

KAPITEL 1

Föreläsning 1–2

- Introduktion
- Komplex representation av sinus & cosinus
 - Komplex amplitud
 - Periodiska signaler
 - Spektrum
- Sampling
- Signalmanipulationer

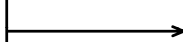
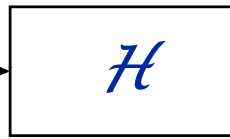
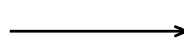


Insignal

System

Utsignal

x



$y = \mathcal{H}\{x\}$

Blockdiagram-representation

$\mathcal{H} = \text{systemoperatorn}$

I den här kursen betraktar vi främst system med en insignal och en utsignal

Signal = en funktion som representerar en fysisk storhet eller variabel och innehåller **information** om dess uppförande eller fenomenets egenskaper

System = (ofta) en matematisk modell av ett fysikaliskt system, som för olika **insignaler** genererar olika **utsignaler**.

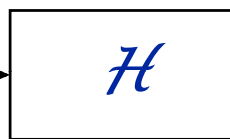


Insignal

System

Utsignal

x



$y = \mathcal{H}\{x\}$

Exempel:



$x =$ gaspedalens läge

En bil

$y =$ bilens fart

$x =$ ljusintensiteten

Ögat

$y =$ pupillens diameter

$x =$ vattenkranens flöde

Vattentank

$y =$ vattennivån

$x =$ ingående ström

Motstånd

$y =$ spänningen över motst.

$x =$ elektrisk ljudsignal

Högtalare

$y =$ ljudtrycksförändringar

$x =$ godtycklig

Integrator

$y =$ integralen av x

$x =$ Ericssonaktiens värde

SthlmsBörsen

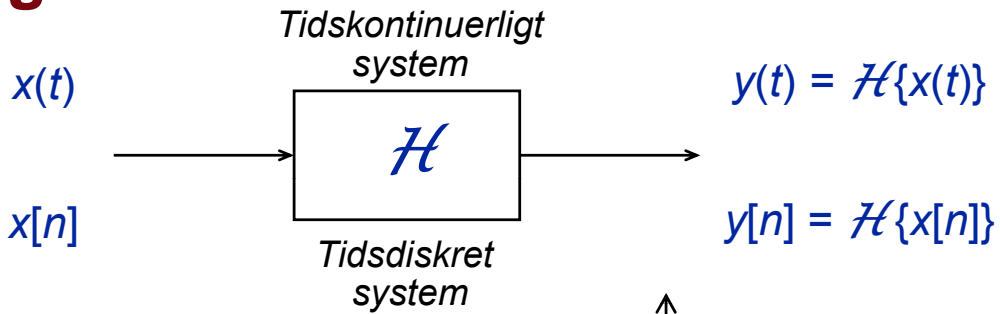
$y =$ Tele 2-aktiens värde

$x =$ antalet solfläckar

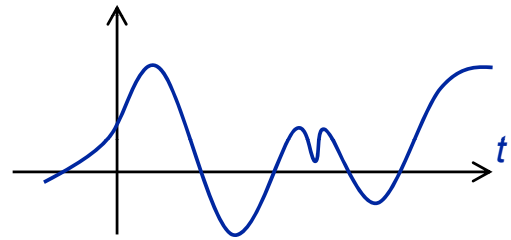
Solen/Jorden

$y =$ marknadspriset på vete!

Signaler

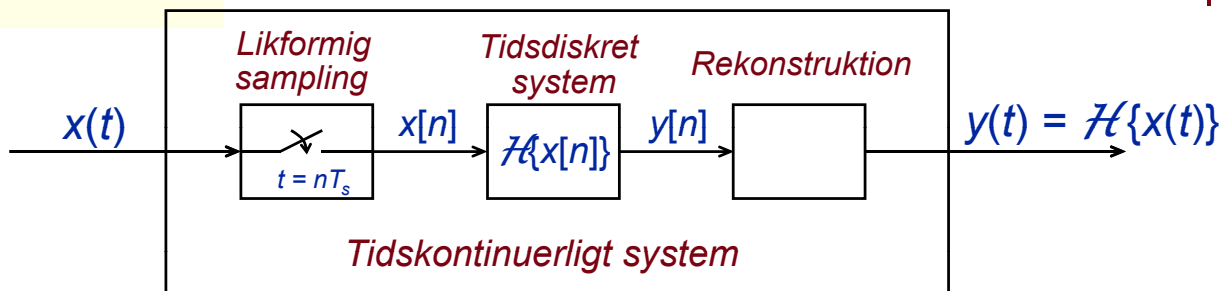
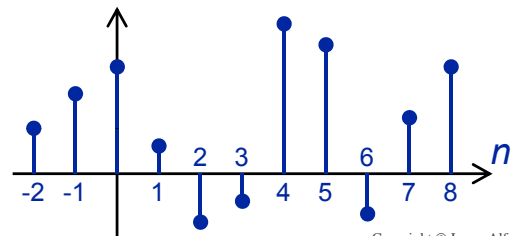


Tidskontinuerliga signaler $x(t), y(t)$

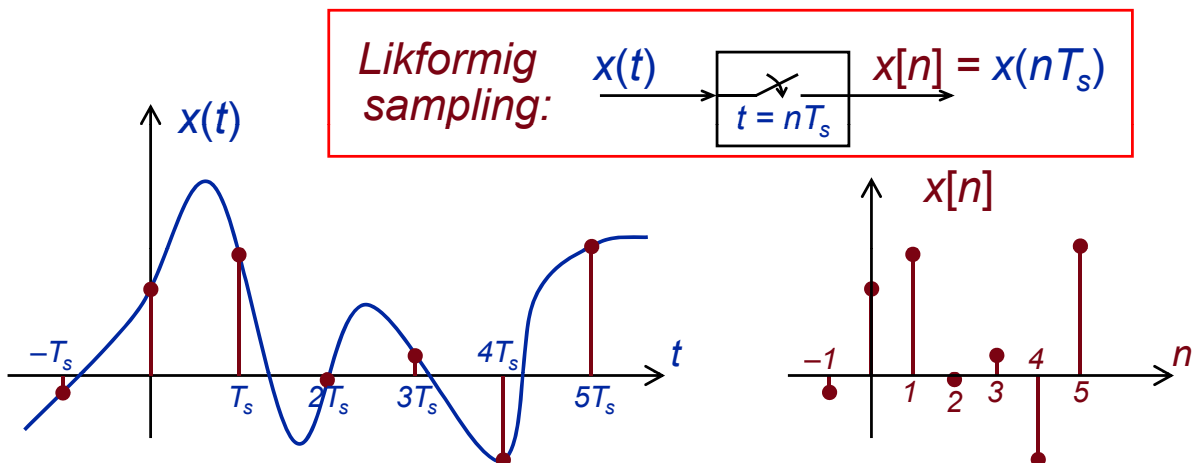


Tidsdiskreta signaler $x[n], y[n]$

= en ordnad sekvens av tal,
indexerad av variabeln n



Det tidskontinuerliga systemet kan **modelleras** m.h.a. ett tidsdiskret system!



Vibrationer, oscillationer, vågrörelser och andra periodiska förlopp och signaler

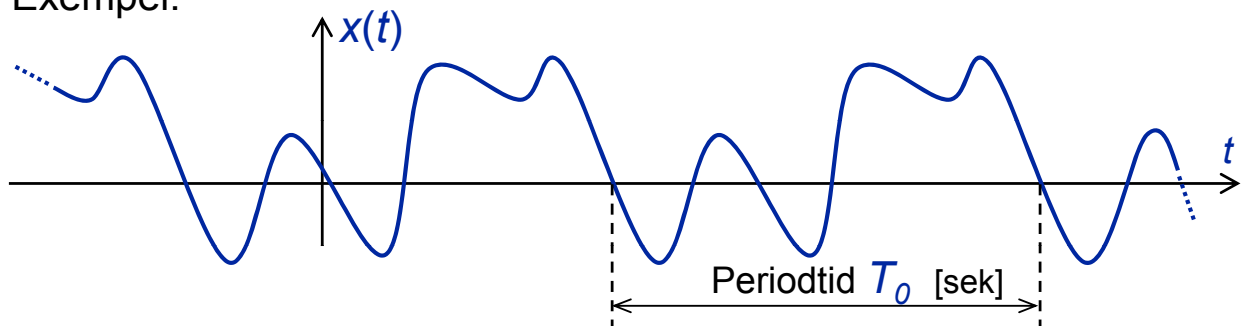
Periodiska förlopp:

- Hjärtslag, andning, ögonblinkning, ...
- Roterande objekt, t.ex. hjul, jorden, vevaxel, takfläkt, ...
- Studsande boll
- Flytande föremål som guppar i vatten
- Planeternas omloppsbanor runt solen
- Vågrörelser hos ljus, elementarpartiklar, atomer & molekyler
- Ekonomiska cykler — hög- & lågkonjunktur, periodiciteter i aktiemarknader och penningmarknader
- Fjädrande föremål — simhoppssvikt, trampolin, fjädrar
- Objekt som vajar/vibrerar/vobblar i vinden
- Ljud, t.ex. från stämbanden, stränginstrument, stämgafl, högtalarmembran, m.m.

