(1) a) FALSKT : Spänningsdelning i motsvarande komplexschema ger

$$H(\omega) = \frac{V_R(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{R}{R + j\omega L} \Rightarrow$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega \frac{L}{R}\right)^2}} \rightarrow \begin{cases} 1 \text{ då } \omega \to 0 \\ 0 \text{ då } \omega \to \infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Det är ett LP-filter.

b) FALSKT : $$w(t) = \frac{d x(-t+1)}{dt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{d e^{jk\omega_1(-t+1)}}{dt}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_1} (-jk\omega_1) e^{-jk\omega_1 t}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\omega_1} (jk\omega_1) e^{jk\omega_1 t}$$

Dvs. $D_k = c_{-k} e^{-jk\omega_1} \cdot jk\omega_1 = \underbrace{c_k^*}_{x(t) \in \mathbb{R}} e^{-jk\omega_1} \cdot jk\omega_1$

c) FALSKT : Vid kaskadkoppling får man $h(t) = (h_1 * h_2)(t)$

d) FALSKT : Påståendet gäller för frekvensmodulerade signaler.

e) SANT : Eftersom chebyshevfilter har en brantare övergång mellan passband och spärrband, jämfört med motsvarande butterworthfilter, så blir dämpningen i spärrbandet högre.

2 a) Insignal $x(t) = 4\cos(\omega_0 t)$, där $\omega_0 = 2$ rad/s

(dvs. en stationär cosinus)

Om systemet är stabilt $\Rightarrow$ $\underline{y(t) = 4\cdot|H(\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))}$

Test: $$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\,dt = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt}_{=1} + \underbrace{\int_{0}^{\infty}2e^{-3t}\,dt}_{=\frac{2}{3}<\infty} < \infty \Rightarrow \text{Stabilt system; OK}$$

Behöver ej beräknas, bara konstateras

$$\Rightarrow H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} \overset{\substack{\text{Formels.}\\ \text{Tab. 17:10}}}{\underset{\&\ 17:2}{=}} 1 + \frac{2}{3+j\omega} = \frac{5+j\omega}{3+j\omega} =$$

$$= \frac{\sqrt{5^2+\omega^2}\cdot e^{j\arctan\frac{\omega}{5}}}{\sqrt{3^2+\omega^2}\cdot e^{j\arctan\frac{\omega}{3}}} = \sqrt{\frac{5^2+\omega^2}{3^2+\omega^2}}\cdot e^{j\left(\arctan\frac{\omega}{5} - \arctan\frac{\omega}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |H(2)| = \sqrt{\dfrac{25+2^2}{9+2^2}} = \sqrt{\dfrac{29}{13}} \\ \arg H(2) = \arctan\frac{2}{5} - \arctan\frac{2}{3} \end{cases}$$

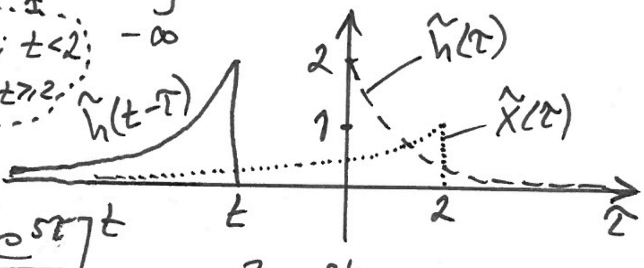
$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \underbrace{4\sqrt{\frac{29}{13}}}_{\approx 5{,}97}\cos\Big(2t + \underbrace{\arctan\frac{2}{5} - \arctan\frac{2}{3}}_{\approx -0{,}21}\Big)}}$$

---

b) $y(t) = (x * h)(t) = \Big/\ h(t) = \delta(t) + \tilde{h}(t)$, där $\tilde{h}(t) = 2e^{-3t}u(t)\ \Big/$

$$= (x*\delta)(t) + (x*\tilde{h})(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\tilde{h}(t-\tau)\,d\tau = \underline{\underline{x(t) + \tilde{y}(t)}}$$

$$\tilde{x}(\tau) = \begin{cases} e^{2\tau}; & \tau<2 \\ 0; & \tau\geq 2 \end{cases}$$



$\underline{t<2:}$ $$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}\cdot 2e^{-3(t-\tau)}\,d\tau$$

$$= 2e^{-3t}\int_{-\infty}^{t} e^{5\tau}\,d\tau = 2e^{-3t}\left[\frac{e^{5\tau}}{5}\right]_{-\infty}^{t} = \frac{2}{5}e^{2t}$$

$t \geq 2$: $$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{2} e^{2\tau}\cdot 2e^{-3(t-\tau)}\,d\tau = 2e^{-3t}\left[\frac{e^{5\tau}}{5}\right]_{-\infty}^{2} = \frac{2}{5}e^{-3t+10}$$

$\underline{\underline{\text{Svar:}}}$ $$y(t) = x(t) + \tilde{y}(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}e^{2t}; & t<2 \\ \frac{2}{5}e^{-3t+10}; & t\geq 2 \end{cases}$$

$$= \frac{7}{5}e^{2t}u_0(2-t) + \frac{2}{5}e^{-3t+10}\cdot u(t-2)$$

3 a) $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{K}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{K\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4\frac{dx(t)}{dt}+4Kx(t)\right\}$

