

①

a) FALSKT: QPSK och 4-QAM har samma bandbredd, men 4-FSK har större bandbredd än de andra två

b) FALSKT: Det ska vara "+" mellan de två termerna i $y(t)$, inte "-".

c) FALSKT: Påståendet gäller för butterworth filter, inte chebyshev filter.

d) SANT: Laplace transformera differentialekvationens vänsterled & högerled (f_I eller f_I , i det senare fallet med initialtillstånd $= 0$) \Rightarrow

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^3 - 4s} = \frac{(s-2)(s-1)}{s(s^2-4)}$$

$$= \frac{s-1}{s^2-4} = \frac{s-1}{(s+2)(s-2)} = \frac{s-1}{s(s+2)}$$

Pol i origo (på $j\omega$ -axeln) (och i $s=-2$) samt kausalt system \Rightarrow konvergensomr. $\text{Re}\{s\} > 0$, dvs. enkel pol på $j\omega$ -axeln, som utgör en rand till konvergensområdet \Rightarrow Systemet är marginellt stabilt

e) SANT: $x(t) = u(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$

Tidsinvarians $\Rightarrow x(t) = u(t \pm 1)$ ger $y(t) = g(t \pm 1)$

LTI-system med för de att systemet, för

insignal $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$ genererar utsignalen $y(t) = g(t+1) - g(t-1)$

(2) a) $h(t) = e^{-t} \cos(2t) \cdot u(t) - e^{-2t} \cdot u(t)$
 Laplacetransformera (Formels. Tab. 19:25 & 19:12) \Rightarrow

$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{1}{s+2} = \frac{s-3}{((s+1)^2 + 2^2)(s+2)}$$

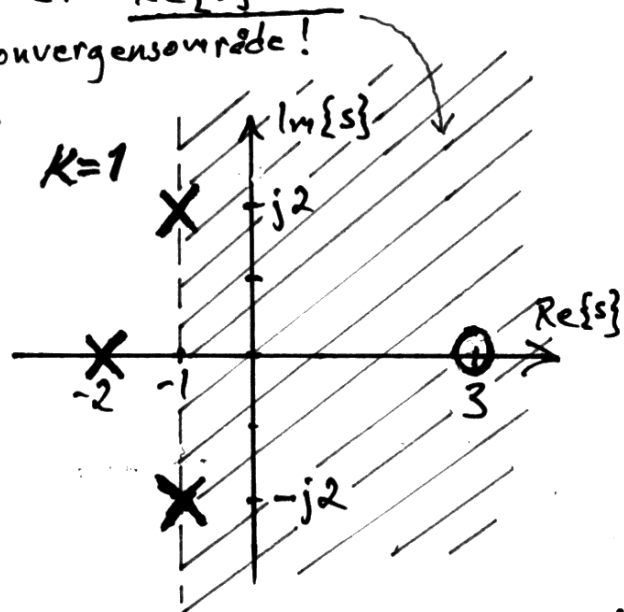
$\text{Re}\{s\} > -1$ $\text{Re}\{s\} > -2$

\Rightarrow $\begin{cases} \text{Nollställe i } s=3 \\ \text{Poler i } s=-1 \pm j2 \text{ och } s=-2 \end{cases}$

Gemensamt konvergensområde för det komplexkonjugerade polparet & enkelpolen är $\text{Re}\{s\} > -1$, vilket även är systemfunktionens konvergensområde!

Pol-nollställediagram

för $H(s)$:



b) Systemet är stabilt (för $j\omega$ -axeln ligger i konv. området för $H(s)$) \Rightarrow
$$\begin{cases} y_1(t) = |H(2)| \sin(2t + \arg H(2)) \\ y_2(t) = |H(4)| \cos(4t + \arg H(4)) \end{cases}$$

där $H(2) = H(s)|_{s=j2}$ och $H(4) = H(s)|_{s=j4}$.

$|H(s)|$ ökar då man i s -planet närmar sig en pol
 ($\lim_{s \rightarrow \text{pol}} |H(s)| = \infty$) & Antal poler $>$ antal nollst. $\Rightarrow \lim_{|s| \rightarrow \infty} |H(s)| = 0$.

Eftersom det i s -planet är närmare från polen i $s = -1 + j2$ till $s = j2$ än till $s = j4$, så gäller därför att $|H(2)| > |H(4)|$, dvs. $y_1(t)$ har högre amplitud än $y_2(t)$.