(Stationärt) Periodiska signaler

Stationär signal = periodisk eller konstant signal, existerande från $t = -\infty$ till $t = +\infty$

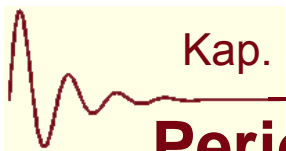
Exempel:



$$x(t) \text{ är } T_0\text{-periodisk} \Rightarrow x(t) = x(t + T_0)$$

$$\text{Signalens grundfrekvens: } f_0 = 1/T_0 \text{ [Hz]}$$

(Eng: fundamental frequency)



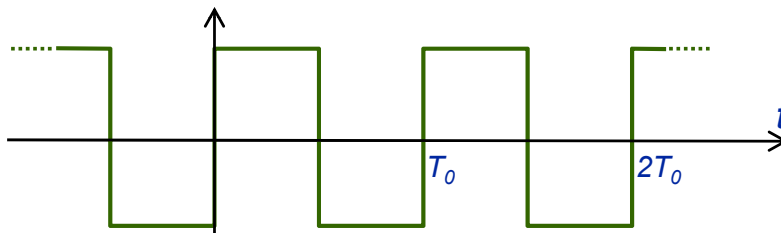
Periodiska modellsignaler

Fysikaliska periodiska signaler är inte alltid exakt periodiska, men **modelleras** ofta/gärna som sådana.

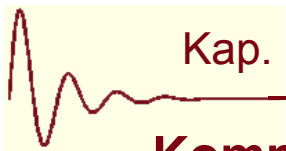
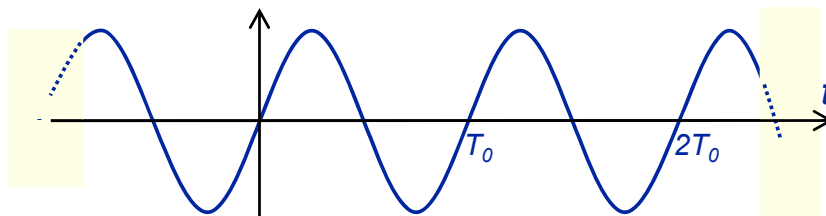
⇔ Det finns **kraftfulla matematiska verktyg** för periodiska signaler som väsentligt underlättar analys av signaler och linjära system!

Två vanliga periodiska modellsignaler:

Fyrkantvågen $x_{\square}(t)$

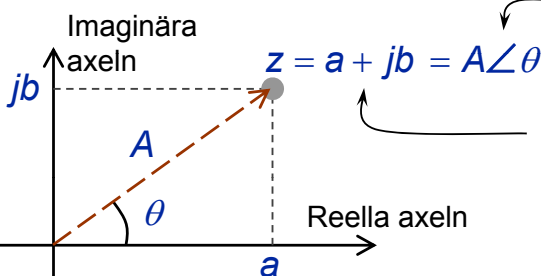


Sinusvågen $x_{\simeq}(t)$
(sinussignalen)



Komplex representation av cosinus/sinus

Komplexa talplanet



Polär form (A, θ)

Rektangulär (kartesisk) form (a, b)

Eulers formel: $e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$

⇒ Matematisk tolkning av polär form: $z = Ae^{j\theta}$

Eulers inversa formler:

$$\cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

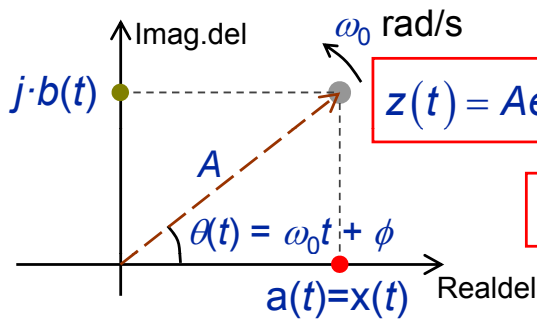
Polär → Rektangulär:

$$\begin{cases} a = \text{Re}\{z\} = A \cdot \cos \theta \\ b = \text{Im}\{z\} = A \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Rektangulär → Polär:

$$\begin{cases} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \theta = \arctan \frac{b}{a} \quad (\pm \pi \text{ om } a < 0) \end{cases}$$

Komplex representation av tidsberoende cosinus/sinus: "rotating phasors" = den komplexa exponentialsignalen



$$z(t) = Ae^{j\theta(t)} = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)} = Xe^{j\omega_0 t}$$

$$\text{Den komplexa amplituden: } X = Ae^{j\phi}$$

(boken: "phasor")

$$x(t) = \text{Re}\{z(t)\} = A\cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t + \phi)} + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t + \phi)}$$

$$= \frac{1}{2}z(t) + \frac{1}{2}z^*(t) = \frac{X}{2}e^{j\omega_0 t} + \frac{X^*}{2}e^{-j\omega_0 t} \quad (X^* = Ae^{-j\phi})$$

Demo – roterande visare

Exempel, cos/sin-addition m.h.a. komplexa amplituder

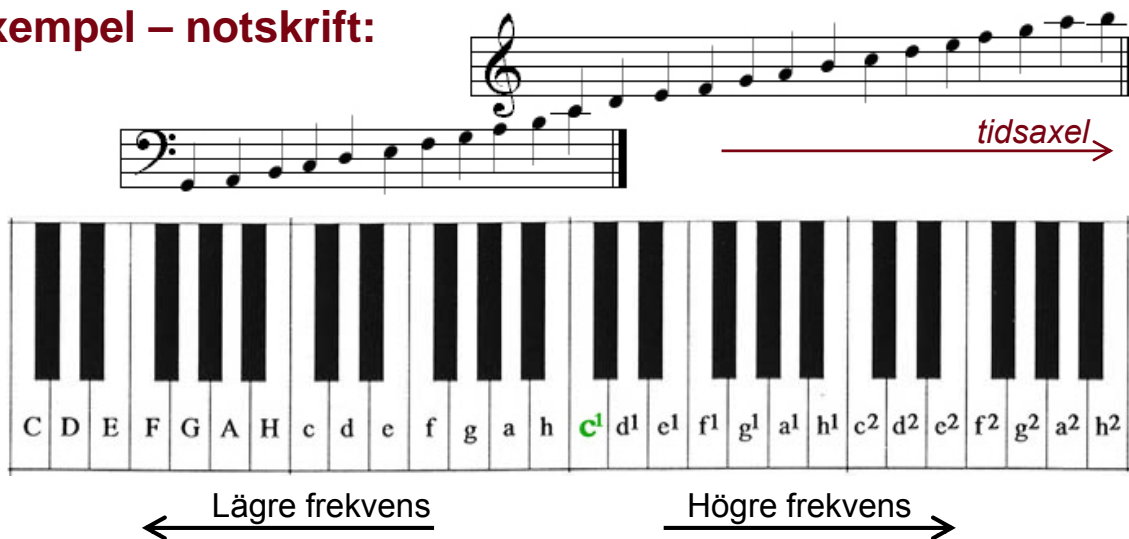
$$x(t) = 5 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = \underbrace{A \cos(\omega_0 t + \phi)}_{\substack{A=? \\ \phi=?}}$$

- 1): $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} = \dots$
- 2): $\text{Re}\{X \cdot e^{j\omega_0 t}\} = \dots$ (ofta enklast)
(där $X = A \cdot e^{j\phi}$)

Tavelräkning... \Rightarrow $x(t) \approx 4.88 \cos(\omega_0 t - 0.931)$

Grafisk spektrumbeskrivning av frekvenssignaler

Exempel – notskrift:

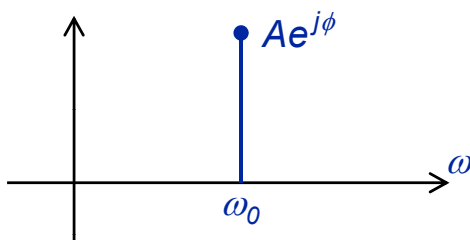


- I ett musikstycke spelas, vid varje tidpunkt, ett antal toner som kan bilda ackord.
- Notbladet anger vilka toner (=frekvenser) som då spelas.
- Anm: Varje instrument bidrar dock, för varje grundton, även med ett antal övertoner.

