Två tidigare tentauppgifter om fourierserier

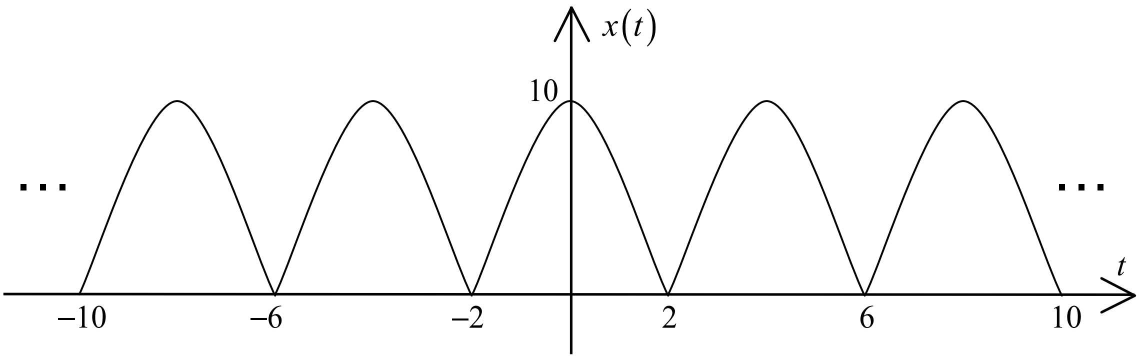
1. En viss periodisk signal $x(t)$ definieras som $x(t)=\begin{cases} e^{0.4t}; & 0 \le t < 5 \\ x(t+5); & \text{för alla } t \end{cases}$,

   dvs. den kan uttryckas som $x(t)=e^{0.4t}$ i intervallet $0 \le t < 5$ och har periodtid $T_0 = 5$ sek.

   - Beräkna de analytiska uttrycken för signalens amplitudspektrum $|c_k|$ och fasspektrum $\arg c_k$, där c_k är de komplexa fourierseriekoefficienterna till $x(t)$.

   - Rita signalens dubbelsidiga amplitudspektrum som funktion av frekvensen f för $-6 \le k \le 6$.

2. En del av den periodiska signalen $x(t)=\left|10\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right|$ är ritad i figuren nedan.



   Beräkna signalens komplexa fourierseriekoefficienter c_k samt rita dess dubbelsidiga komplexa spektrum c_k för $-4 \le k \le 4$.

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. $|c_k|$ och $\arg c_k$ erhålls direkt från c_k (här är grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{5}$ rad/s):

$$\underline{c_k} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{5}\int_0^5 e^{0.4t}e^{-jk\frac{2\pi}{5}t}\,dt = \frac{1}{5}\int_0^5 e^{\frac{2}{5}(1-jk\pi)t}\,dt = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{0.4(1-jk\pi)t}}{0.4(1-jk\pi)}\right]_0^5$$

$$= \frac{e^{0.4(1-jk\pi)\cdot 5} - e^0}{2(1-jk\pi)} = \Big/\, e^{-jk\pi\cdot 0.4\cdot 5} = e^{-jk2\pi} = \left(e^{-j2\pi}\right)^k = 1^k = 1 \Big/ = \underline{\frac{e^2-1}{2(1-jk\pi)}},$$

vilket ger att amplitudspektrumet är $\underline{\underline{|c_k| = \left|\frac{e^2-1}{2(1-jk\pi)}\right| = \frac{e^2-1}{2\sqrt{1+(k\pi)^2}}}}$ och

