Formler & Samband, TSKS09 Linjära System

(får tas med på tentamen)

Komplexa tal

Låt $z = a + jb = r \cdot e^{j\varphi} \in \mathbb{C}$, där j är den imaginära enheten och definieras av sambandet $j^2 = -1$.

- Rektangulär form (kartesisk) $\leftrightarrow$ polär form: $\begin{cases} a = \mathrm{Re}\{z\} = r \cdot \cos(\varphi) \\ b = \mathrm{Im}\{z\} = r \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \arg z = \arctan \frac{b}{a} \quad \left(\pm\pi \text{ om } a<0 \right) \end{cases}$

  När det komplexa talet *z*, skrivet på polär form, relateras till en komplex representation av en (co-)sinusformad signal, kallas *z* för signalens *komplexa amplitud*.

- Komplexkonjugat: $z^* = a - jb = r \cdot e^{-j\varphi}$
- Kvadratiskt belopp: $z \cdot z^* = |z|^2$
- Division: $\dfrac{a+jb}{c+jd} = \dfrac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$
- Multiplikation: $(a+jb)(c+jd) = r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$
- Potenser: $z^n = (a+jb)^n = r^n \cdot e^{jn\varphi}$
- Eulers formel: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2} = \mathrm{Re}\{e^{j\varphi}\} \\ \sin\varphi = \dfrac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j} = \mathrm{Im}\{e^{j\varphi}\} \end{cases}$
- Hitta alla lösningar *z* till $\underline{z^a = c} = r_0 \cdot e^{j\varphi_0} = r_0 \cdot e^{j(\varphi_0 + k \cdot 2\pi)} \quad (*)$:

  Ansätt $z = r \cdot e^{j\varphi}$ (där lämpligen $-\pi < \varphi \le \pi$) och stoppa in i $(*)$. Lös sedan ut *r* och φ.

Signaler

- Enhetssteget $u(t) = \begin{cases} 1; & t \ge 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$
- Likformig sampling: $x[n] = x(nT_s)$, dvs. $x[n] = x(t)$ för $t = nT_s$, där T_s är sampelperioden.
- Basfunktionsbeskrivning av signaler i ett tidsintervall *T*:
  - Approximera en signal $x(t)$ med $\hat{x}(t) = \sum_k c_k \cdot \phi_k(t)$, dvs. en summa av ett antal viktade basfunktioner $\phi_k(t)$, där c_k är viktningskoefficienter.
  - Felsignalsenergin (Integrated Squared Error): $\mathrm{ISE} = \int_T |x(t) - \hat{x}(t)|^2 \, dt$
  - Ortogonaliseringsprincipen: För de koefficienter $c_k \in \mathbb{C}$ som minimerar ISE gäller sambandet $\int_T (x(t) - \hat{x}(t)) \cdot \phi_k^*(t) \, dt = 0 \quad \forall\, k$
  - Om basfunktionerna är ortogonala gäller $\int_T \phi_p(t) \cdot \phi_k^*(t) \, dt = \begin{cases} K_k; & k = p \\ 0; & k \ne p \end{cases}$

- Låt $x(t)$ vara en T_0-periodisk reell signal, dvs. $x(t+T_0)=x(t)\in\mathbb{R}$ för alla t.
    - Signalens grundvinkelfrekvens: $\omega_0 = 2\pi f_0$, där $f_0 = \dfrac{1}{T_0}$ är signalens grundfrekvens.
    - Fourierserieutveckling av $x(t)$: $x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$
        - Signalens komplexa fourierseriekoefficienter (spektrumets komplexa amplituder) är $c_k = \dfrac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$.
        - $c_k = \dfrac{\hat{X}_k}{2} e^{j\varphi_k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \hat{X}_k = 2|c_k|, \quad X_0 = c_0 & \text{(enkelsidigt amplitudspektrum)} \\ \varphi_k = \arg c_k & \text{(enkel- eller dubbelsidigt fasspektrum)} \end{cases}$

          Dubbelsidigt amplitudspektrum: $|c_k|$
        - Om $x(t)$ är en reellvärd periodisk signal gäller $c_{-k} = c_k^*$.
    - *Fourieranalys* $\Leftrightarrow$ bestäm c_k från $x(t)$. *Fouriersyntes* $\Leftrightarrow$ bestäm $x(t)$ från c_k och ω_0.

