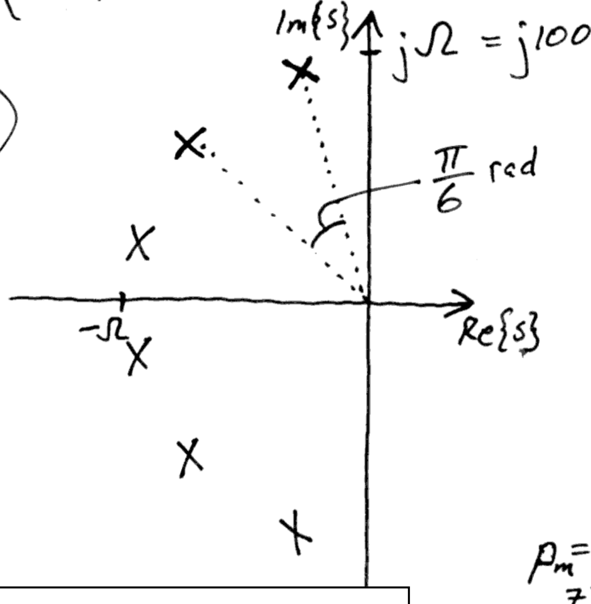
b)

$$|H(150)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{150}{100}\right)^{2\cdot 6}}} \approx \underline{0{,}0875}$$

$20 \cdot {}^{10}\log(0{,}0875) \approx -21$, dvs. en dämpn.faktor på $0{,}0875$ motsvarar $\underline{\underline{\approx 21 \text{ dB dämpning}}}$

(dämpn.faktorn $\frac{1}{10}$ motsvarar 20 dB dämpning)

c)



Nivåkonstanten är

$$K = \Omega^n = 100^6$$

Polernas lägen:

$$p_m = \Omega \cdot e^{j\left(1+\frac{m}{6}\right)\frac{\pi}{2}}, \quad m = 1, 3, 5, 7, 9, 11$$

dvs.

$$p_m = 100 \cdot e^{j\varphi_m}, \text{ där}$$

$$\varphi_m = \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \text{ rad}$$

OBS: Polernas *exakta lägen* är inte centralt här, utan snarare att de ligger på en halvcirkel med radien Ω.

3, a) $$H_B(s) = \frac{\Omega^n}{(s-p_1)(s-p_3)(s-p_5)\cdots(s-p_{2n-1})}$$

där $p_m = \Omega \cdot e^{j(1+\frac{m}{n})\frac{\pi}{2}}$, $m = 1,3,5,\ldots,2n-1$

$$\Rightarrow |H_B(\omega)| = \frac{\Omega^n}{|(j\omega-p_1)(j\omega-p_3)(j\omega-p_5)\cdots(j\omega-p_{2n-1})|}$$

$$\Rightarrow |H_B(0)| = \frac{\Omega^n}{|(-p_1)(-p_3)(-p_5)\cdots(-p_{2n-1})|}$$

$$= \big/\,|p_m| = \Omega\,\big/ = \frac{\Omega^n}{\Omega^n} = 1$$

b) $$H(s) = \frac{s^n}{(s-p_1)(s-p_3)(s-p_5)\cdots(s-p_{2n-1})}$$

$$= H_B(s)\cdot\frac{s^n}{\Omega^n} \Rightarrow |H(\omega)| = |H_B(\omega)|\cdot\frac{|\omega|^n}{\Omega^n}$$

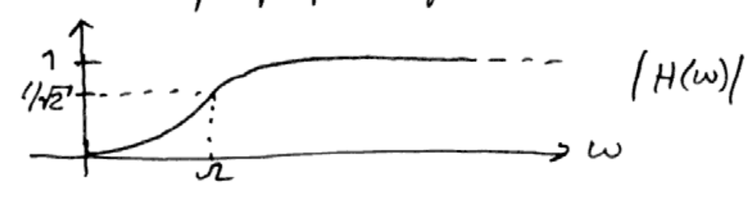
$\Rightarrow$ • $|H(0)| = |H_B(0)|\cdot\frac{0^n}{\Omega^n} = \frac{1}{\Omega^n}\cdot 0 = 0$

