

1.

Deluppgift:	a)	b)	c)	d)	e)
Sant (S) /Falskt (F):	F	S	F	S	F

Kommentarer:

a): Systemet är linjärt, men *inte* kausalt. För $t = t_0 > 0$ så beror $y(t_0)$ på integralen av $x(t)$ bland annat för $t_0 < t < 2t_0$, dvs. utsignalen beror då på insignalens framtida värden, vilket innebär att systemet är icke-kausalt.

$$b): H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \Rightarrow |H(0)| = 0 \text{ och } \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{jL}{\frac{R}{\omega} + jL} \right| = \left| \frac{jL}{0 + jL} \right| = 1$$

c) Det är *impulssvaret* som är absolutintegrerbart – vilket gäller för alla *stabila* LTI-system.
 e) Polerna måste även ligga i vänster halvplan!

2.

a) Laplacetransformera (enkelsidig transform, där systemet betraktas som energifritt, dvs. alla initialvillkor är noll) differentialekvationen $\Rightarrow Y(s)(s^2 + 4s + 13) = X(s)(4s^2 + 11s + 26)$,

vilket ger systemfunktionen $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4s^2 + 11s + 26}{s^2 + 4s + 13}$. Systemet är kausalt, vilket innebär att

konvergensområdet ligger till höger om de poler hos systemfunktionen som finns längst till höger i s -planet. Polerna är placerade där $s^2 + 4s + 13 = 0$, dvs. vid $s = -2 \pm 3j$, vilket innebär att systemfunktionens konvergensområde är $\text{Re}\{s\} > -2$.

b) $x(t) = u(t) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{s}, \text{Re}\{s\} > 0 \Rightarrow$ utsignalens transform blir då

$$\begin{aligned} \underline{Y(s)} &= X(s) \cdot H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{4s^2 + 11s + 26}{s^2 + 4s + 13} = \text{Part.bråks-} \\ &\quad \text{uppdelning} = \frac{2}{s} + \frac{2s+3}{s^2+4s+13} = \frac{2}{s} + \frac{2s+3}{(s+2)^2+3^2} \\ &= \text{Omforma till samband} \\ &\quad \text{vars inverstransform} \\ &\quad \text{finns i formelsamlingen} = 2 \cdot \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(s+2)^2+3^2} \end{aligned}$$

Den tillagda polen i origo medför att konvergensområdet för $Y(s)$ är $\text{Re}\{s\} > 0$ (där

konvergensområdet för respektive delterm i $Y(s)$ är $\text{Re}\{s\} > 0$, $\text{Re}\{s\} > -2$ resp. $\text{Re}\{s\} > -2$).

Inverstransformering m.h.a. transformparen i formelsamlingens tabell 19:3, 19:25 resp. 19:23 ger då följande utsignal (som då är stegsvaret):

$$\begin{aligned} \underline{y(t) = g(t)} &= 2u(t) + 2e^{-2t} \cos(3t)u(t) - \frac{1}{3}e^{-2t} \sin(3t)u(t) \\ &= 2 \left(1 + e^{-2t} \left(\cos(3t) - \frac{1}{6} \sin(3t) \right) \right) u(t) \end{aligned}$$

3.

- a) $|C_k|$ erhålls direkt från C_k (här är grundvinkelfrekvensen $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5}$ rad/s):

$$\begin{aligned} \underline{C}_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{5} \int_0^5 e^{0.4t} e^{-jk\frac{2\pi}{5}t} dt = \frac{1}{5} \int_0^5 e^{0.4(1-jk\pi)t} dt = \frac{1}{5} \left[\frac{e^{0.4(1-jk\pi)t}}{0.4(1-jk\pi)} \right]_0^5 \\ &= \frac{e^{0.4(1-jk\pi)5} - e^0}{2(1-jk\pi)} = \frac{e^{2-2jk\pi} - 1}{2(1-jk\pi)} = \frac{e^2 - 1}{2(1-jk\pi)}, \end{aligned}$$

vilket ger att amplitudspektrumet är $|C_k| = \frac{e^2 - 1}{2\sqrt{1+k^2\pi^2}}$.

- b) Det allmänna sambandet $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$ gäller för stabilt system med frekvensfunktion $H(\omega)$, där $X(\omega)$ och $Y(\omega)$ är insignalens och utsignalens respektive fouriertransformer.

