① a) FALSKT: $\mathcal{L}_{II}\{\text{diff.ekv.}\} \Rightarrow (s^2+4s+3)Y_{II}(s) = X_{II}(s)$

$\Rightarrow H_{II}(s) = \dfrac{Y_{II}(s)}{X_{II}(s)} = \dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$. Icke-kausalt system $\Rightarrow$

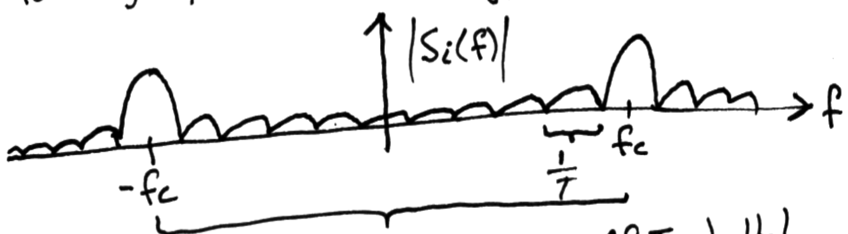
Konvergensområdet för $H_{II}(s)$ är $\mathrm{Re}\{s\} < -3$ eller $-3 < \mathrm{Re}\{s\} < -1$

I båda fallen ingår inte imag. axeln i konv.området $\Rightarrow$ Instabilt system

b) FALSKT: Ett systems egenskap (kausalitet i det här fallet) beror inte på dess insignal

c) FALSK: Ett butterworthfilter av ordning n har sina n st. poler hos systemfunktionen jämnt fördelade längs en cirkelbåge i vänsterhalvplan, med vinkelavståndet $\frac{\pi}{n}$ rad mellan intilliggande poler. Detta kan ej erhållas genom kaskadkoppling av två andra butterworth-filter av lägre ordning.

d) SANT: se t.ex. tidigare tentalösningar där spektrum för signalpulser av samma typ ritats:



$2f_c = \frac{1}{T} \cdot \text{heltal} \Rightarrow 2f_cT = \text{heltal}$

e) SANT: $C_{-k} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x(t)\, e^{jk\omega_0 t}\, dt = \dfrac{1}{T}\int_T \left(x^*(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\right)^* dt =$

$= \left(\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_T x^*(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt\right)^* = \Big/$ Om $x(t)$ är reellvärd $\Rightarrow x^*(t) = x(t)$ $\Big/ = (C_k)^*$

(2) $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, där $x_1(t) = 2 + 3\cos(4t)$ & $x_2(t) = u(t+1) - u(t-1)$

Linjärt system $\Rightarrow$ $\underline{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$

där $y_1(t) = 2 \cdot H(0) + 3 \cdot |H(4)| \cos(4t + \arg H(4))$ **(1)**

och $y_2(t) = (x_2 * h)(t)$ **(2)** $\quad \left[\text{där } h(t) = 2 \cdot e^{-3t} \cdot u(t)\right]$

(1) förutsätter att systemet är stabilt (eller åtminstone marginellt stabilt) — vilket det är, p.g.a. att $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ [Behöver ej visas/beräknas men stabilitet måste motiveras!]

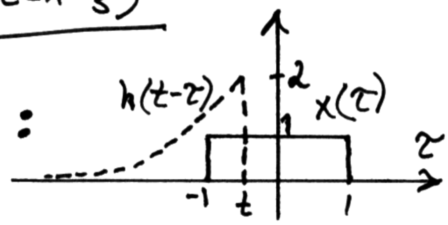
$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = /\text{Formels. Tab. 17.2}/ = \frac{2}{3 + j\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{H(0) = \frac{2}{3}}, \quad H(4) = \frac{2}{3 + j4} = \frac{2}{\sqrt{3^2 + 4^2}\, e^{j \arctan \frac{4}{3}}} = |H(4)|\, e^{j \arg H(4)}$$

$$\Rightarrow \underline{|H(4)| = \frac{2}{5}}, \quad \underline{\arg H(4) = -\arctan \frac{4}{3}}$$