Linjära System

- Viktiga systemegenskaper: Linjäritet (Homogenitet & Additivitet), Tidsinvarians, Kausalitet, Stabilitet. De flesta intressanta linjära system är även tidsinvarianta och kallas då *LTI-system*.
- Differentialekvationsbeskrivning av ett LTI-system av ordning n, med $x(t)$ som insignal och $y(t)$ som utsignal:

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 \cdot x(t)$$

    - Differentialekvationens homogena lösning ger speciellt information om utsignalens insvängningsförlopp samt om systemets stabilitetsegenskap.
- Frekvensfunktionen för ett stabilt LTI-system: $H(\omega) = \dfrac{b_m \cdot (j\omega)^m + b_{m-1} \cdot (j\omega)^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n \cdot (j\omega)^n + a_{n-1} \cdot (j\omega)^{n-1} + \cdots + a_0}$
- $H(\omega) = |H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)}$, där $\begin{cases} |H(\omega)| \text{ är systemets } \textit{amplitudkaraktäristik} \\ \arg H(\omega) \text{ är systemets } \textit{faskaraktäristik} \end{cases}$
- För ett stabilt LTI-system med insignal $\tilde{x}(t) = X \cdot e^{j\omega_x t}$ (där $X = \hat{X} \cdot e^{j\varphi_x}$) och utsignal $\tilde{y}(t) = Y \cdot e^{j\omega_x t}$ (där $Y = \hat{Y} \cdot e^{j\varphi_y}$) gäller $Y = X \cdot H(\omega_x)$
    - Konsekvens: Insignalen $x(t) = \text{Re}\{\tilde{x}(t)\} = \hat{X} \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_x)$ ger upphov till utsignalen $y(t) = \text{Re}\{\tilde{y}(t)\} = \hat{X}\,|H(\omega_x)| \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_x + \arg H(\omega_x))$

- **Frekvensselektiva linjära filter:**
  - Vanligt syfte: dämpa eller filtrera bort oönskade frekvenskomponenter från en signal.
  - Standardfiltertyper:
    Lågpass- (LP-), högpass- (HP-), bandpass- (BP-) och bandspärrfilter (BS-filter).
  - Konstrueras vanligen som elektriska filter, med någon spänning eller ström som insignal och någon annan spänning eller ström som utsignal.
  - ***jω*-metoden** (för sinusformade spänningar och strömmar):
    1. Ersätt alla sinusformade storheter med komplexa storheter,
       dvs. i stil med $x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_x) \quad \to \quad X = \hat{X} \cdot e^{j\varphi_X}$
    2. Ersätt alla nätelement med komplexa impedanser, dvs.
       $R \to Z_R = R, \quad L \to Z_L = j\omega_x L$ och $C \to Z_C = \dfrac{1}{j\omega_x C}$.
    3. Betrakta det ekvivalenta *komplexschemat* som ett likströmsnät (*som är ett LTI-system*) och använd likströmsteori för att beräkna t.ex. $H(\omega)$ (byt då ut *konstanten* ω_x mot *variabeln* ω) eller någon sökt komplexvärd signal.
    4. För signaler: Omvandla beräknad $Y = \hat{Y} \cdot e^{j\varphi_y} \quad \to \quad y(t) = \hat{Y} \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_y)$.

  - **Elektriska samband**
    - Spänning-strömrelationer / Komplex motsvarighet $V = Z \cdot I$ (Ohms lag)

Spänning-strömrelationer		Komplex motsvarighet $V = Z \cdot I$ (Ohms lag)
Resistans:	$v(t) = R \cdot i(t)$	$V = Z_R \cdot I = R \cdot I$
Induktans:	$v(t) = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt}$	$V = Z_L \cdot I = j\omega L \cdot I$
Kapacitans:	$i(t) = C \cdot \dfrac{dv(t)}{dt}$	$V = Z_C \cdot I = \dfrac{1}{j\omega C} \cdot I$

    - Kirchhoffs strömlag: $\sum_k i_k(t) = 0$ Kirchhoffs spänningslag: $\sum_k v_k(t) = 0$
    - Seriekoppling av impedanser: $Z_s = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$
    - Parallellkoppling av impedanser: $\dfrac{1}{Z_p} = \dfrac{1}{Z_1} + \dfrac{1}{Z_2} + \cdots + \dfrac{1}{Z_n}$. $\left(n = 2 \Rightarrow Z_p = \dfrac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)$
    - Spänningsdelning (E ligger över $Z_1 + Z_2$, V_1 ligger över Z_1): $V_1 = E \cdot \dfrac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$
    - Strömdelning (I fördelas på Z_1 och Z_2, I_1 går genom Z_1): $I_1 = I \cdot \dfrac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$
  - Vid beräkning av frekvensfunktionen $H(\omega)$ för ett frekvensselektivt elektriskt filter med hjälp av $j\omega$-metoden, ersätts insignalen $x(t)$ (en spänning eller ström i nätet) och utsignalen $y(t)$ (en annan spänning eller ström i nätet) med sina komplexa motsvarigheter X resp. Y. Genom användande av komplexa impedanser och likströmsteori beräknas sedan Y på formen $Y = X \cdot H(\omega)$, varur $H(\omega)$ erhålles som $H(\omega) = \dfrac{Y}{X}$.