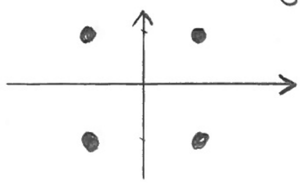
Den här tentan består nästan bara av uppgifter från lektionsplaneringen,
dvs. uppgifter som du redan bör ha löst! ☺

---

1) a) FALSK: Icke-kausalt system $\Rightarrow$ Konvergensområdet för $H(s)$ är till vänster om polparet, dvs. $Re\{s\} < 2$ $\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet $\Rightarrow$ systemet är stabilt

(6-25c)

b) SANT:



c) FALSKT: $2f_cT$ = heltal är korrekt, men sinc:arna finns vid $f = \pm f_c$, inte $\pm 2f_c$

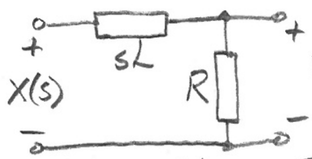
d) FALSKT: Systemet är linjärt men inte kausalt.

(Del av 1-18d)

För $t = t_0 > 0$ gäller $y(t_0) = \int_{-\infty}^{3t_0} x(\tau)\,d\tau$, dvs. $y(t_0)$ beror på $x(t)$ för (bl.a.) $t_0 < t \leq 3t_0$, dvs. insignalens framtida värden $\Rightarrow$ systemet är icke-kausalt

e) SANT:

(B-17)



$Y(s) = X(s) \cdot \frac{R}{sL + R} \Rightarrow$

$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{R}{L} \cdot \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \xrightarrow{Re\{s\} > \frac{R}{L} \text{ ty kausalt system}} h(t) = \frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$

② (Detta är en utvidgning av uppgift 4-3b)

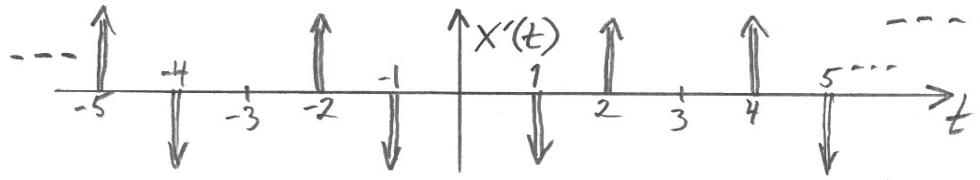
a) $x(t) \longrightarrow \overset{LTI}{\boxed{H(\omega)}} \longrightarrow y(t)$ Periodisk insignal, $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$

Ty $H(\omega)\ \exists$

Stabilt LTI-system $\Rightarrow$ periodisk utsignal, $y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$, där $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$,

där $T = 6$ sek (enl. figur) $\Rightarrow \underline{\omega_1 = \frac{\pi}{3}\ \text{rad/s}}$ och $\underline{D_k = C_k \cdot H(k\omega_1)}$

• $x(t)$ innehåller diskontinuiteter $\Rightarrow$ det kan vara (är här) enklare att beräkna kompl. fouriers.koeff. $C_{kx'}$ för $x'(t)$ $\Rightarrow C_k = \frac{C_{kx'}}{jk\omega_1}$



$$C_{kx'} = \frac{1}{T}\int_T x'(t)e^{-jk\omega_1 t}\,dt = \Big/\ T = 6\ \text{sek},\ \omega_1 = \tfrac{\pi}{3}\ \text{rad/s},\ \text{välj} \int_{-T/2}^{T/2} \cdots = \int_{-3}^{3} \cdots \Big/$$

$$= \frac{1}{6}\int_{-3}^{3}\Big(\delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t+2)\Big)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^{jk\frac{2\pi}{3}} - e^{jk\frac{\pi}{3}} - e^{-jk\frac{\pi}{3}} + e^{-jk\frac{2\pi}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$\underline{C_k} = \frac{C_{kx'}}{jk\omega_1} \overset{k\neq 0}{=} \underline{\frac{1}{jk\pi}\left(\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right);\ k\neq 0}$$

$$\cdot\ \underline{H(k\omega_1)} = \Big/\ \omega_1 = \frac{\pi}{3}\ \text{rad/s}\Big/ = \frac{jk\frac{\pi}{3}}{\pi + jk\frac{\pi}{3}} = \qquad \underline{C_0 = \frac{1}{T}\int_T x(t)\,dt = 0}$$