Grafisk spektrumbeskrivning av cosinus/sinus

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

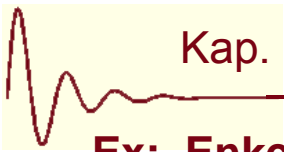
Enkelsidigt spektrum



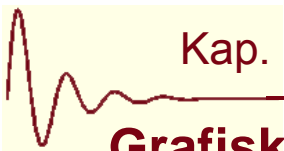
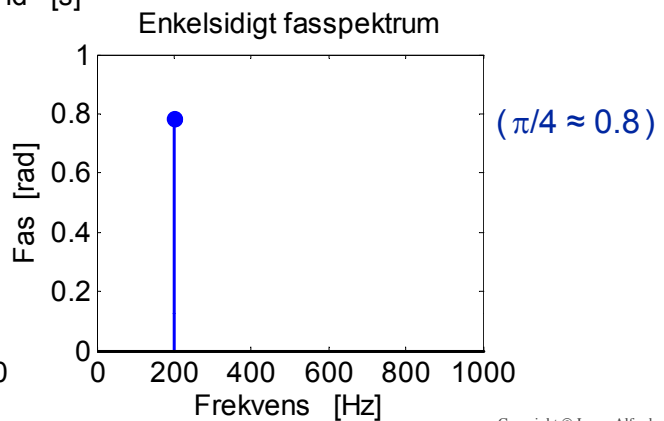
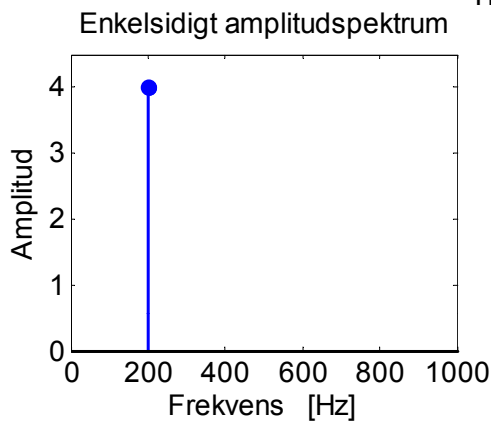
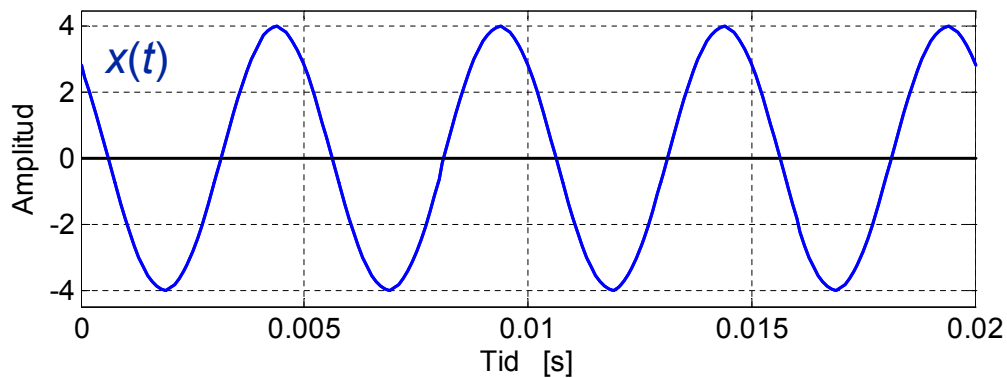
En frekvenskomponent
med komplexvärd amplitud

$$X = Ae^{j\phi} \quad \text{vid } \omega = \omega_0$$

$$\left(x(t) = \text{Re} \left\{ X e^{j\omega_0 t} \right\} \right)$$



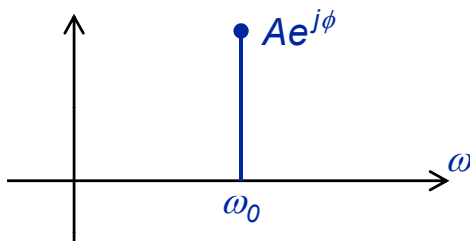
Ex: Enkelsidigt spektrum för $x(t) = 4 \cdot \cos(2\pi \cdot 200t + \pi/4)$



Grafisk spektrumbeskrivning av cosinus/sinus

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

Enkelsidigt spektrum

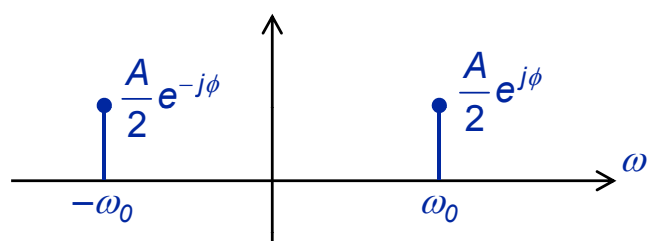


En frekvenskomponent med komplexvärd amplitud

$$X = A e^{j\phi} \quad \text{vid } \omega = \omega_0$$

$$\left(x(t) = \text{Re} \left\{ X e^{j\omega_0 t} \right\} \right)$$

Dubbelsidigt spektrum



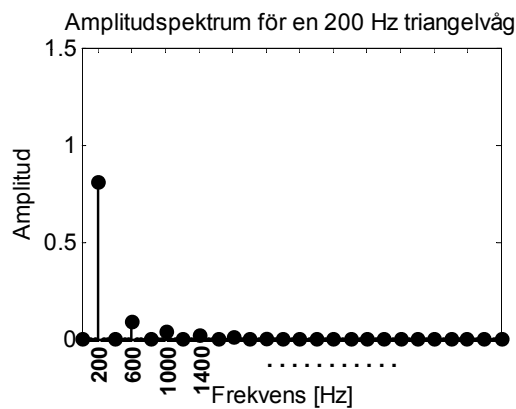
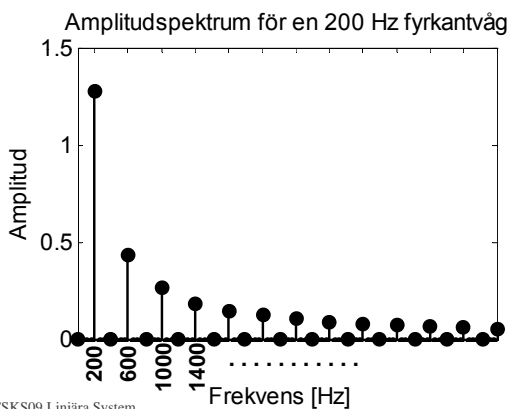
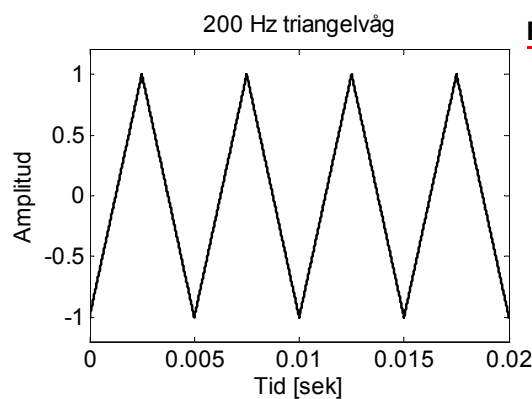
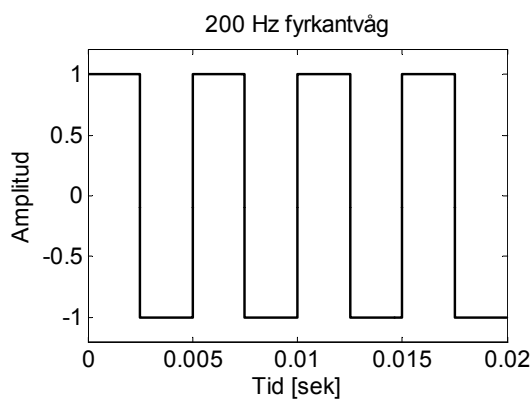
Två frekvenskomponenter med komplexvärda amplituder

$$\begin{cases} \frac{X}{2} = \frac{A}{2} e^{j\phi} & \text{vid } \omega = \omega_0 \\ \frac{X^*}{2} = \frac{A}{2} e^{-j\phi} & \text{vid } \omega = -\omega_0 \end{cases}$$