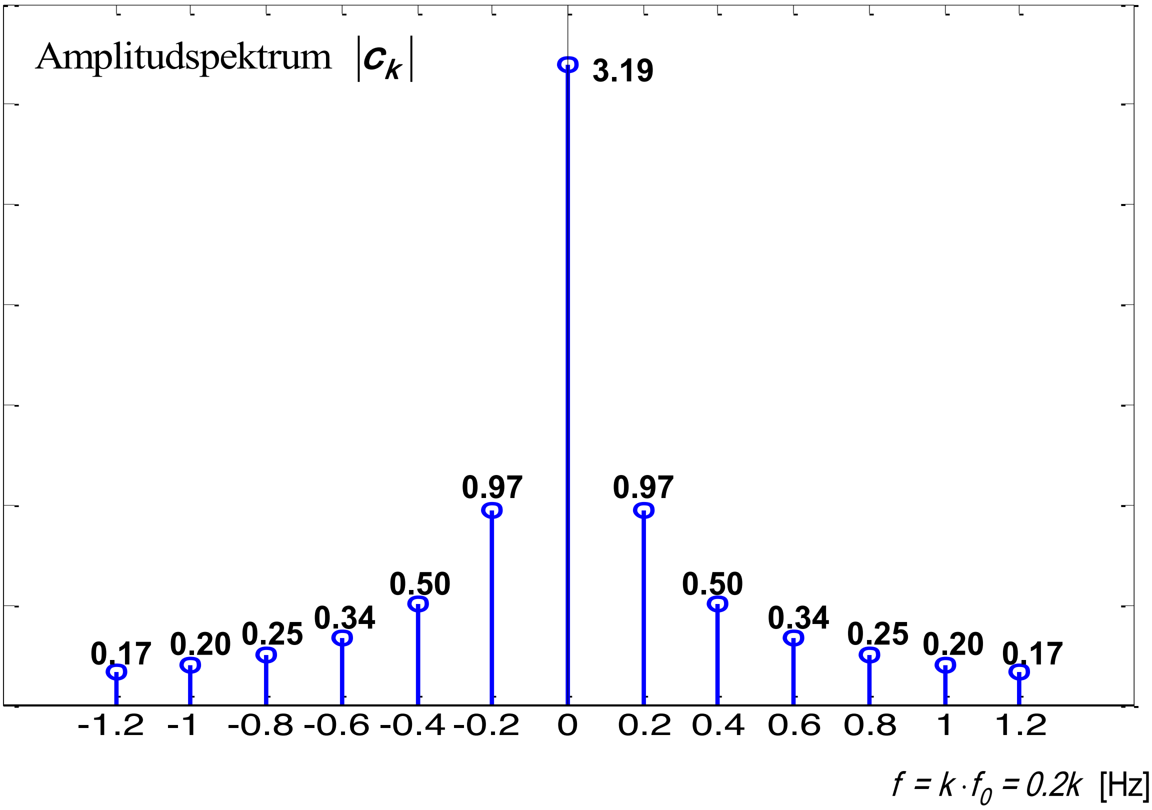
fasspektrumet är $\underline{\underline{\arg c_k}} = \arg\left(e^2-1\right) - \arg\left(2(1-jk\pi)\right) = 0 - \arctan\left(\frac{-k\pi}{1}\right) = \underline{\underline{\arctan(k\pi)}}$.

Detta ger följande värden på $|c_k|$ för $-6 \le k \le 6$ (notera att eftersom $x(t)$ är reellvärd så gäller $c_{-k} = c_k^*$, dvs. vi har $|c_{-k}| = |c_k|$):

k	0	± 1	± 2	± 3	± 4	± 5	± 6
$\lvert c_k\rvert = \frac{e^2-1}{2\sqrt{1+(k\pi)^2}}$	≈ 3.19	≈ 0.97	≈ 0.50	≈ 0.34	≈ 0.25	≈ 0.20	≈ 0.17

En graf föreställande signalens dubbelsidiga amplitudspektrum som funktion av frekvensen f för $-6 \le k \le 6$ efterfrågas. Överst på nästa sida visas denna graf.
Varje amplitudspektrumkomponent $|c_k|$ relateras till motsvarande frekvens

$k \cdot f_0 = k \cdot \frac{1}{T_0} = 0.2k$ Hz ($f_0 = \frac{1}{T_0} = 0.2$ Hz är signalens grundfrekvens), dvs. $|c_1|$ finns vid frekvensen $f_0 = 0.2$ Hz och $|c_2|$ finns vid frekvensen $2f_0 = 0.4$ Hz, osv.



2. Signalen har periodtid $T_0 = 4$ sek. och följaktligen grundvinkelfrekvens $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{\pi}{2}$ rad/s $\Rightarrow$

$$\underline{\underline{c_k}} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left|10\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\right|\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}10\,\frac{e^{j\frac{\pi}{4}t}+e^{-j\frac{\pi}{4}t}}{2}\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}dt$$

$$= \frac{5}{4}\int_{-2}^{2}\left(e^{j(1-2k)\frac{\pi}{4}t}+e^{-j(1+2k)\frac{\pi}{4}t}\right)dt = \frac{5}{4}\left[\frac{e^{j(1-2k)\frac{\pi}{4}t}}{j(1-2k)\frac{\pi}{4}}+\frac{e^{-j(1+2k)\frac{\pi}{4}t}}{-j(1+2k)\frac{\pi}{4}}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \frac{5}{j\pi}\left(\frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}-e^{-j\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}}{1-2k}-\frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}-e^{j\left(\frac{\pi}{2}-k\pi\right)}}{1+2k}\right) = \Bigg/ \begin{array}{l} e^{j\frac{\pi}{2}} = j, \\ e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j, \end{array} \quad e^{\pm jk\pi} = (-1)^k \Bigg/$$