Dvs. $\underline{y_1(t) = \frac{4}{3} + \frac{6}{5} \cos\left(4t - \arctan \frac{4}{3}\right)}$

(2): $y_2(t) = (x_2 * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$:



Figuren: $\underline{t < -1} \Rightarrow \underline{y_2(t) = 0}$

$\underline{-1 \le t < 1} \Rightarrow \underline{y_2(t)} = \int_{-1}^{t} 1 \cdot 2 \cdot e^{-3(t-\tau)}\, d\tau = 2 \cdot e^{-3t} \left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_{-1}^{t}$

$$= \underline{\frac{2}{3}\left(1 - e^{-3(t+1)}\right)}$$

$\underline{t \ge 1} \Rightarrow \underline{y_2(t)} = 2 \cdot e^{-3t} \left[\frac{e^{3\tau}}{3}\right]_{-1}^{1} = \underline{\frac{2}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right) e^{-3t}}$

Den totala utsignalen är alltså $\underline{y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$

där $\underline{\underline{y_1(t)}} = \frac{4}{3} + \frac{6}{5} \cos\left(4t - \arctan \frac{4}{3}\right)$

och $\underline{\underline{y_2(t)}} = \begin{cases} 0; & t < -1 \\ \frac{2}{3}\left(1 - e^{-3(t+1)}\right); & -1 \le t < 1 \\ \frac{2}{3}\left(e^{3} - e^{-3}\right) e^{-3t}; & t \ge 1 \end{cases}$

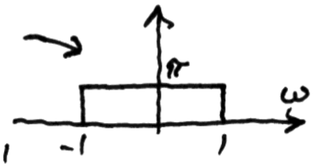
3 a) [= övningsbokens uppgift 4-17]

System 1: $y_1(t) = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\mathcal{F}}{\Rightarrow} Y_1(\omega) = (j\omega)^2 X(\omega)$

↑ formels. Tab. 16.10

$$x(t) = \frac{\sin(t)}{t} = \frac{\sin(\pi \cdot \frac{1}{\pi}t)}{\pi \cdot \frac{1}{\pi}t} = /\text{formels. sid 62}/ = \operatorname{sinc}\left(\frac{1}{\pi}t\right)$$

Formels. Tab. 17.8 $\Rightarrow$ $X(\omega) = \pi\big(u(\omega+1) - u(\omega-1)\big)$ →



Utsignalens energi:

$$W_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |y_1(t)|^2 dt = /\text{parsevals relation}/ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y_1(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \omega^4 \pi^2 d\omega = \frac{\pi}{5}$$

System 2: $\tilde{y}_2(t) = x(t)\cdot z(t)$, där $z(t) = \sin(t)$

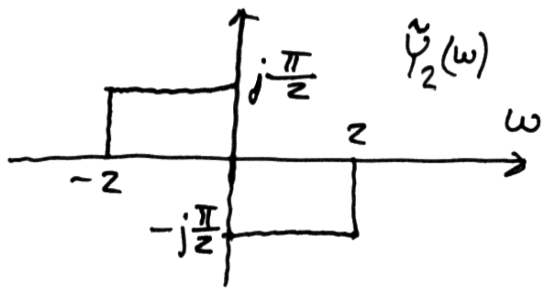
Det kommer även här att bli enklare att beräkna utsignalsenergin i frekvensdomänen:

$$W_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{Y}_2(\omega)|^2 d\omega \ , \quad \text{där } \tilde{Y}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * Z)(\omega).$$

Formels. Tab. 17.15 $\Rightarrow$ $Z(\omega) = j\pi\big(\delta(\omega+1) - \delta(\omega-1)\big)$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\lambda)Z(\lambda)\,d\lambda = \frac{j\pi}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\lambda)\delta(\lambda+1)d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega-\lambda)\delta(\lambda-1)d\lambda\right)$$

$$= \frac{j}{2}\big(X(\omega+1) - X(\omega-1)\big)$$



$$\Rightarrow W_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$$

---

b) Låt $y_a(t)$ och $y_b(t)$ vara utsignaler för insignalerna $x_a(t)$ resp. $x_b(t)$. Om systemet i fråga är linjärt, så gäller att en insignal $x(t) = a\cdot x_a(t) + b\cdot x_b(t)$ (där $a, b \in \mathbb{R}$) ger upphov till utsignalen $y_2(t) = a\cdot y_a(t) + b\cdot y_b(t)$.