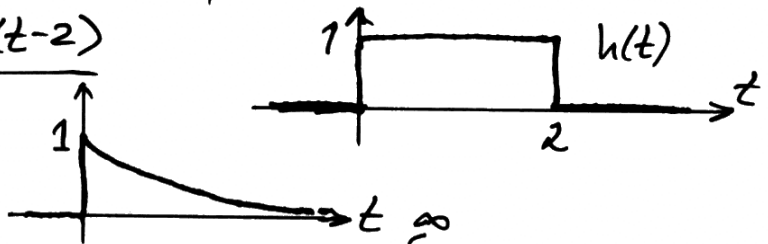
$$\textcircled{3} \text{ a) } H(\omega) = e^{-j\omega} \cdot 2 \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right) = e^{-j\omega \cdot 1} \cdot \hat{H}(\omega)$$

Formelsaml. Tab. 16:7 $\Rightarrow h(t) = \hat{h}(t-1)$

$$\hat{H}(\omega) = 2 \cdot \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \cdot 2}{2\pi}\right) \Rightarrow \text{Tab. 17:1} \Rightarrow \hat{h}(t) = u(t+1) - u(t-1)$$

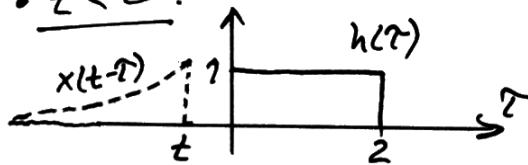
$$\Rightarrow h(t) = u(t) - u(t-2)$$

$$x(t) = e^{-t} \cdot u(t):$$



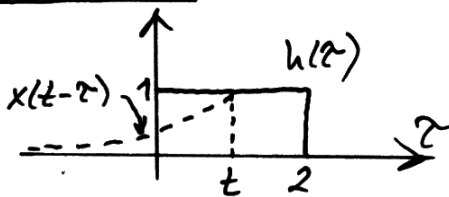
LTI-system $\Rightarrow y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau) d\tau$

• $t < 0$:



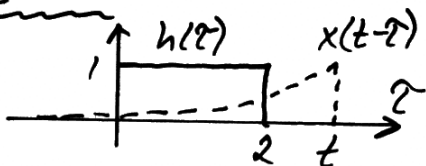
Inget funktions "överlapp" $\Rightarrow y(t) = 0$

• $0 \leq t < 2$:



$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cdot 1 d\tau = e^{-t} \left[\frac{e^{\tau}}{1} \right]_0^t \\ &= e^{-t} (e^t - e^0) = \underline{\underline{1 - e^{-t}}} \end{aligned}$$

• $t \geq 2$:



$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^2 e^{-(t-\tau)} \cdot 1 d\tau \\ &= \underline{\underline{(e^2 - 1) \cdot e^{-t}}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}} \quad y(t) = \begin{cases} 0; & t < 0 \\ 1 - e^{-t}; & 0 \leq t < 2 \\ (e^2 - 1) \cdot e^{-t}; & t \geq 2 \end{cases}$$

b) $h(t) = 0$ för $t < 0 \Rightarrow$ Systemet är kausalt!



a) Periodisk insignal $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$; Period $T=4$ sek
 $\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$ rad/s

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 3 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \frac{1}{4} \int_2^4 0 \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt$$

$k \neq 0$ ty div. med k
 $\Rightarrow \frac{3}{4} \left[\frac{e^{-jk\frac{\pi}{2}t}}{-jk\frac{\pi}{2}} \right]_0^2 = \frac{3 \cdot 2}{-jk4\pi} (e^{-jk\pi} - e^0) = \frac{3 \cdot 2}{-jk4\pi} (e^{-j\pi})^k - 1 = \frac{3}{-jk2\pi} ((-1)^k - 1)$

Alt. lösning
 $C_{kx'} = \frac{1}{T} \int x'(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^2 3\delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt + \frac{1}{4} \int_2^4 -3\delta(t-2) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt = \frac{3}{4} (e^0 - e^{-jk\pi}) = \frac{3}{4} (1 - (-1)^k)$

$C_0 = \frac{1}{4} \int_0^2 3 \cdot e^0 dt = \frac{3}{2}$
 (Erhålls även direkt från grafen)