Enkelsidigt amplitudspektrum för 200 Hz fyrkantvåg & triangelvåg

Fig 1.3-1.6



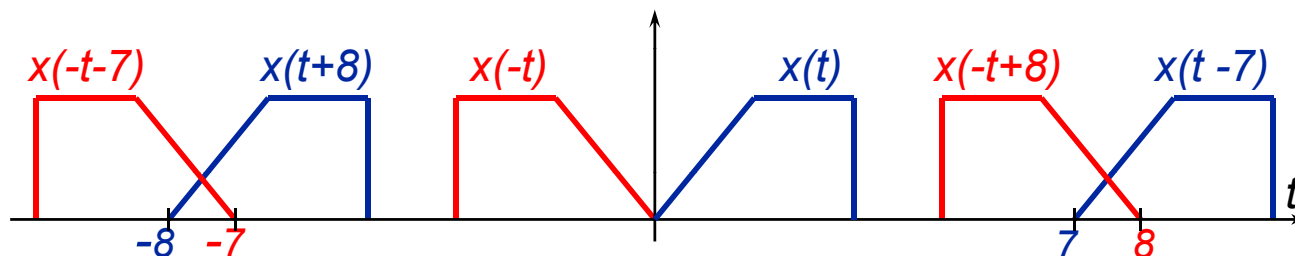
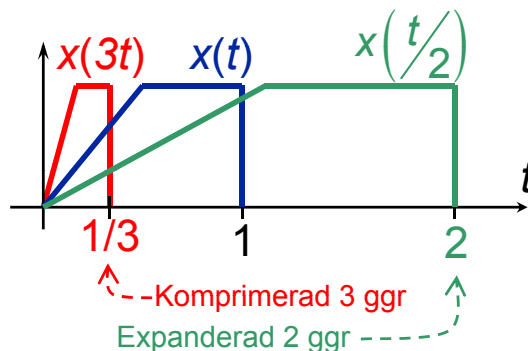
Mer om allmänna periodiska signaler i Kap. 2!



(Kap. 1.6: Transformations)

Signalmanipulationer

- ◆ Skiftning: $y(t) = x(t \pm \tau)$
- ◆ Tidsskalning: $y(t) = x(a \cdot t)$
- ◆ Spegling: $y(t) = x(-t)$
(Eng: reverse)
- ◆ Amplitudskalning: $y(t) = k \cdot x(t)$
 $k > 1$: förstärkning, $k < 1$: dämpning

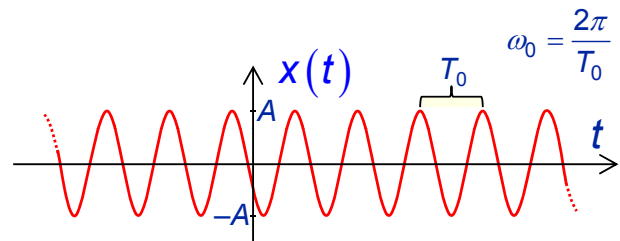


Dubbelsidiga & Enkelsidiga signaler

Dubbelsidiga signaler:

$x(t) \neq 0$ för både $t < 0$ och $t \geq 0$

Exempel: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$

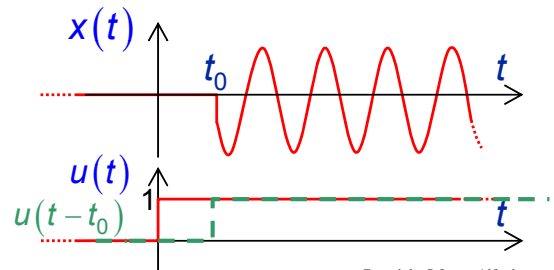


Enkelsidiga signaler: $x(t < t_0) = 0$ eller $x(t > t_0) = 0$

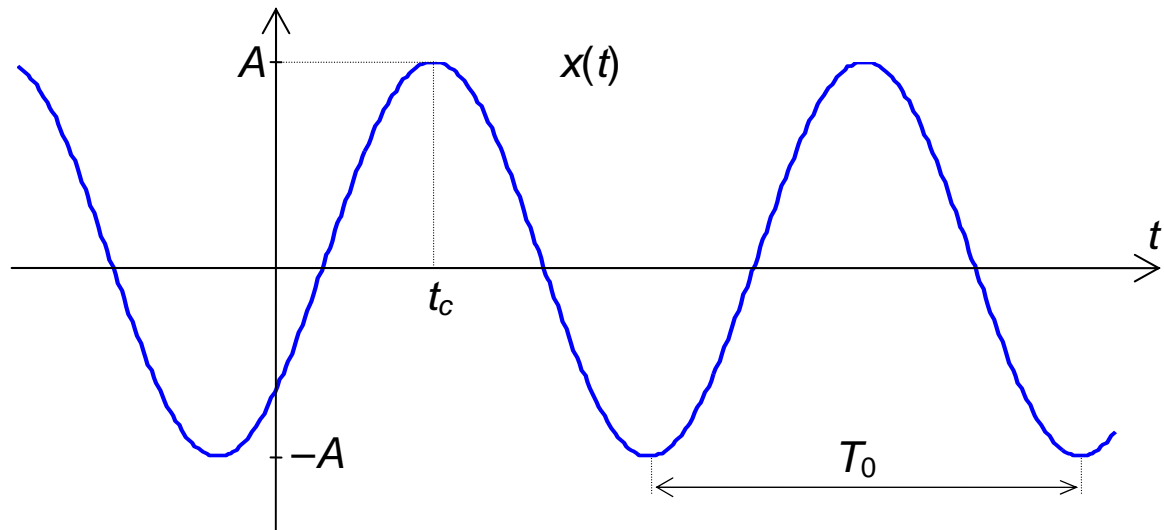
↑ Vanligaste specialfallet \Rightarrow högersidig signal

Exempel: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \cdot u(t - t_0)$

Enhetssteget: $u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$



Enkel harmonisk oscillation – en cosinus/sinus:



- Periodtid T_0 sek
- Frekvens $f_0 = \frac{1}{T_0}$ Hz
- (Grund-)vinkelfrekvens
 $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ rad/sek
- Fäsförskjutning $\theta_c = \omega_0 t_c$ rad
- Tidsförskjutning t_c sek

$$\begin{aligned}x(t) &= A \cdot \cos(\omega_0 t - \theta_c) \\ &= A \cdot \cos(\omega_0 (t - t_c))\end{aligned}$$

$$\sin(\varphi) = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Räkneexempel med komplexa amplituder – se bild 10 i powerpointpresentationen för kapitel 1

$$x(t) = 5 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \phi). \quad \text{Bestäm } A \text{ och } \phi !!$$

Lösningväg 1):

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} &= 5 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = 5 \cdot \frac{e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)} - e^{-j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right)}}{2j} - 2 \cdot \frac{e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(5 \cdot e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} - 5 \cdot e^{-j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} - 2 \cdot e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} - 2 \cdot e^{-j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(X \cdot e^{j\omega_0 t} + X^* \cdot e^{-j\omega_0 t} \right), \quad \text{där} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 5 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} - 2 \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 5 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \left(5 \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \\ &\approx 2.92 - j3.91 \approx 4.88 \cdot e^{-j0.931} = A \cdot e^{j\phi}, \quad \text{dvs } \underline{A \approx 4.88, \phi \approx -0.931 \text{ rad}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) \approx 4.88 \cdot \frac{e^{j(\omega_0 t - 0.931)} + e^{-j(\omega_0 t - 0.931)}}{2} = 4.88 \cos(\omega_0 t - 0.931)}}$$

Lösningväg 2):

$$\begin{aligned} \underline{x(t)} &= 5 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) = 5 \cdot \text{Re} \left\{ e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{6}\right)} \right\} - 2 \cdot \text{Re} \left\{ e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ \underbrace{\left(5e^{-j\frac{\pi}{6}} - 2e^{j\frac{\pi}{4}} \right)}_{X=Ae^{j\phi}} e^{j\omega_0 t} \right\}, \quad \text{där} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 5 \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j \left(5 \sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \approx 2.92 - j3.91 \\ &\approx 4.88 \cdot e^{-j0.931} = A \cdot e^{j\phi}, \quad \text{dvs } \underline{A \approx 4.88, \phi \approx -0.931 \text{ rad}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) \approx \text{Re} \left\{ 4.88 \cdot e^{-j0.931} \cdot e^{j\omega_0 t} \right\} = 4.88 \cos(\omega_0 t - 0.931)}}$$

Kommentar: Lösningväg 2 ger ofta enklare beräkningar än lösningväg 1 !