• $|H(\Omega)| = |H_B(\Omega)|\cdot\frac{\Omega^n}{\Omega^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

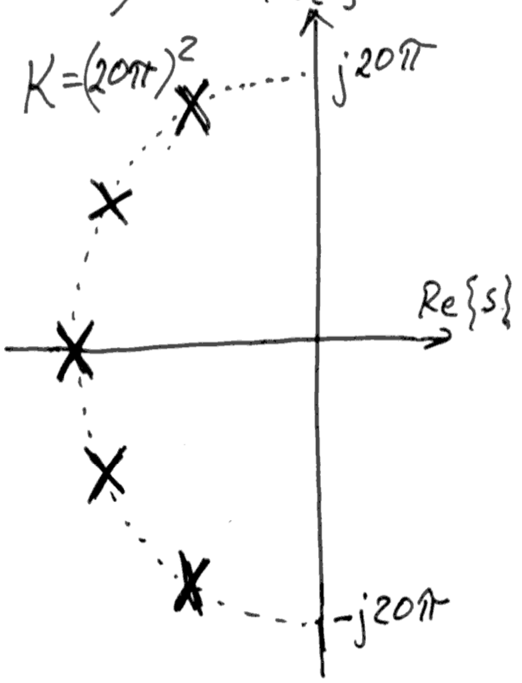
• $$\lim_{\omega\to\infty}|H(\omega)| = \lim_{\omega\to\infty}\frac{\omega^n}{|(j\omega-p_1)(j\omega-p_3)\cdots|}$$

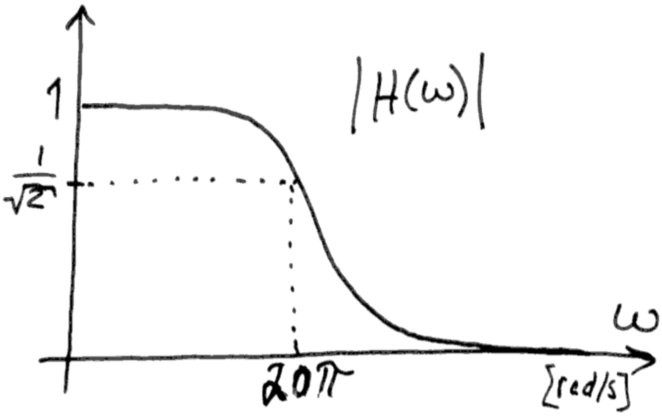
$$= \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{\left|\left(j-\frac{p_1}{\omega}\right)\left(j-\frac{p_3}{\omega}\right)\left(j-\frac{p_5}{\omega}\right)\cdots\left(j-\frac{p_{2n-1}}{\omega}\right)\right|}$$