($\mathcal{L}=\mathcal{L}_{II}$ eller $\mathcal{L}_I$ med initialtillst. $=0$ ger samma $\mathcal{L}$-resultat)

$$\xRightarrow[\text{T.d.18:8}]{\text{Formels.}} \left(\frac{1}{K}s^2+2s+K\right)Y(s)=\left(Ks^2+4s+4K\right)X(s)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H(s)}}=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Ks^2+4s+4K}{\frac{1}{K}s^2+2s+K}=\underline{\underline{K^2\cdot\frac{s^2+\frac{4}{K}s+4}{(s+K)^2}}}$$

dvs. systemfunktionen har en dubbelpol i $s=-K$ ($K\in\mathbb{R}$ enl. uppg.)

Kausalt system $\Rightarrow$ konv.området $\mathrm{Re}\{s\}>-K$

Stabilt system $\Leftrightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konv.omr. för $H(s)$

$\Rightarrow -K<0$, dvs. $\underline{\underline{K>0}}$, dvs. dubbelpolen ligger i vänster halvplan. (Antal poler $\geq$ antal nollst. är också uppfyllt, vilket är ett nödvändigt bivillkor)

---

b) $K=1$ (dvs. systemet är stabilt ($K>0$))

$$\Rightarrow H(s)=\frac{s^2+4s+4}{(s+1)^2}=\frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}$$

Stationär cos som insignal, $x(t)=4\cos(5t)$, till ett stabilt LTI-system med frekvensfunktion $H(\omega)$ $\Rightarrow$

$$y(t)=4|H(5)|\cos(5t+\arg H(5))$$

$$\text{där } H(\omega)\underset{\text{ty stabilt}}{=}H(s)\Big|_{s=j\omega}=\frac{(j\omega+2)^2}{(j\omega+1)^2}=\underbrace{\frac{2^2+\omega^2}{1+\omega^2}}_{|H(\omega)|}e^{j\overbrace{2\left(\arctan\frac{\omega}{2}-\arctan\omega\right)}^{\arg H(\omega)}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|H(5)|=\frac{4+5^2}{1+5^2}=\frac{29}{26}\\ \arg H(5)=2\left(\arctan\frac{5}{2}-\arctan 5\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t)=\frac{58}{13}\cos\left(5t+2\left(\arctan\frac{5}{2}-\arctan 5\right)\right)}}$$

$$\approx \underline{\underline{4{,}46\cos(5t-0{,}37)}}$$

c) Stabilt (underförstått) LP-filter med frekvensfunktion

$$H(\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \Big/\overset{H(s)\text{ från}}{\text{uppg. a}}\Big/ = K^2 \cdot \frac{-\omega^2 + \frac{4}{K}\cdot j\omega + 4}{(j\omega + K)^2}$$

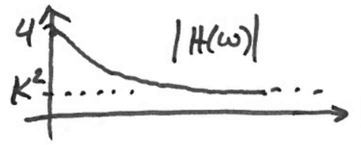
$$\Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega\to\infty} \left| K^2 \frac{\frac{4}{\omega^2} - 1 + j\frac{4/K}{\omega}}{\left(j + \frac{K}{\omega}\right)^2} \right|$$

$$= K^2 \left| \frac{0 - 1 + j0}{(j+0)^2} \right| = K^2 > 0 \quad \text{för stabilt system}$$

Svar: Nej, det är inte möjligt att erhålla ett (stabilt) LP-filter med $\lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)| = 0$

Anm: Om antal poler = antal nollst. hos en systemfkn $H(s)$

$\lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)|$ = nivåkonstanten för $H(s)$ ($= K^2$ här)

(Här: 

)

4) a) $y(t) = x(t) \cdot \sin(20\pi t)$ (*)

i) För insignal $x_i(t)$ erhålls utsignalen $y_i(t) = x_i(t) \cdot \sin(20\pi t)$

Låt $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$

$$\Rightarrow \underline{y(t)} = /*/ = (a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) \cdot \sin(20\pi t)$$

$$= a \cdot \underbrace{x_1(t)\sin(20\pi t)}_{=y_1(t)} + b \cdot \underbrace{x_2(t)\sin(20\pi t)}_{=y_2(t)} = \underline{a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)}$$

$\Rightarrow$ Systemet är <u>linjärt</u>

ii) Låt $\tilde{x}(t) = x(t-\tau)$ vara insignal till systemet

$$\Rightarrow \text{Utsignal } \tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \cdot \sin(20\pi t) = x(t-\tau)\sin(20\pi t)$$

$$\neq x(t-\tau)\sin(20\pi(t-\tau)) = y(t-\tau) \quad \forall t, \tau$$

$\Rightarrow$ Systemet är <u>inte</u> tidsinvariant (det är tidsvariabelt)

iii) Ett system är stabilt om <u>alla</u> begränsade insignaler, dvs. $|x(t)| \leq M < \infty$, ger en begränsad utsignal, dvs. $|y(t)| \leq N < \infty$.