KAPITEL 2

Föreläsning 3–5

- Signalmodellering m.h.a. basfunktioner
- Fourierserieutveckling
 - Spektrum

Kap. 2: "Constructing signals from building blocks"

⇒ Approximera signalen $x(t)$ med en linjärkombination av ett antal **basfunktioner**:

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_k c_k \cdot \phi_k(t)$$

Basfunktioner

Koefficienter

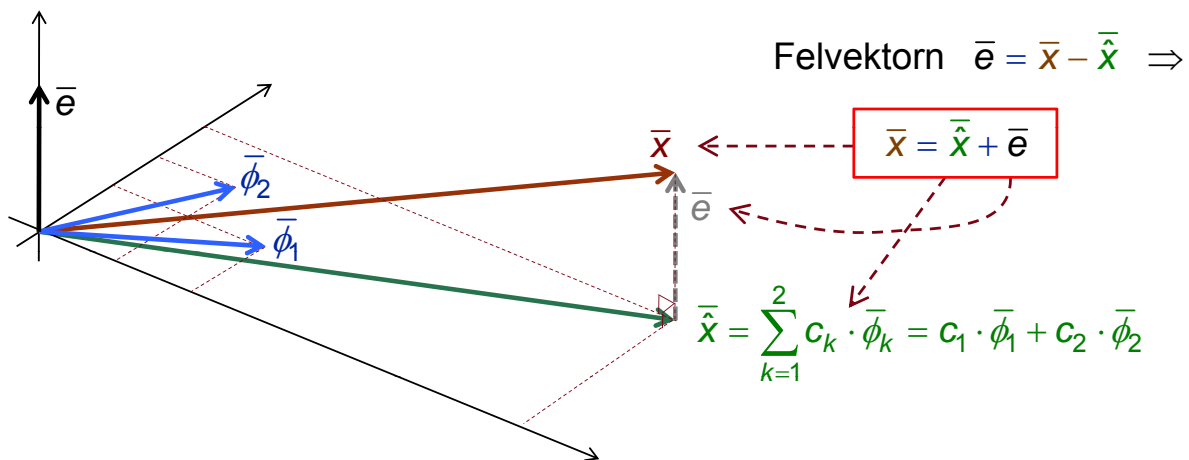
Varför? (se även boken sid. 75)

1. Ofta enklare att generera $\hat{x}(t) = \sum_k c_k \cdot \phi_k(t)$ än att generera den fullständiga signalen $x(t)$ direkt.
2. Svårt/omöjligt att lagra en tidskontinuerlig signal $x(t)$.
Lagra istället motsvarande koefficienter $\{\dots, c_{-1}, c_0, c_1, c_2, \dots\}$.
3. Mycket lämpligt vid beräkning av utsignaler från linjära system!

Boken: Välj c_k & $\phi_k(t)$ så att signalenergin $\int |e(t)|^2 dt$ minimeras

där **felsignalen** är: $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

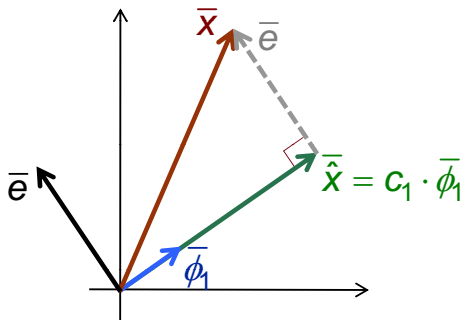
BILD 2-7: Jämför basfunktioner med basvektorer, Två basvektorer i ett 3-dimensionellt vektorrum:



Den bästa approximation av \bar{x} fås om $\bar{e} \perp \bar{\phi}_1$ och $\bar{e} \perp \bar{\phi}_2$, dvs.

$$\underline{\bar{e} \circ \bar{\phi}_1 = 0} \quad \& \quad \underline{\bar{e} \circ \bar{\phi}_2 = 0} \quad (\text{skalärprodukt})$$

Förtydligande exempel: En basvektor i ett 2-dimensionellt vektorrum



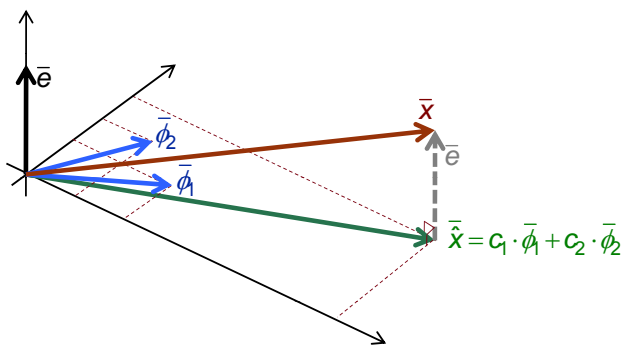
$\bar{x} = \hat{\bar{x}} + \bar{e}$, där $\hat{\bar{x}} = c_1 \cdot \bar{\phi}_1$ är bästa möjliga approximation av \bar{x} om $\bar{e} \perp \bar{\phi}_1$, dvs. $\bar{e} \circ \bar{\phi}_1 = 0$, där $\bar{e} = \bar{x} - \hat{\bar{x}}$

$$\bar{e} \circ \bar{\phi}_1 = (\bar{x} - \hat{\bar{x}}) \circ \bar{\phi}_1 = 0 \Rightarrow \bar{x} \circ \bar{\phi}_1 = \hat{\bar{x}} \circ \bar{\phi}_1 = c_1 \cdot \bar{\phi}_1 \circ \bar{\phi}_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{|\bar{\phi}_1|^2} (\bar{x} \circ \bar{\phi}_1)$$

Skalarprodukten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_N) \\ \bar{b} &= (b_1, b_2, \dots, b_N) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{a} \circ \bar{b} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_N b_N = \sum_{n=1}^N a_n b_n$$

Två basvektorer i ett 3-dimensionellt vektorrum



För varje basvektor $\bar{\phi}_k$ gäller därför följande:

$$\bar{e} \circ \bar{\phi}_k = (\bar{x} - \hat{\bar{x}}) \circ \bar{\phi}_k = 0 \Rightarrow \bar{x} \circ \bar{\phi}_k = \hat{\bar{x}} \circ \bar{\phi}_k = \sum_p c_p (\bar{\phi}_p \circ \bar{\phi}_k)$$

$$k = 1: \bar{x} \circ \bar{\phi}_1 = c_1 (\bar{\phi}_1 \circ \bar{\phi}_1) + c_2 (\bar{\phi}_2 \circ \bar{\phi}_1)$$

$$k = 2: \bar{x} \circ \bar{\phi}_2 = c_1 (\bar{\phi}_1 \circ \bar{\phi}_2) + c_2 (\bar{\phi}_2 \circ \bar{\phi}_2)$$

Lös ekvationssystemet

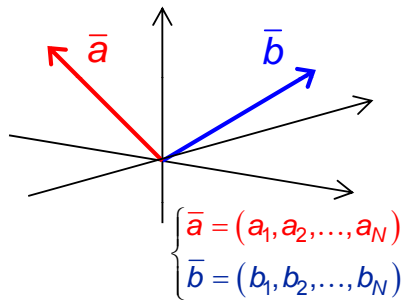
$$\Rightarrow c_1 \ \& \ c_2$$

Om många basvektorer \Rightarrow linjärt ekvationssystem av hög ordning \Rightarrow Jobbig att lösa!