För periodisk insignal och utsignal, med komplexa fourierseriekoefficienter enligt uppgift, gäller

motsvarande samband $\underline{D}_k = C_k \cdot H(k\omega_1) = C_k \cdot H\left(\frac{k2\pi}{5}\right)$.

Stabilt system $\Rightarrow H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{s}{s+1}|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega+1}$

$$\Rightarrow \underline{H}(k\omega_1) = \frac{jk\frac{2\pi}{5}}{jk\frac{2\pi}{5}+1} = \frac{jk2\pi}{5+jk2\pi}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underline{|D_k|} &= \left| C_k \cdot H\left(\frac{k2\pi}{5}\right) \right| = / \text{Uppg. a)}/ = \left| \frac{e^2 - 1}{2(1-jk\pi)} \right| \cdot \left| \frac{jk2\pi}{5+jk2\pi} \right| \\ &= \frac{e^2 - 1}{2\sqrt{1+(k\pi)^2}} \cdot \frac{|k|2\pi}{\sqrt{5^2+(k2\pi)^2}} = \frac{|k|\pi(e^2 - 1)}{\sqrt{(1+k^2\pi^2)(25+4k^2\pi^2)}} \end{aligned}$$

4.

- a) För en stationär cosinus $x(t) = 4\cos(2t)$ som insignal till ett energifritt LTI-system så erhålls, om systemet är *stabilt*, utsignalen $y(t) = 4|H(2)|\cos(2t + \arg H(2))$.

I det här fallet är systemet stabilt, ty impulssvaret är absolutintegrerbart:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |2e^{-3t}u(t)| dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-3t} dt = 2 \left[\frac{e^{-3t}}{-3} \right]_0^{\infty} = \frac{2}{3} < \infty.$$

(Motiveringen att systemet är stabilt och att det gäller tack vare att impulssvaret är absolutintegrerbart måste anges. Det sistnämnda är dock i det här fallet uppenbart, så det behöver inte visas analytiskt, som visas ovan.)

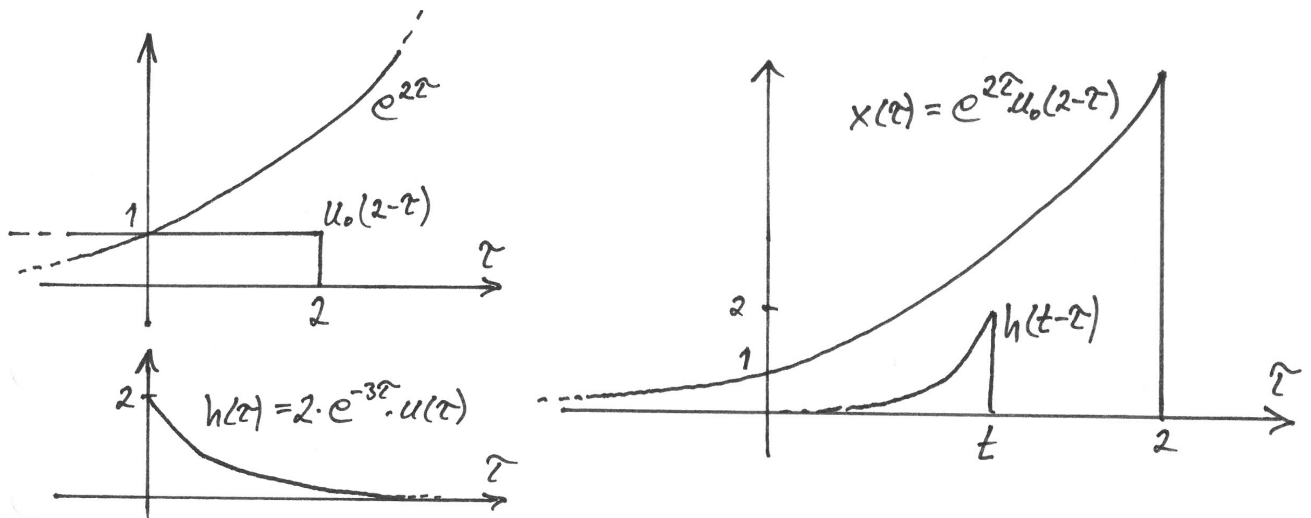
Vi får därför frekvensfunktionen $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = / \text{Formelsamlingen, Tabell 17:2} / = \frac{2}{3+j\omega}$