$C_k = \frac{C_{kx'}}{jk\omega_1} = |k \neq 0| = \frac{3}{jk\frac{\pi}{2}} (1 - (-1)^k) = osv...$

b) Butterworthfiltret är ett 2TI-system \Rightarrow För per. insignal blir även utsignalen periodisk: $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$ (T -periodisk),
 där $D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)$, där $H(\omega)$ är butt.filtrets frekv.funktion

Sökt: $|D_k| = |C_k| \cdot |H(k\omega_1)|$, där $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 (\frac{\omega}{\omega_p})^{2n}}}$,
 Enligt uppgift: $\begin{cases} n=3 \\ \omega_p = \omega_{3dB} = 4 \text{ rad/s} \end{cases}$ Formelsaml. sid 24
 Formelsaml. sid 24: $\omega_p = \omega_{3dB} \cdot \epsilon^{1/n} \Rightarrow \epsilon = 1$

Dvs. $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_{3dB}})^{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{4})^6}}$

$\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad/s $\Rightarrow |H(k\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{k\pi}{8})^6}}$
 Detta samband har vi använt oss av i kursen!

Svar: $|D_k| = |C_k| \cdot |H(k\omega_1)| = \begin{cases} |C_0| \cdot 1 = \frac{3}{2}; & k=0 \\ 0; & \text{jämma } k \neq 0 \\ \frac{3}{|k|\pi \sqrt{1 + (\frac{k\pi}{8})^6}}; & \text{udda } k \end{cases}$

5 a) $x(t) = 5 + 3 \sin(2t)$

Om LTI-systemet är stabilt (dvs. om $H(\omega) \exists$), så blir utsignalen $y(t) = 5 \cdot H(0) + 3 |H(2)| \sin(2t + \arg H(2))$

där $H(0) = H(\omega)|_{\omega=0}$ och $H(2) = H(\omega)|_{\omega=2}$.

Är systemet stabilt?

$$H(s) = \frac{5}{(s+1)^2 + 2^2} \Rightarrow \text{Poler i } s = -1 \pm j2$$

Kausalt system, enligt uppgift \Rightarrow Konv.området för $H(s)$

ligger till höger om polparet, dvs. $\text{Re}\{s\} > -1$.

\Rightarrow Imaginära axeln ligger i konv.området $\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} H(\omega) \exists \\ \text{Stabilt system} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{5 - \omega^2 + j2\omega}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(0) = 0 \\ H(2) = \frac{j2}{1 + j4} = \frac{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{17} \cdot e^{j \arctan 4}} = \frac{2}{\sqrt{17}} e^{j(\frac{\pi}{2} - \arctan 4)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{6}{\sqrt{17}} \sin(2t + \frac{\pi}{2} - \arctan 4)$$

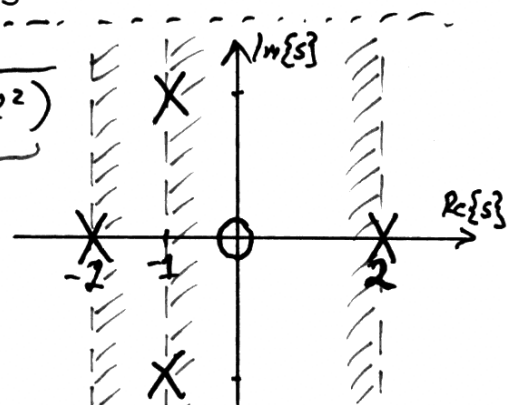
b) i) $Y_2(s) = X_2(s) \cdot H(s)$, där $X_2(s) = \mathcal{L}\{e^{-2|t|}\} =$
 $= \text{Formels. Tab 19:14} = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - s^2}; -2 < \text{Re}\{s\} < 2$

Dvs: $Y_2(s) = \frac{-4s}{(s^2 - 2^2)((s+1)^2 + 2^2)}$

$-2 < \text{Re}\{s\} < 2$ $\text{Re}\{s\} > -1$

\Rightarrow Konvergensområdet för

$Y_2(s)$ är $\underline{-1 < \text{Re}\{s\} < 2}$



ii) Imaginära axeln ligger i konv.området för $Y_2(s)$

$$\Rightarrow Y_2(\omega) = Y_2(s)|_{s=j\omega} = \frac{-4j\omega}{(-\omega^2 + 4)(5 - \omega^2 + j2\omega)}$$

$$\Rightarrow |Y_2(\omega)| = \frac{4 \cdot |\omega|}{(\omega^2 + 4) \sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$