(ses direkt i figur, medelvärdet)

$$= \underline{\frac{jk}{3+jk}} \qquad \underline{D_k} = C_k \cdot H(k\omega_1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(3+jk)}\left(\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right); & k\neq 0 \\ 0\cdot 0 = 0; & k=0 \end{cases}$$

Anm. – Traditionell beräkning av C_k:

$$\underline{C_k} = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_1 t}\,dt = \frac{1}{6}\left(\int_{-2}^{-1} 1\cdot e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\,dt + \int_1^2 (-1)e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\,dt\right)$$

$$\overset{k\neq 0}{=} \frac{1}{6\left(-jk\frac{\pi}{3}\right)}\left(\left[e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\right]_{-2}^{-1} - \left[e^{-jk\frac{\pi}{3}t}\right]_1^2\right)$$

$$= \frac{j}{k\cdot 2\pi}\left(e^{jk\frac{\pi}{3}} - e^{jk\frac{2\pi}{3}} - \left(e^{-jk\frac{2\pi}{3}} - e^{-jk\frac{\pi}{3}}\right)\right)$$

$$= \Big/\ \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} = \cos(\alpha)\Big/ = \underline{\frac{j}{k\pi}\left(\cos\left(k\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

b) Insignalens grundton: $x_1(t) = \hat{X}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$

Stabilt (ty $H(\omega)$ $\exists$) LTI-system $\Rightarrow$ Utsignalens grundton är

$$y_1(t) = \hat{Y}_1 |H(\omega_1)| \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \arg H(\omega_1))$$

$$H(\omega_1) = H\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{j\pi/3}{\pi + j\pi/3} = \frac{j}{3+j} = \frac{1 \cdot e^{j\pi/2}}{\sqrt{3^2+1^2} \cdot e^{j\arctan 1/3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Amplitudskalning } |H(\omega_1)| = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \text{Fasförskjutning } \arg H(\omega_1) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{3} \text{ rad} \end{cases}$$

---

(3) (Detta är uppgift 3-13 i övningsboken)

a) Impulssvaret $\underline{\underline{h(t)}} = \mathcal{H}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau - 2)\, d\tau$

Diracen finns vid $\tau = 2$. Från diracens definition erhålls därför

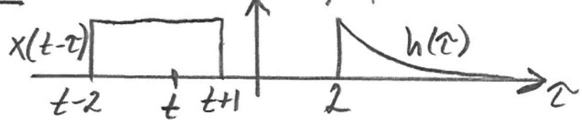
$$h(t) = \begin{cases} 0\ ; & t < 2 \\ e^{-(t-\tau)}\Big|_{\tau=2} = e^{-(t-2)}\ ; & t \geq 2 \end{cases}, \text{ dvs } \underline{\underline{h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)}}$$

b) Beräkna $y(t)$ antingen utgående från den givna integralen eller m.h.a. faltning: $y(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$

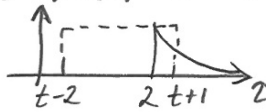
I övningsbokens lösning beräknas faltn.integralen $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$

Alla tre integralerna ger samma typ av beräkningar. Se övningsbokens detaljerade lösning på sid. 107! Här visas det tredje fallet skissartat,

$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau)\, d\tau$

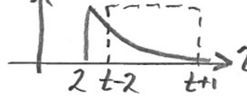


- $t+1 < 2$, dvs. $\underline{t < 1}$: $x(t-\tau)h(\tau) = 0 \Rightarrow \underline{y(t) = 0}$
- $t-2 < 2 \leq t+1$, dvs. $\underline{1 \leq t < 4}$:



$\underline{y(t)} = \int_{2}^{t+1} \cdots$

- $t-2 \geq 2$, dvs. $\underline{t \geq 4}$:



$\underline{y(t)} = \int_{t-2}^{t+1} \cdots$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t)}} = \begin{cases} 0\ ; & t < 1 \\ 1 - e^{-t+1}\ ; & 1 \leq t < 4 \\ e^{-t+4} - e^{-t+1}\ ; & t \geq 4 \end{cases}$$

4 (Detta är uppgift 2 bland de extra filteruppgifterna, le 10)

a) Sunes formelsaml. sid 24, Butterworthfilter:

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2n}}} = /\omega_p = \omega_{3dB}\cdot\varepsilon^{1/n}/ = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^{2n}}}$$

$$|H(150)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{150}{100}\right)^{2n}}} \le \frac{1}{10} \qquad (\omega_{3dB} = 100 \text{ rad/s})$$

$$\Rightarrow 1{,}5^{2n} \ge 10^2 - 1 = 99 \Rightarrow 2n\cdot\log 1{,}5 \ge \log 99$$

$$\Rightarrow n \ge \frac{\log 99}{2\cdot\log 1{,}5} \approx 5{,}7 \Rightarrow \underline{n_{min} = 6}$$

b) $$|H(150)|_{dB} = 20\,{}^{10}\!\log|H(150)| = 20\,{}^{10}\!\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{150}{100}\right)^{2\cdot 6}}}$$

$$\approx 20\,{}^{10}\!\log 0{,}0875 \approx -21 \text{ dB}$$

$\Rightarrow$ Filtret dämpar 21 dB vid $\omega = 150$ rad/s

c) Formelsaml. sid 24 $\Rightarrow$ de 6 polerna hos butterworthfiltret finns vid $p_k = \omega_{3dB}\cdot e^{j\frac{2k+n-1}{2n}\pi}$, $\begin{cases}\omega_{3dB} = 100 \text{ rad/s}\\ n = 6\\ k = 1,2,3,4,5,6\end{cases}$

dvs. längs en halvcirkel i vänster halvplan med radie $\omega_{3dB} = 100$ rad/s och vinkelavstånd $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{6}$ rad

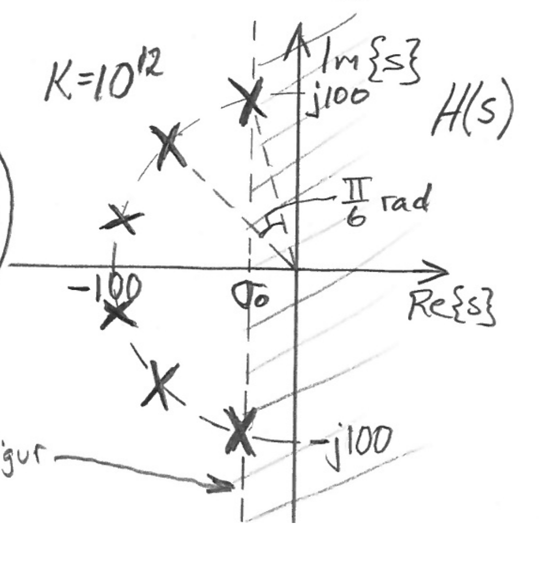
Nivåkonstant: Formels. sid 24 $\Rightarrow$

$$H(s) = \frac{1}{1 + a_1\frac{s}{\omega_{3dB}} + \ldots + \left(\frac{s}{\omega_{3dB}}\right)^n} = \frac{\omega_{3dB}^n}{s^n + \ldots \frac{a_1}{\omega_{3dB}^{n-1}}s + \omega_{3dB}}$$

$$\Rightarrow \underline{K} = \omega_{3dB}^n = \underline{100^6}$$

(Alt. erhålls K m.h.a. polvektorer då $\omega = 0$: $|H(0)| = K\cdot\frac{1}{\omega_{3dB}\cdot\omega_{3dB}\cdot\ldots\cdot\omega_{3dB}} = \frac{K}{\omega_{3dB}^6} = 1 \Rightarrow \underline{K} = \omega_{3dB}^6 = \underline{10^{12}}$)