$$\Rightarrow H(2) = \frac{2}{3+j2} = \frac{2}{\sqrt{3^2+2^2}} \cdot \frac{e^{-j\arctan(2/3)}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot e^{-j\arctan(2/3)},$$

dvs. $|H(2)| = \frac{2}{\sqrt{13}}$ och $\arg H(2) = -\arctan\frac{2}{3} \Rightarrow y(t) = \frac{8}{\sqrt{13}} \cos\left(2t - \arctan\frac{2}{3}\right)$

b) Både insignalen och impulssvaret är absolutintegrerbara \Rightarrow utsignalen kan beräknas m.h.a. faltning:

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau, \text{ där } x(\tau) \text{ och } h(t-\tau) \text{ visas i den högra figuren nedan.}$$



Tag nu hjälp av den högra figuren för att beräkna faltningsintegralen $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$ för olika värden på förskjutningskonstanten t .

$$\begin{cases} t \leq 2 & \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t e^{2\tau} \cdot 2e^{-3(t-\tau)} d\tau = 2e^{-3t} \int_{-\infty}^t e^{5\tau} d\tau = \frac{2}{5}e^{2t} \\ t > 2 & \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = 2e^{-3t} \int_{-\infty}^2 e^{5\tau} d\tau = \frac{2}{5}e^{-3t+10} \end{cases}$$

Utsignalen blir alltså $y(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}e^{2t}; & t \leq 2 \\ \frac{2}{5}e^{-3t+10}; & t > 2 \end{cases}$

Anm: Alternativt kan man spegla och skifta insignalen istället för impulssvaret, dvs. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$. Då erhålls andra integrationsgränser, men samma svar!

5.

a) Signalen $f(t) = 2\text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) = 2(u(t+1) - u(t-1))$ är en fyrkantspuls med höjden 2 mellan $t = -1$ och $t = 1$. Dess fouriertransform är, enligt formelsamlingens Tabell 17:1,

$$F(\omega) = 2 \cdot 2 \text{sinc}\left(\frac{\omega \cdot 2}{2\pi}\right) = 4 \text{sinc}\left(\frac{\omega}{\pi}\right), \text{ dvs. } F(\omega) = 4 \frac{\sin(\omega)}{\omega}, \text{ som är lika med noll vid multiplar}$$

av $\omega = \pi$ (eftersom $\sin(k\pi) = 0$ för $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$). Notera att $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega)}{\omega} = 1$

Anm: Fouriertransformen av en fyrkantspuls, dvs. en sinc, är så ofta förekommande i kursen, så du förväntas att kunna rita upp dess principutseende direkt, utgående från den givna fyrkantspulsen i tidsdomänen. Speciellt viktigt är var sinc:en har sina nollgenomgångar.

Motivering till spektrumen nedan måste ges:

- Det givna lågpasfilterets frekvensfunktion är $H(\omega) = u(t + \pi) - u(t - \pi)$
(Amplitudnormerat \Rightarrow filterets max-amplitud är lika med 1)

$$\Rightarrow \underline{M(\omega) = F(\omega)H(\omega) = F(\omega)(u(t + \pi) - u(t - \pi))}$$