$$= \frac{1}{1\cdot 1\cdot 1\cdots 1} = 1$$

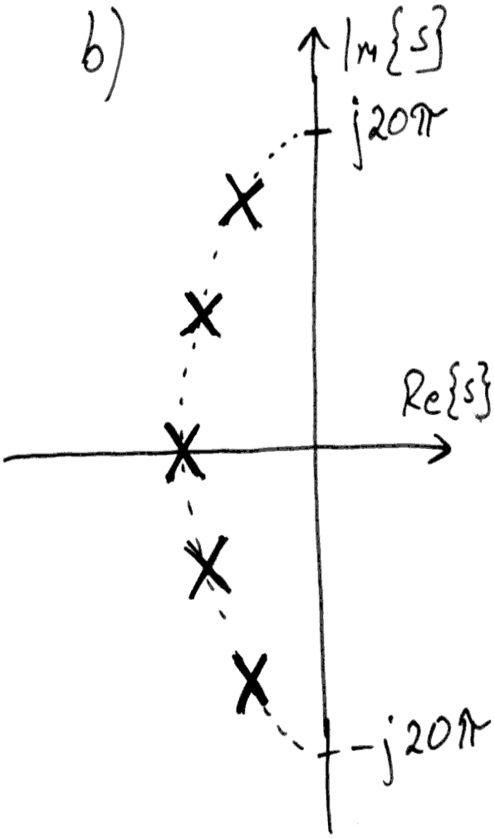
$\Rightarrow$ 

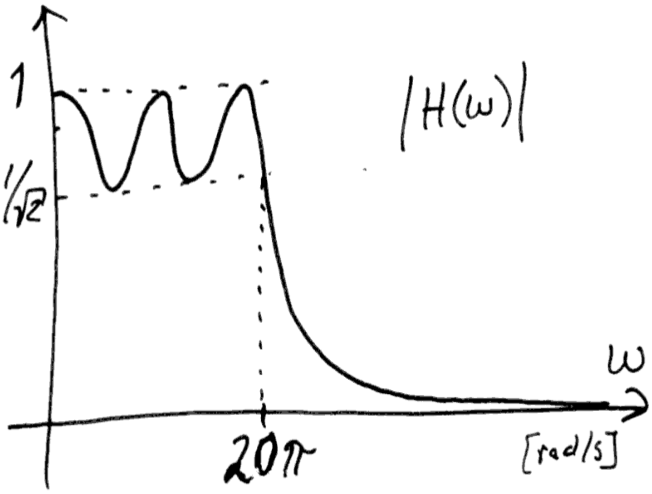
4. a)


$K=(20\pi)^2$
Im{s}
j20π
Re{s}
-j20π


|H(ω)|
1
$\frac{1}{\sqrt{2}}$
20π
ω
[rad/s]

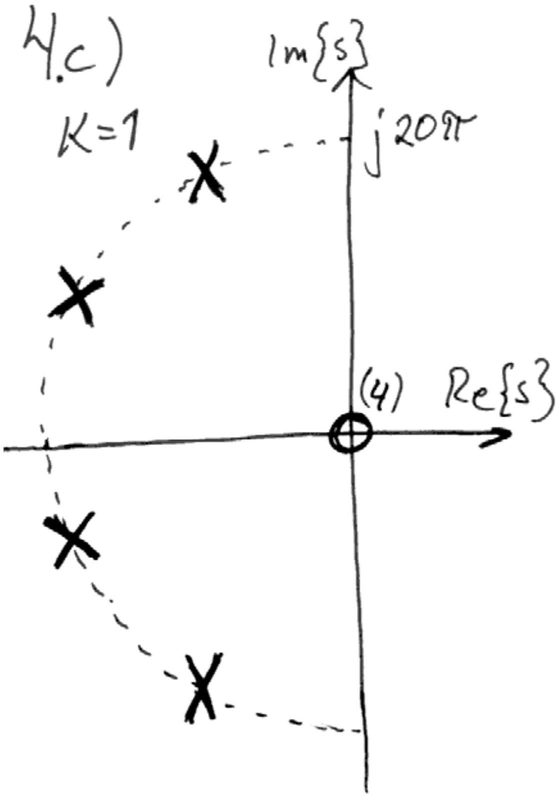
b)

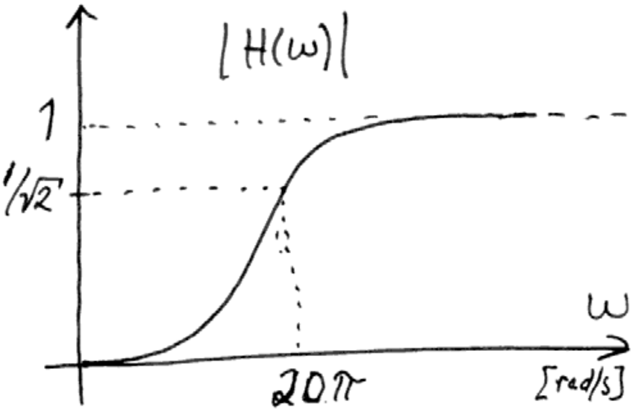

Im{s}
j20π
Re{s}
-j20π


|H(ω)|
1
$1/\sqrt{2}$
20π
ω
[rad/s]