Kausalt system $\Rightarrow$ Konv. omr. är $\underline{\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0 = \mathrm{Re}\{p_1\}}$, se figur



(Du behöver inte beräkna p_k och σ_0 numeriskt)

5

a) (Detta är uppgift B9b) i övningsboken)

LTI-system $\Rightarrow$ $y(t) = (x * h)(t) + y_{zi}(t)$

Vid beräkning av stegsvar antas energifritt system $\Rightarrow y_{zi}(t) = 0$

Dvs. $g(t) = (u * h)(t) \underset{\mathcal{L}}{\overset{LTI}{\Longrightarrow}} \underline{G(s) = U(s) \cdot H(s)}$,

där $U(s) = \frac{1}{s}$ (formels. tab. 19:3), $\mathrm{Re}\{s\} > 0$

och $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}_{I}\{e^{-(t-1)}u(t-1)\} = $ / Formelsaml. Tab. 18:4 & 19:12 /

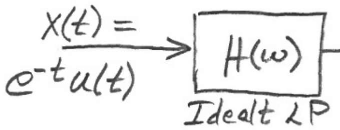
$= e^{-s} \cdot \frac{1}{s+1}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$

$\Rightarrow G(s) = e^{-s} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1} = e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \underset{(\mathrm{Re}\{s\}>0)}{e^{-s} \cdot \frac{1}{s}} - \underset{(\mathrm{Re}\{s\}>-1)}{e^{-s}\frac{1}{s+1}}$

Formelsaml. Tab 18:4, 19:3 & 19:12 $\Rightarrow$

$\underline{g(t)} = u(t-1) - e^{-(t-1)}u(t-1) = \underline{\underline{(1 - e^{-(t-1)})u(t-1)}}$

b) (Detta är uppgift 5-12 i övningsboken)



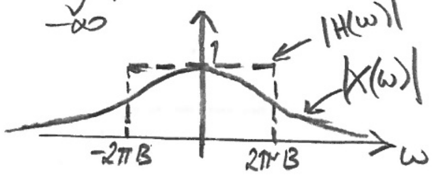
Enl. uppg: $\frac{W_y}{W_x} = 0{,}5$

$\underline{W_x} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^{\infty} = \underline{0{,}5}$

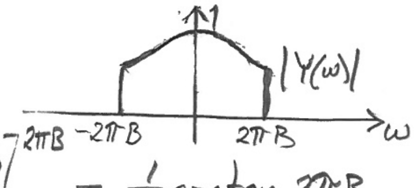
$\underline{W_y} = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)^2 dt = $ / Parsevals formel Tab. 16:15 / $= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega$

där $Y(\omega) = X(\omega)\,H(\omega)$

Tab. 17:2 $\Rightarrow$ $X(\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ $\Rightarrow$



$\therefore$ $\underline{W_y} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B}\left|\frac{1}{1+j\omega} \cdot 1\right|^2 d\omega =$



$= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\int_0^{2\pi B} \frac{1}{1+\omega^2} d\omega = \frac{1}{\pi}\left[\arctan \omega\right]_0^{2\pi B} = \underline{\frac{1}{\pi}\arctan 2\pi B}$

$\Rightarrow \frac{W_y}{W_x} = \frac{\frac{1}{\pi}\arctan 2\pi B}{0{,}5} = \underset{\text{(enl. uppg.)}}{0{,}5} \Rightarrow \underline{\underline{B}} = \frac{1}{2\pi}\tan(0{,}25\pi) = \frac{1}{2\pi} \approx \underline{\underline{0{,}16\ \mathrm{Hz}}}$