(Anm: Denna bakgrund/formulering måste på något sätt finnas med i din lösning!)

Test: $y_2(t) = x(t)\cdot\sin(t) = \big(a\cdot x_a(t) + b\cdot x_b(t)\big)\cdot\sin(t)$

$= a\cdot x_a(t)\sin(t) + b\cdot x_b(t)\cdot\sin(t) = a\cdot y_a(t) + b\cdot y_b(t)$

Systemet är därför linjärt

4 a) För en periodisk insignal $x(t)$ till ett stabilt LTI-system med frekvensfunktion $H(\omega)$, gäller att den periodiska utsignalens ($y(t)$) komplexa fourierseriekoefficienter är $\underline{D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)}$, där C_k är insignalens komplexa fourierseriekoefficienter & ω_1 är (in)signalens grundvinkelfrekv.

Här: $x(t) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k\pi} \sin(k\pi t + \pi)$; $\omega_1 = \pi$ rad/s

$$\left.\begin{aligned} X_0 &= 2 = C_0 \\ \hat{X}_{k>0} &= \frac{6}{k\pi} = 2|C_k| \\ \varphi_k &= \pi = \arg C_k + \frac{\pi}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} k>0: C_k = \underbrace{\frac{\hat{X}_k}{2}}_{|C_k|} e^{j\overbrace{(\varphi_k - \frac{\pi}{2})}^{\arg C_k}} = \frac{3}{k\pi} e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{3j}{k\pi} \\ k<0: C_k = C_{-k}^{*} = \frac{-3j}{-k\pi} = \frac{3j}{k\pi} \end{cases}$$

Dvs:

$$C_k = \begin{cases} 2 ; & k=0 \\ \frac{3j}{k\pi} ; & k \neq 0 \end{cases}$$

Är då systemet stabilt (dvs. existerar $H(\omega)$), så vi kan använda ovanstående samband? Enligt uppgift är systemet kausalt $\Rightarrow$ konvergensomr. för $H(s)$ är $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$, där σ_0 är realdelen hos "de mest högra" polerna hos $H(s)$, dvs $\mathrm{Re}\{s\} > -1$ här $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Imaginära axeln ligger i konv.området $\Rightarrow$ Systemet är stabilt

och $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} =$ / från pol-nollst.diagr. / $= \left.\frac{4 \cdot s}{(s+1)^2 + 2^2}\right|_{s=j\omega} = \frac{j4\omega}{5-\omega^2+j2\omega}$

$$\Rightarrow H(k\omega_1) \overset{\omega_1 = \pi \text{ rad/s}}{=} \frac{j4k\pi}{5-k^2\pi^2+j2k\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{D_k}} = C_k \cdot H(k\pi) = \begin{cases} 2 \cdot 0 = 0 ; & k=0 \\ \frac{3j}{k\pi} \cdot \frac{j4k\pi}{5-k^2\pi^2+j2k\pi} = \frac{-12}{5-k^2\pi^2+j2k\pi} ; & k \neq 0 \end{cases}$$

Alternativ lösning till 4a):