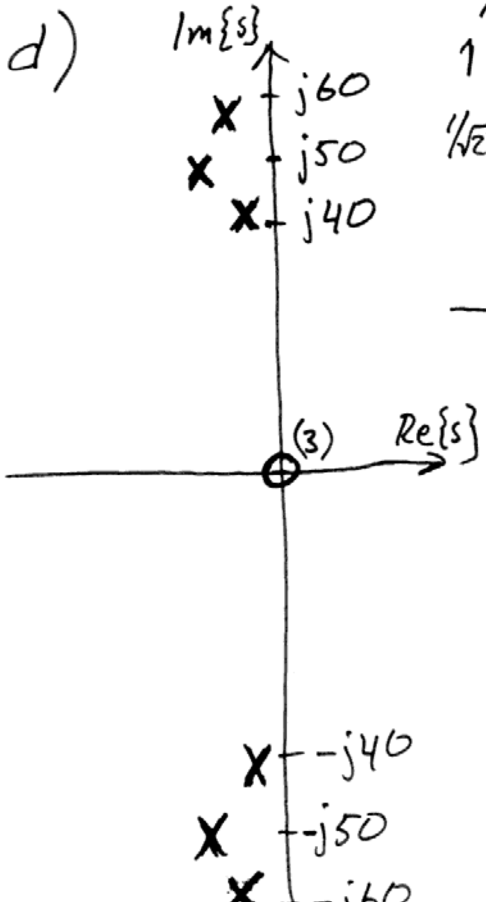
4.c)

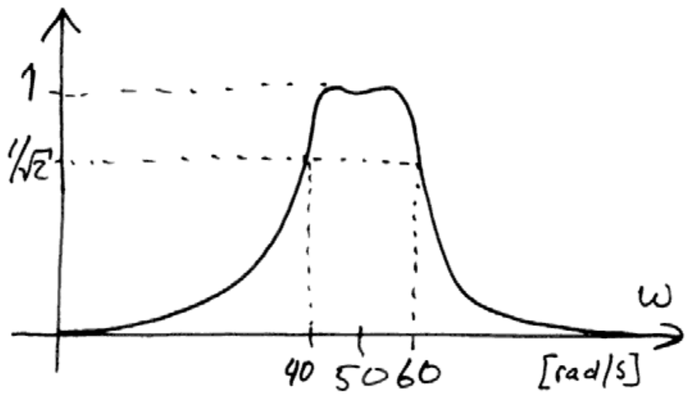
K=1


Im{s}
j20π
(4)
Re{s}


|H(ω)|
1
1/√2
ω
20π
[rad/s]

d)


Im{s}
j60
j50
j40
(3)
Re{s}
-j40
-j50
-j60


1
1/√2
ω
40
50
60
[rad/s]

5. a) $$|H_A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{2\cdot 6}}}$$

$$|H_B(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{2\cdot 3}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{2\cdot 3}}}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{2\cdot 3}}$$

$$|H_A(\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = |H_B(\Omega)| = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^{6}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega_0}} = \frac{\Omega}{(\sqrt{2}-1)^{1/6}} = \frac{500}{(\sqrt{2}-1)^{1/6}} \approx \underline{\underline{579 \text{ rad/s}}}$$

b) Dämpning "långt ute" i spärrbandet, dvs. för stora ω ($\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{12} \gg 1$, $\left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^{6} \gg 1$)

$$\Rightarrow |H_A(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{12}}} \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^{6}} = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{6}$$

$$\underline{\underline{|H_B(\omega)|}} = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{6}} \approx \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\Omega_0}\right)^{6}} = \left(\frac{\Omega_0}{\omega}\right)^{6} =$$

$$= \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}-1} \approx \underline{\underline{|H_A(\omega)| \cdot 2{,}4}}$$

$\Rightarrow$ System/Lösning A ger 2,4 gånger så hög dämpning som system/lösning B!
(Dvs. Lösning A är bättre än lösning B!)