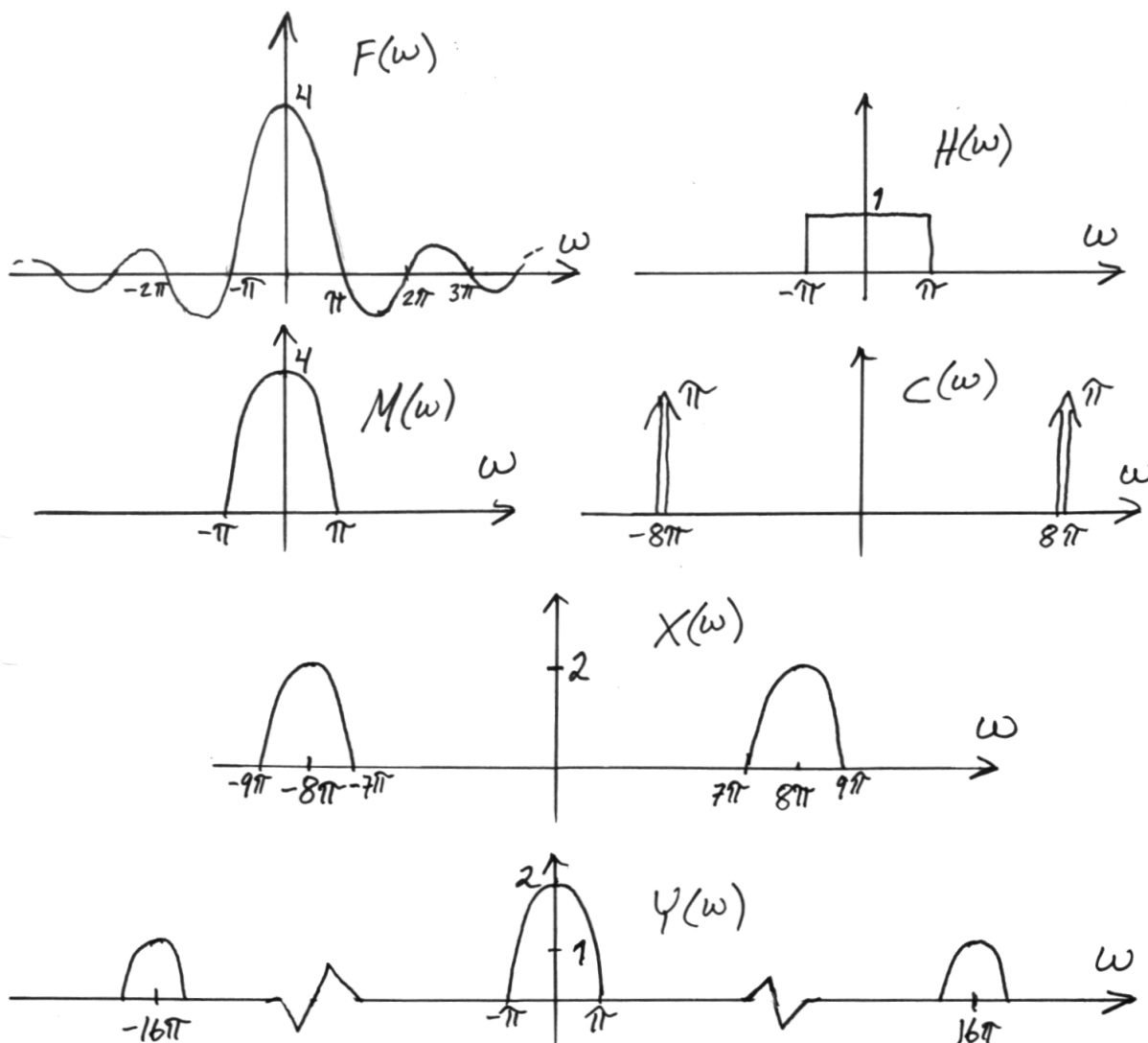
- $x(t) = m(t)c(t) \Leftrightarrow \underline{X(\omega) = \frac{1}{2\pi}(M * C)(\omega)}$, där $\underline{C(\omega) = \pi(\delta(\omega + 8\pi) + \delta(\omega - 8\pi))}$ (Tab. 16:14)
(Tab. 17:16)

- Faltning av $M(\omega)$ med två diracer, en vid $\omega = -8\pi$ rad/s och en vid $\omega = 8\pi$ rad/s, innebär att $M(\omega)$ skiftas till dessa vinkelfrekvenser och amplituskalas med faktorn $\frac{1}{2\pi} \cdot \pi = \frac{1}{2}$, dvs.

$$\underline{X(\omega) = \frac{1}{2}M(\omega + 8\pi) + \frac{1}{2}M(\omega - 8\pi)}$$

- Vid demoduleringen sker motsvarande skiftning och amplitudskalning som vid moduleringen:

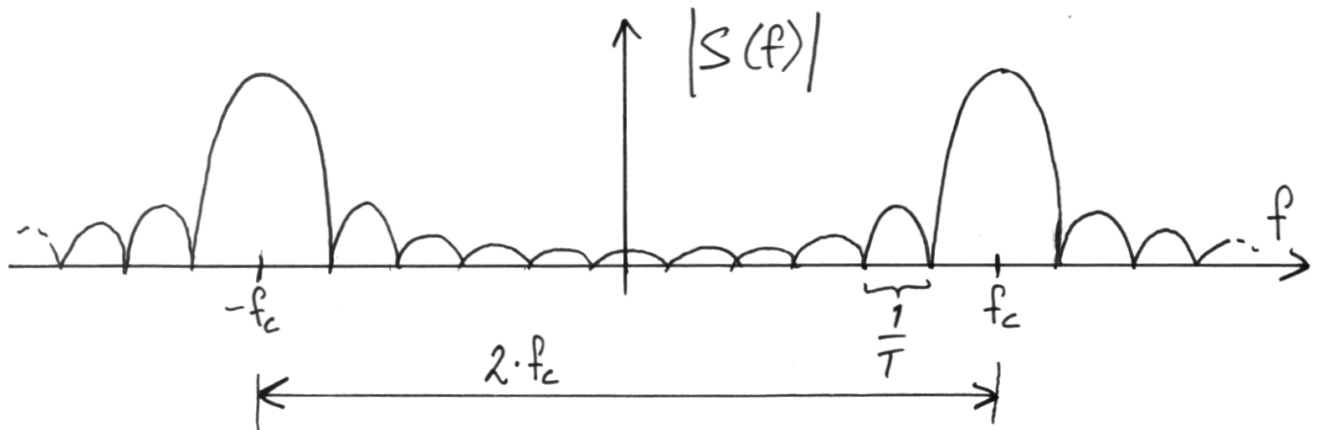
$$\begin{aligned} y(t) = x(t)c(t) \Leftrightarrow \underline{Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * C)(\omega) = \frac{1}{2}X(\omega + 8\pi) + \frac{1}{2}X(\omega - 8\pi)} \\ = \underline{\underline{\frac{1}{4}M(\omega + 16\pi) + \frac{1}{2}M(\omega) + \frac{1}{4}M(\omega - 16\pi)}}} \end{aligned}$$



- b) De två BPSK-signalpulsformerna är $s_0(t) = A \cdot \cos(\omega_c t + \pi)(u(t) - u(t - T))$ (representation av binär nolla) och $s_1(t) = A \cdot \cos(\omega_c t)(u(t) - u(t - T))$ (representation av binär etta), där $\omega_c = 2\pi f_c$ – se bilagan om modulationsformer. Båda dessa pulsformer har samma amplitudspektrum $|S(f)|$, som består av absolutbeloppet av summan av två sinc:ar vid $f = -f_c$ respektive $f = f_c$.

Huvudlobens bredd är $2 \cdot \frac{1}{T}$ Hz och bredden hos sinc:arnas sidolober är $\frac{1}{T}$ Hz.

Amplitudspektrumet $|S(f)|$ ser följaktligen ut som figuren nedan, där $\frac{1}{T} = 2$ sek och $f_c = 11$ Hz:



Informationen om vilken av de två pulsformerna $s_0(t)$ och $s_1(t)$ som sänts hittas i $\arg S(f_c)$.

För att säkerställa att $\arg S(f_c)$ bara beror på sinc:ens huvudlob vid $f = f_c$ och inte ändras av någon sidolob hos sinc:enen som är centrerad vid $f = -f_c$, så måste sinc:en vid $f = -f_c$ vara noll vid $f = f_c$. Konsekvensen blir alltså att det måste vara exakt ett helt antal sidolober mellan $f = -f_c$ och $f = f_c$, dvs. $2f_c = k \cdot \frac{1}{T}$, där k är ett heltal. Vi får således $2f_c T = k = \text{ett heltal}$.

Med det frekvensvalet blir $\arg S(f_c)$ lika med π om $s_0(t)$ sänds och lika med 0 om $s_1(t)$ sänds.

I figuren ovan, där $\frac{1}{T} = 2$ sek och $f_c = 11$ Hz, är det $2f_c = 22$ Hz mellan sinc:arnas mitt, vilket motsvarar bredden hos 11 sidolober.