$x(t) = \text{konstant} + \sum (\text{stationära sinusar})$

stabilt (LTI-)system, enligt motivering på förra sidan, ger då

$$y(t) = Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \sin(k\pi t + \beta_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\pi t} \quad (\omega_1 = \pi \text{ rad/s})$$

där
$$\begin{cases} Y_0 = X_0 \cdot H(\underset{\omega=0}{0}) = 2 \cdot 0 = 0 \\ \hat{Y}_k = \hat{X}_k \cdot |H(k\pi)|, \text{ där } \hat{X}_k = \frac{6}{k\pi} \\ \beta_k = \varphi_k + \arg H(k\pi), \text{ där } \varphi_k = \pi \text{ rad/s} \end{cases}$$

Då erhålls:

$$\underline{\underline{D_0}} = Y_0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{D_{k>0}}} = |D_k| e^{j \arg D_k} = \frac{\hat{Y}_k}{2} e^{j(\beta_k - \frac{\pi}{2})}$$

$$= \frac{\hat{X}_k}{2} |H(k\pi)| \cdot e^{j(\underbrace{\varphi_k}_{=\pi} + \arg H(k\pi) - \frac{\pi}{2})}$$

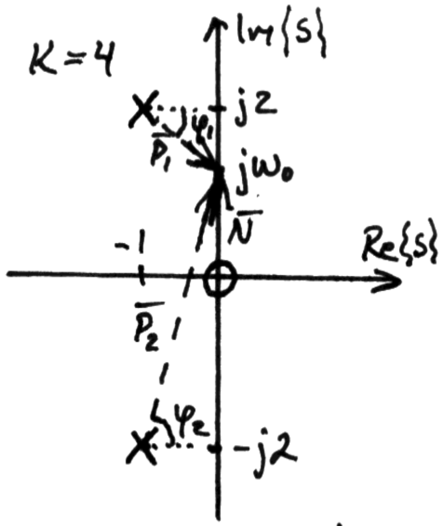
$$= \frac{\hat{X}_k}{2} \cdot \underbrace{e^{j\frac{\pi}{2}}}_{=j} \cdot |H(k\pi)| \cdot e^{j \arg H(k\pi)} = \frac{3j}{k\pi} \cdot H(k\pi)$$

$$= / H(\omega) \text{ från förra sidan} / = \underline{\underline{\frac{-12}{5 - k^2\pi^2 + j2k\pi}}}$$

$$\underline{\underline{D_{k<0}}} = D_{-k}^* = \left(\frac{-12}{5 - (-k)^2\pi^2 + j2(-k)\pi} \right)^* = \underline{\underline{\frac{-12}{5 - k^2\pi^2 + j2k\pi}}}$$

$$\text{Dvs. } D_k = \begin{cases} 0; & k = 0 \\ \frac{-12}{5 - k^2\pi^2 + j2k\pi}; & k \neq 0 \end{cases}$$

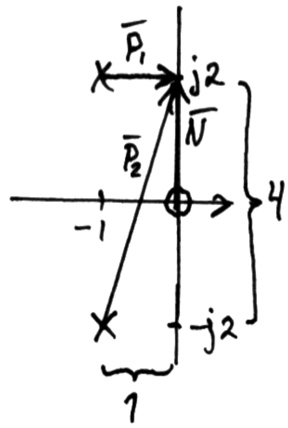
b) 2 polvektorer och 1 nollvektor är inritat i pol-nollställediagrammet för $H(s)$ till höger.



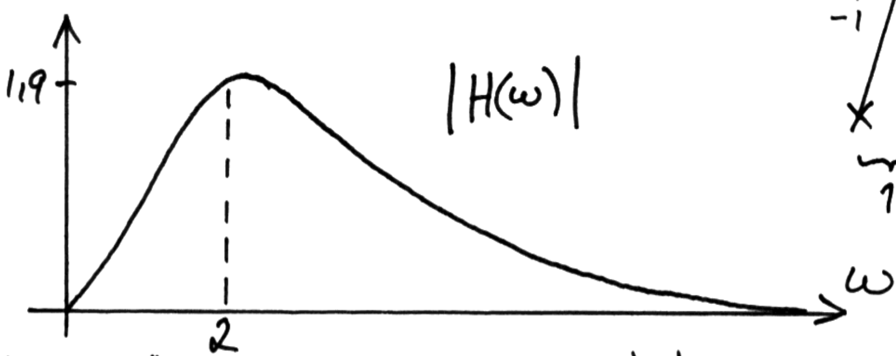
$$\Rightarrow |H(\omega_0)| = K \cdot \frac{|\bar{N}|}{|\bar{P}_1| \cdot |\bar{P}_2|}$$