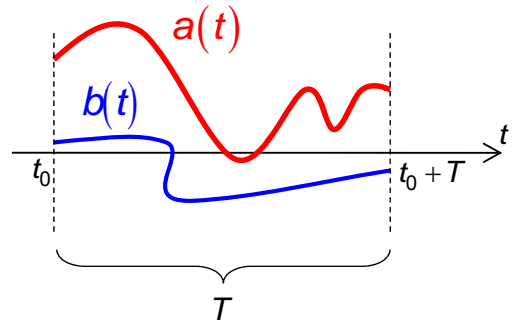
Om ortogonala basvektorer $\Rightarrow \bar{\phi}_p \circ \bar{\phi}_k = \begin{cases} |\bar{\phi}_k|^2; & p = k \\ 0; & p \neq k \end{cases} \Rightarrow c_k = \frac{1}{|\bar{\phi}_k|^2} (\bar{x} \circ \bar{\phi}_k) \quad \forall k$

Skalärprodukt & Inre produkt – för vektorer & funktioner

Vektorer



Funktioner



$a_k, b_k \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Skalärprodukt:

$$\underline{\underline{\bar{a} \circ \bar{b}}} = \bar{a} \cdot \bar{b}^T = (a_1, a_2, \dots, a_N) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix}$$

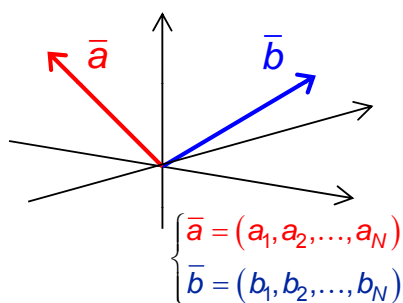
$$= \underline{\underline{\sum_{k=1}^N a_k b_k}}$$

Om $a(t), b(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Skalärprodukt:

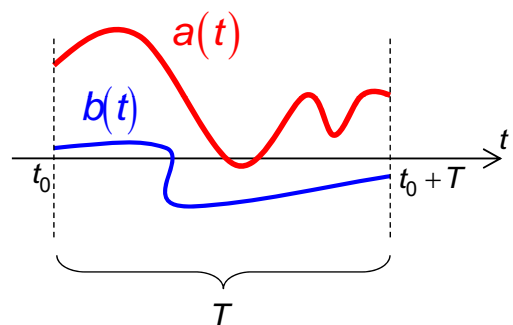
$$\underline{\underline{a(t) \circ b(t) = \int_T a(t) b(t) dt}}$$

Skalärprodukt & Inre produkt – för vektorer & funktioner

Vektorer



Funktioner



Om $a_k, b_k \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Inre produkt:

$$\underline{\underline{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}} = \bar{a} \cdot (\bar{b}^T)^* = (a_1, a_2, \dots, a_N) \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_N^* \end{pmatrix}$$

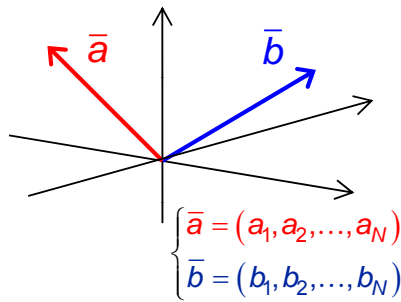
$$= \underline{\underline{\sum_{k=1}^N a_k b_k^*}}$$

Om $a(t), b(t) \in \mathbb{C} \Rightarrow$ Inre produkt:

$$\underline{\underline{\langle a(t), b(t) \rangle = \int_T a(t) b^*(t) dt}}$$

Skalärprodukt & Inre produkt – för vektorer & funktioner

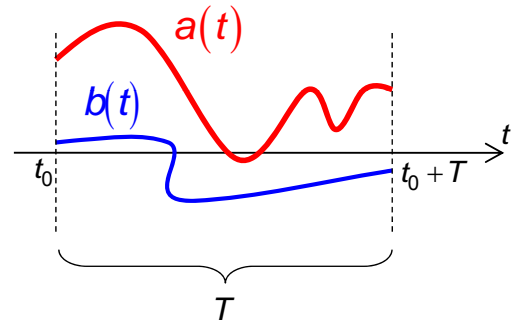
Vektorer



Om $a_k, b_k \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \circ \vec{b}$

Om $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

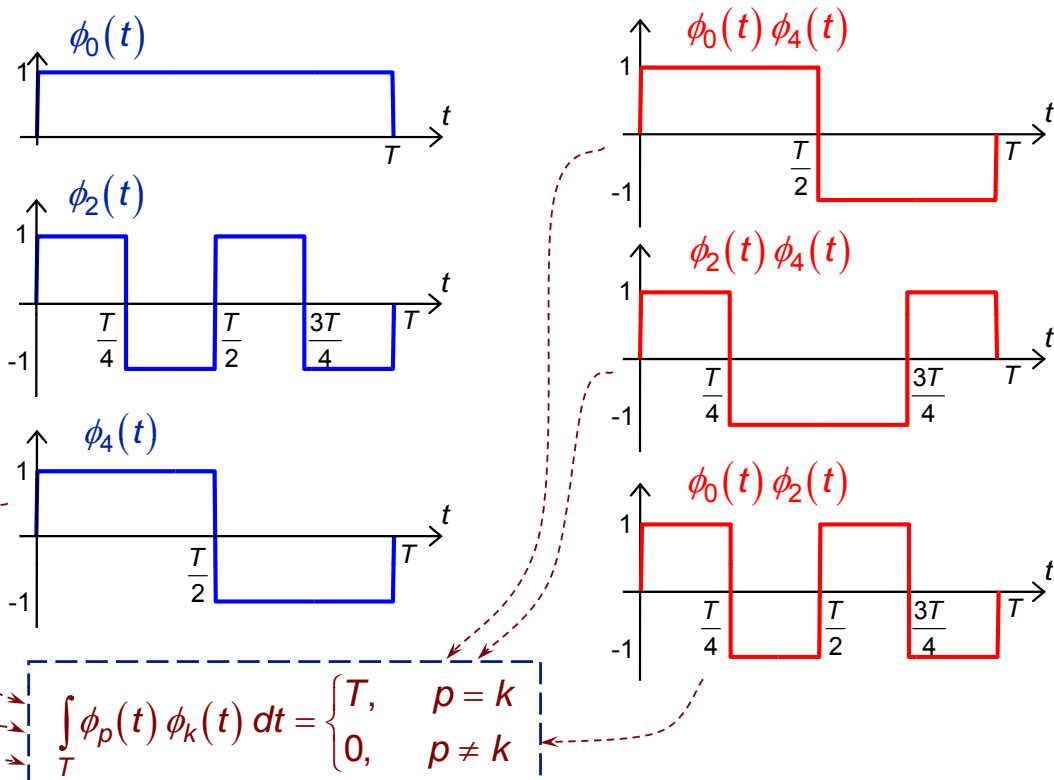
Funktioner



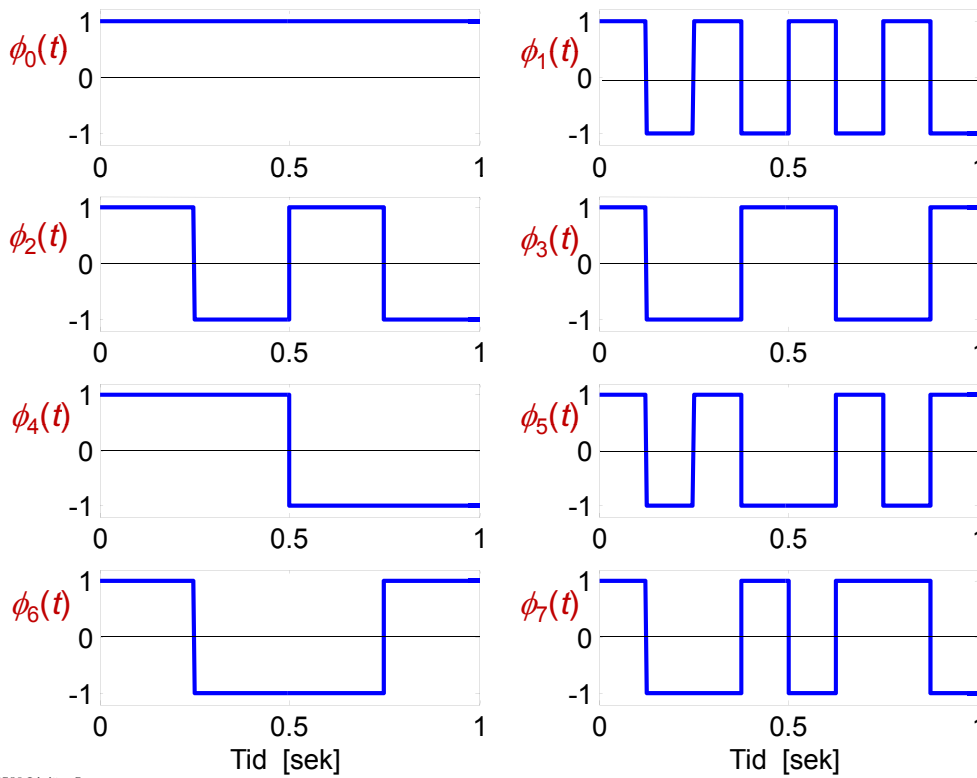
Om $a(t), b(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow$
 $\langle a(t), b(t) \rangle = a(t) \circ b(t)$