Här: $|y(t)| = |x(t)\sin(20\pi t)| \leq |x(t)|$,

dvs. om $x(t)$ är begränsad så är även $y(t)$ begränsad

$\Rightarrow$ Systemet är <u>stabilt</u>

---

b) $$x(t) = \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} = 2 \cdot \frac{\sin(2t \cdot \pi)}{2t \cdot \pi} = 2 \cdot \mathrm{sinc}(2t)$$

$$\underline{Y(\omega)} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \sin(20\pi t)\} = /\text{formels. Tab. 16:14}/$$

$$= \frac{1}{2\pi} \underbrace{\mathcal{F}\{x(t)\}}_{=X(\omega)} * \underbrace{\mathcal{F}\{\sin(20\pi t)\}}_{=j\pi(\delta(\omega+20\pi) - \delta(\omega-20\pi))}$$

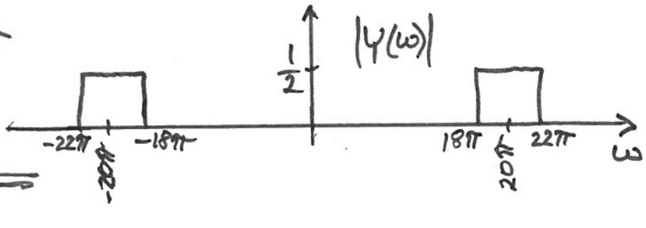
(Formels. Tab 17:15)

$$= \frac{j}{2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \Omega)\left(\delta(\Omega + 20\pi) - \delta(\Omega - 20\pi)\right) d\Omega$$

$$= \underline{\frac{j}{2}\left(X(\omega+20\pi) - X(\omega - 20\pi)\right)}.$$

Formels. Tab. 17:8 $\Rightarrow \underline{X(\omega) = \begin{cases} 1; & |\omega| \leq 2\pi \\ 0; & |\omega| > 2\pi \end{cases}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{|Y(\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{2}; & 18\pi \leq |\omega| \leq 22\pi \\ 0; & \text{f.ö.} \end{cases}}}$$



5

Allmänt gäller bland annat följande egenskaper:

i) Om $|H(f)|$ har ett lokalt max vid f_0, så har $H(s)$ pol(er) nära $s = j2\pi f_0$.

ii) Om $|H(f_0)| = 0$, så har $H(s)$ nollställe(n) vid $s = j2\pi f_0$.

iii) Om $\lim_{f\to\infty} |H(f)| = 0$ så har $H(s)$ fler poler än nollställen.

iv) Om $0 < \lim_{f\to\infty} |H(f)| < \infty$ så har $H(s)$ lika många poler som nollställen.

v) $\lim_{f\to\infty} \arg H(f) = (N - P)\cdot 90^{\circ}$, där N = antal nollställen och P = antal poler hos $H(s)$.

Följande kombinationer gäller (notera att det finns fler/andra alternativa motiveringar):

- **a – 5**. Motivering: $|H(f)| = 1$ för alla *f*, dvs. det är ett allpassfilter, vilket för $H(s)$ innebär att varje pol måste ha ett motsvarande nollställe speglad i imaginära axeln
- **b – 4**. Motivering: $|H(0)| = 0$ och $\lim_{f\to\infty} |H(f)| = 1$, vilket för $H(s)$innebär nollställe(n) i origo respektive lika många poler som nollställen.
- **c – 3**. Motivering: Exempelvis gäller att
  (1) $|H(f)|_{\max}$ vid $f = 0$,
  (2) $\lim_{f\to\infty} |H(f)| = 0$ och
  (3) $\lim_{f\to\infty} \arg H(f) = -90^{\circ}$,
  vilket för $H(s)$ innebär att
  (1) det bör/kan finnas en negativ reellvärd pol,
  (2) antal poler är fler än antal nollställen
  respektive
  (3) antalet poler är antalet nollställen + 1.
- **d – 6**. Motivering: $|H(0)| = 0$, $|H(f)|_{\max}$ nära $f = 0.2$ och $\lim_{f\to\infty} |H(f)| = 0$, vilket för $H(s)$ innebär nollställe i origo, pol(er) nära $s = j2\pi\cdot 0.2 = j1.2$ respektive fler poler än nollställen.
- **e – 2**. Motivering: $|H(f)|_{\max}$ nära $f = 0.2$ och $\lim_{f\to\infty} \arg H(f) = -180^{\circ}$, vilket för $H(s)$ innebär pol(er) nära $s = j2\pi\cdot 0.2 = j1.2$ respektive att antalet poler är två fler än antalet nollställen.
- **f – 1**. Motivering: $|H(\approx 0.16)| = 0$ och $\lim_{f\to\infty} |H(f)| = 1$, vilket för $H(s)$ innebär nollställe(n) vid $s = j2\pi\cdot 0.16 \approx j$ respektive lika många nollställen som poler.