- $\omega = 0 \Rightarrow |\bar{N}| = 0 \Rightarrow \underline{|H(0)| = 0}$
- $\omega \to \infty \Rightarrow$ Alla vektorer $\approx$ lika långa $\Rightarrow \underline{|H(\omega)|} \approx K \cdot \frac{\omega}{\omega \cdot \omega} \to \underline{0}$
- $|H(\omega)|$ har ett lokalt max vid $\approx \omega = 2$, för då har $\bar{P}_1$-vektorn kortast längd

$$\underline{|H(2)|} = 4 \cdot \frac{2}{1 \cdot \sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{8}{\sqrt{17}} \approx \underline{1,9}$$



Skiss:



(Anm: Nollstället i origo "trycker ned" $|H(\omega)|$ i närheten av $\omega = 0$ så att det lokala maximet ligger strax efter $\omega = 2$. Det är dock ok att rita max-amplituden vid $\omega = 2$ här.)

5 a) $\mathcal{L}_{II}\{\text{diff.ekvationen}\} \Rightarrow Y_{II}(s)(s^2+6s+13) = X_{II}(s)(s^2-9)$

$\Rightarrow$ Systemfunktionen är $H_{II}(s) = \dfrac{Y_{II}(s)}{X_{II}(s)} = \dfrac{s^2-9}{s^2+6s+13}$

Enligt uppgift är systemet kausalt $\Rightarrow$ konvergensområdet för $H(s)$ ligger till höger om den pol i $H(s)$ som ligger längst till höger i s-planet.

Poler där $s^2+6s+13=0 \Rightarrow (s+3)^2-3^2+13=0 \Rightarrow (s+3)^2+2^2=0$

$\Rightarrow$ $H(s)$ har sina två poler i $s=-3\pm j2$

Svar: $H(s) = \dfrac{s^2-9}{s^2+6s+13}$, Konv.område $\mathrm{Re}\{s\} > -3$

$(\Rightarrow H_{II}(s) = H_I(s))$

b) $x(t) = u(t) \overset{\text{Tabell}}{\Rightarrow} X(s) = \dfrac{1}{s}$, $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

$\Rightarrow Y(s) = X(s)\cdot H(s) = \dfrac{1}{s}\cdot\dfrac{s^2-9}{s^2+6s+13} = $ /Part. bråks-uppdelning/

$$= \frac{1}{13}\Bigg(\underbrace{\frac{-9}{s}}_{\mathrm{Re}\{s\}>0} + \underbrace{\frac{22s+54}{s^2+6s+13}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-3}\Bigg) =$$ /Omforma den andra termen till formerna i formelsamlingens Tab 19.25 o 19.23/

$$= \frac{1}{13}\Bigg(\underbrace{-9\cdot\frac{1}{s}}_{\mathrm{Re}\{s\}>0} + 22\cdot\underbrace{\frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-3} - 6\cdot\underbrace{\frac{2}{(s+3)^2+2^2}}_{\mathrm{Re}\{s\}>-3}\Bigg)$$

($Y(s)$ har konv.område $\mathrm{Re}\{s\}>0$)

Formelsaml. Tab. 19.3, 19.25 och 19.23 $\Rightarrow$

$$y(t) = g(t) = \frac{1}{13}\left(-9u(t) + 22e^{-3t}\cos(2t)u(t) - 6e^{-3t}\sin(2t)u(t)\right)$$

$$= \frac{1}{13}\left(-9 + e^{-3t}\left(22\cos(2t) - 6\sin(2t)\right)\right)u(t)$$