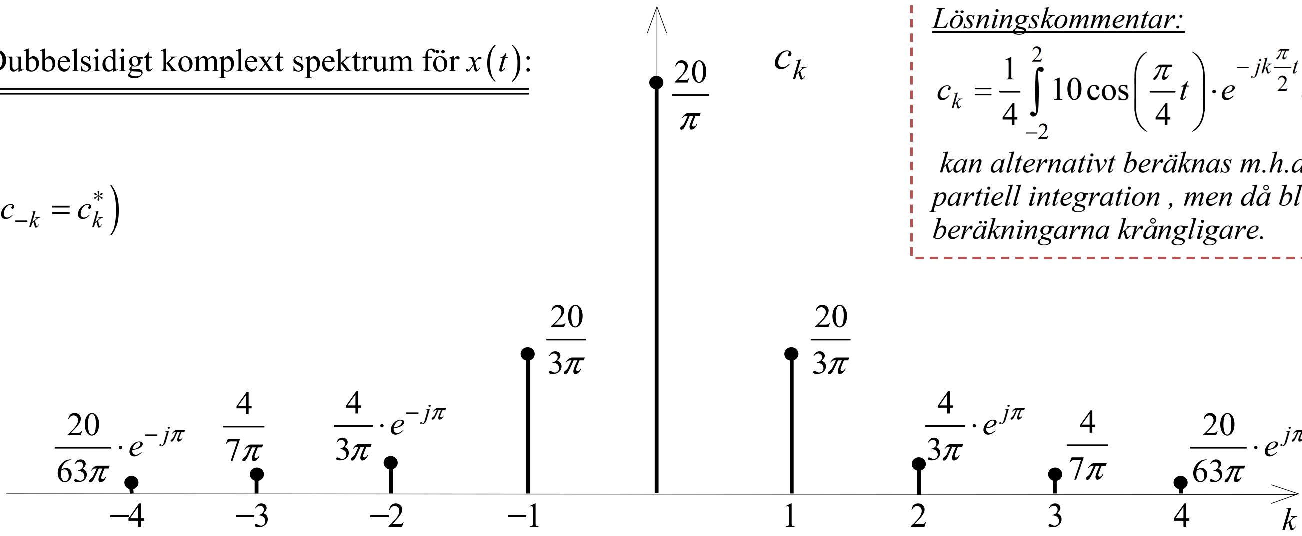
$$= \frac{5(-1)^k}{j\pi}\left(\frac{j-(-j)}{1-2k}-\frac{-j-j}{1+2k}\right) = \frac{5(-1)^k\,2j}{j\pi}\left(\frac{1}{1-2k}+\frac{1}{1+2k}\right) = \frac{10(-1)^k}{\pi}\cdot\frac{1+2k+1-2k}{(1-2k)(1+2k)} = \underline{\underline{\frac{20(-1)^k}{\pi\left(1-4k^2\right)}}}$$

$$\Rightarrow \underline{c_0 = \frac{20}{\pi}},\quad \underline{c_1 = c_{-1} = \frac{20}{3\pi}},\quad \underline{c_2 = c_{-2} = -\frac{20}{15\pi} = \frac{4}{3\pi}\cdot e^{\pm j\pi}},\quad \underline{c_3 = c_{-3} = \frac{20}{35\pi} = \frac{4}{7\pi}},\quad \underline{c_4 = c_{-4} = \frac{20}{63\pi}\cdot e^{\pm j\pi}}$$

Dubbelsidigt komplext spektrum för $x(t)$:

$\left(c_{-k} = c_k^*\right)$

> *Lösningskommentar:*
>
> $$c_k = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} 10\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}t}\,dt$$
>
> *kan alternativt beräknas m.h.a. partiell integration , men då blir beräkningarna krångligare.*



(Alternativt kan spektrumet ritas mot frekvens $(k\cdot f_0)$ eller vinkelfrekvens $(k\cdot\omega_0)$)