Om $a(t) \perp b(t) \Rightarrow \langle a(t), b(t) \rangle = 0$

Exempel 1 – tre ortogonala fyrkantpulsar (≈ Fig. 2.10–2.12)



Exempel 2 – approximera sinuspuls med ortogonala Walsh-funktioner



(Fig. 2.16)

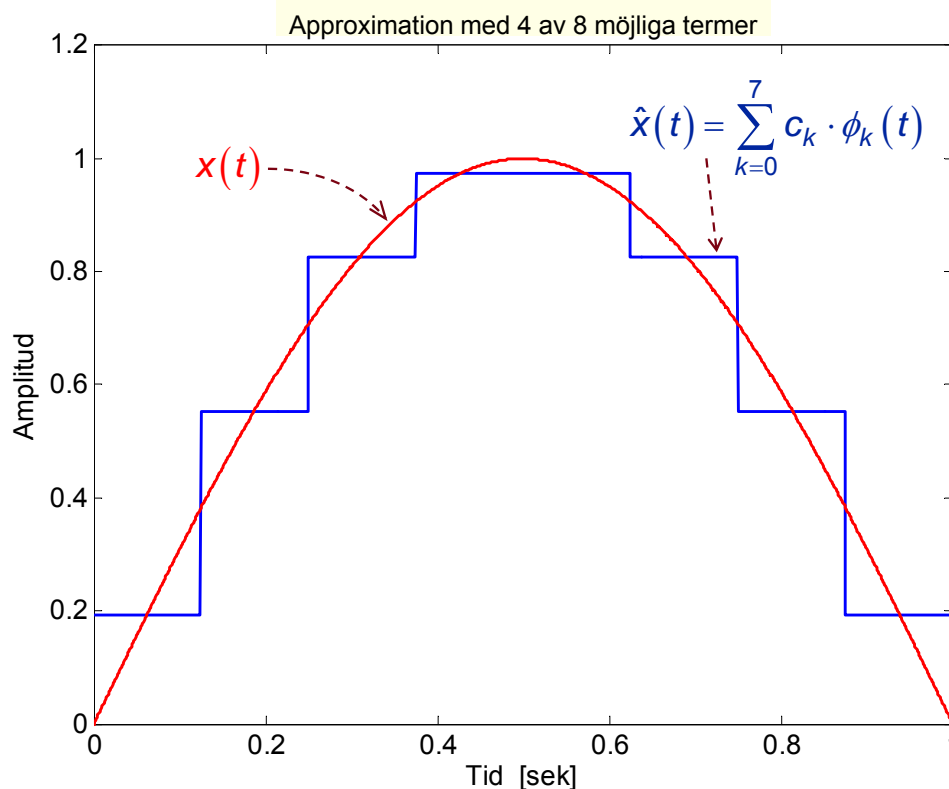
$T = 1$ sek

Välj följande
koefficienter:

- $c_0 = 0.636$
- $c_1 = 0$
- $c_2 = 0$
- $c_3 = -0.053$
- $c_4 = 0$
- $c_5 = -0.127$
- $c_6 = -0.264$
- $c_7 = 0$

forts. Exempel 2 – approximera sinuspuls med Walsh-funktioner

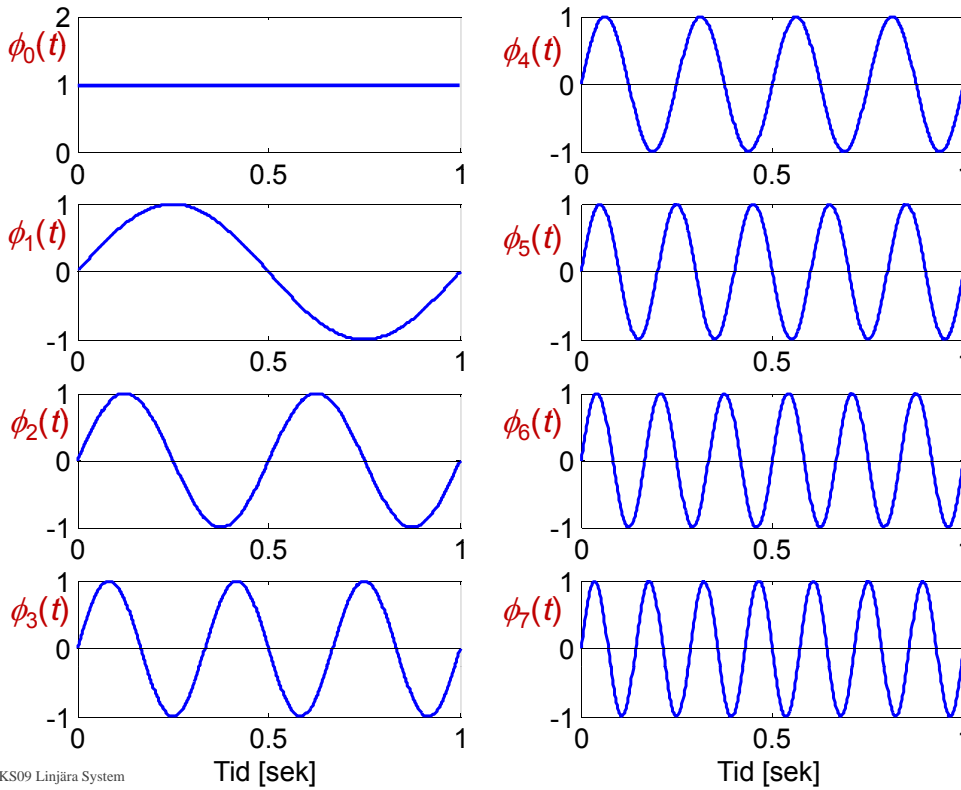
(Fig. 2.15)



- $c_0 = 0.636$
- $c_1 = 0$
- $c_2 = 0$
- $c_3 = -0.053$
- $c_4 = 0$
- $c_5 = -0.127$
- $c_6 = -0.264$
- $c_7 = 0$

Exempel 3 – approximera fyrkantpuls med sinusfunktioner

(Fig. 2.14)

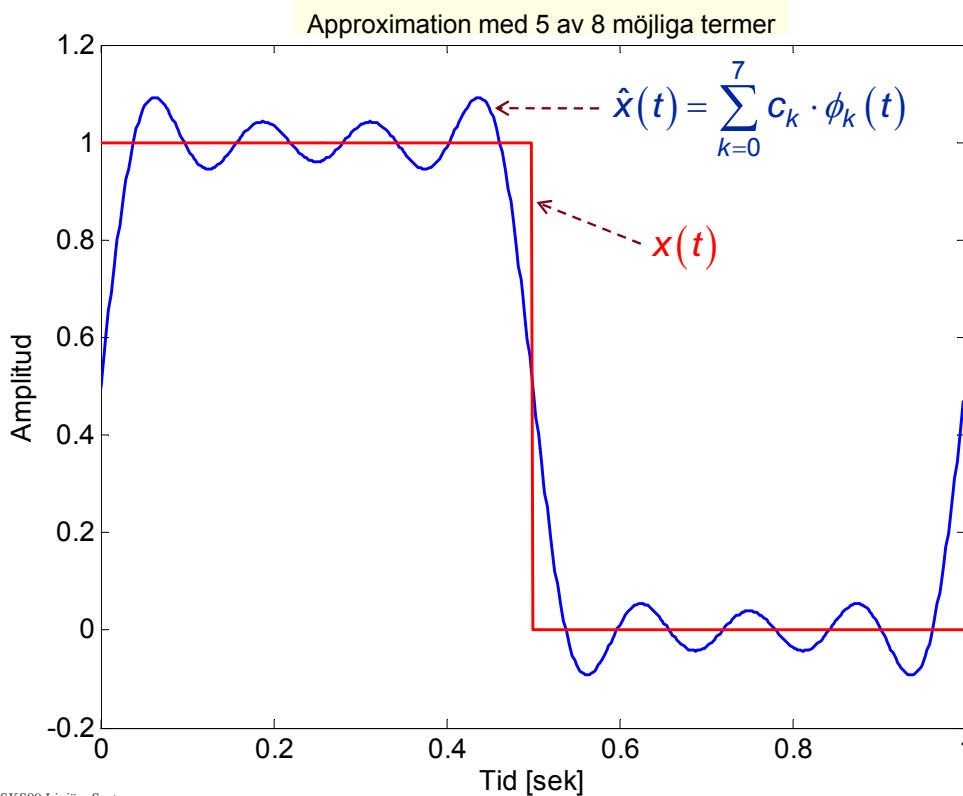


Välj följande
koefficienter:

- $c_0 = 1/2$
- $c_1 = 2/\pi$
- $c_2 = 0$
- $c_3 = 2/3\pi$
- $c_4 = 0$
- $c_5 = 2/5\pi$
- $c_6 = 0$
- $c_7 = 2/7\pi$

forts. Exempel 3 – approximera fyrkantpuls med sinusfunktioner

(Fig. 2.13)



- $c_0 = 1/2$
- $c_1 = 2/\pi$
- $c_2 = 0$
- $c_3 = 2/3\pi$
- $c_4 = 0$
- $c_5 = 2/5\pi$
- $c_6 = 0$
- $c_7 = 2/7\pi$

**Bygga periodiska signaler med cosinus-basfunktioner**

Vi vet sedan tidigare:

Summa av cos med **samma** (vinkel-)frekvens $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ är T_0 -periodisk:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \alpha) + B\cos(\omega_0 t + \beta) = C\cos(\omega_0 t + \gamma)$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t + T_0)$$

**Bygga periodiska signaler med cosinus-basfunktioner**

Summa av cos med **olika** (vinkel-)frekvenser ω_a & ω_b :

$$\underline{x(t) = A\cos(\omega_a t + \alpha) + B\cos(\omega_b t + \beta)}$$

Om $x(t)$ är T_0 -periodisk, så gäller:

$$x(t + T_0) = A\cos(\omega_a t + \omega_a T_0 + \alpha) + B\cos(\omega_b t + \omega_b T_0 + \beta) = x(t)$$

$$\Leftrightarrow \text{Krav: } \begin{cases} \omega_a T_0 = k \cdot 2\pi \\ \omega_b T_0 = m \cdot 2\pi \end{cases}, \quad k, m \in \mathbb{N}_+ \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_a = k \cdot \omega_0 \\ \omega_b = m \cdot \omega_0 \end{cases}, \quad \text{där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{samt } \omega_0 = \text{SGD}(\omega_a, \omega_b)$$

Största Gemensamma Delare (eng: GCD)

(ω_0 : grundvinkelfrekvensen)



Bygga periodiska signaler med cosinus-basfunktioner

Test av periodicitet:

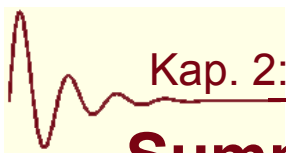
$x(t) = \sum_k A_k \cos/\sin(\omega_k t + \varphi_k)$ är **periodisk** med periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

om $\frac{\omega_k}{\omega_m} \in \mathbb{Q}$ för alla vinkelfrekvenser ω_k och ω_m i $x(t)$.

Då är $\omega_0 = \text{SGD}(\dots, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots)$

Ett exempel på nästa bild

& ytterligare ett par exempel på tavlan...

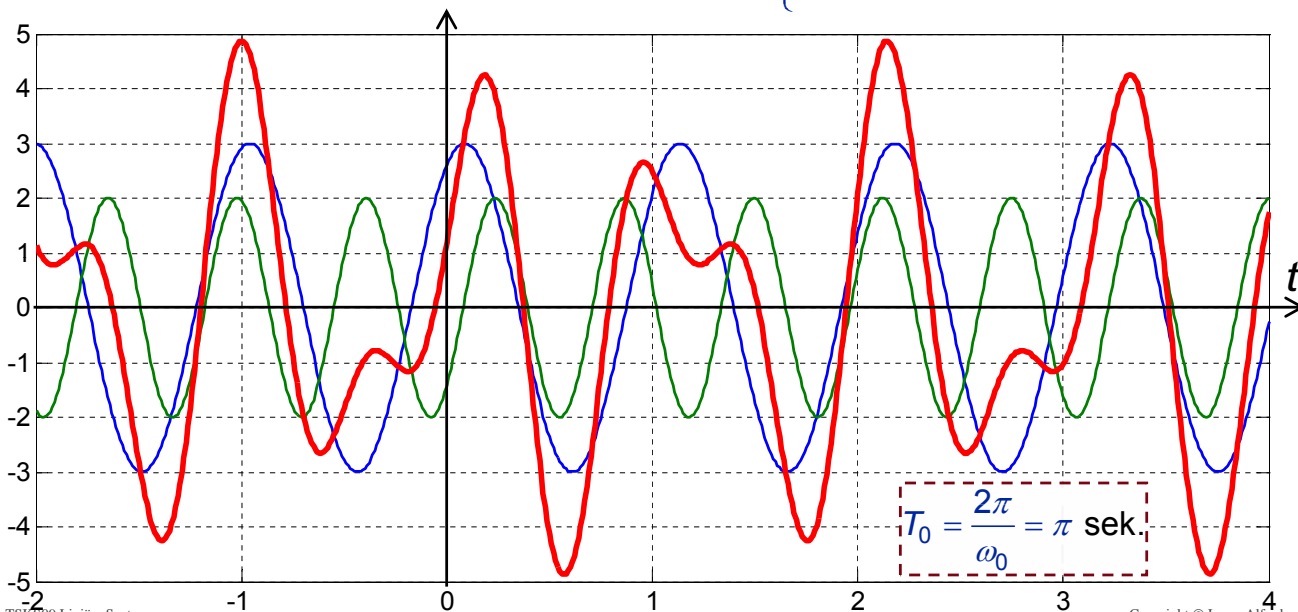


Summa av cos/sin

$$x(t) = \underbrace{3 \cos\left(6t - \frac{\pi}{6}\right)}_{\text{blå kurva}} + \underbrace{2 \cos\left(10t - \frac{3\pi}{4}\right)}_{\text{grön kurva}}$$

röd kurva

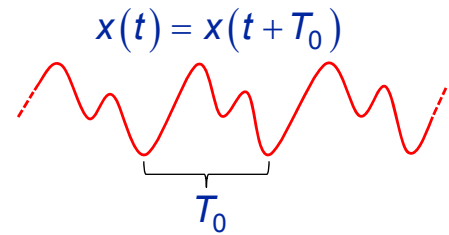
$\frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{6}{10} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ Periodisk!
 Periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$,
 där $\omega_0 = \text{SGD}(6, 10) = 2$ rad/s



Fouriersserietveckling av periodiska signaler

Bild 14&15: $x(t) = \sum_k A_k \cos/\sin(\omega_k t + \varphi_k)$

är **periodisk** med periodtid $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$
 omm $\omega_k = k \cdot \omega_0$, där $k \in \mathbb{N}$.



För **alla** praktiska (= alla fysikaliska) T_0 -periodiska signaler $x(t)$ gäller

$$x(t) \hat{=} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

Detta kallas **fouriersserietveckling** av $x(t)$

$\omega_0 = 2\pi f_0$: grundvinkelfrekvens

X_0 : medelvärdesnivån

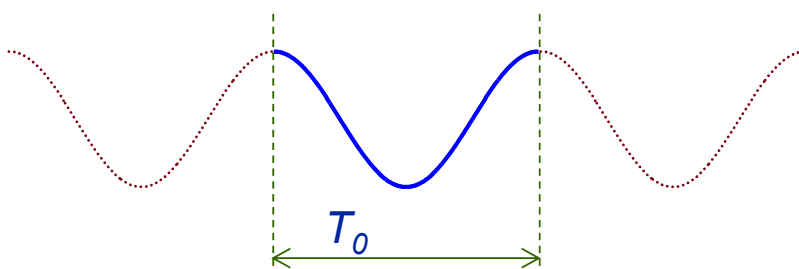
$f_0 = \frac{1}{T_0}$: grundfrekvens

$\hat{X}_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1)$: grundton

$\hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$, $k = 2, 3, 4, \dots$: övertoner

} deltoner

Basfunktioner $\phi_k(t) = \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$!

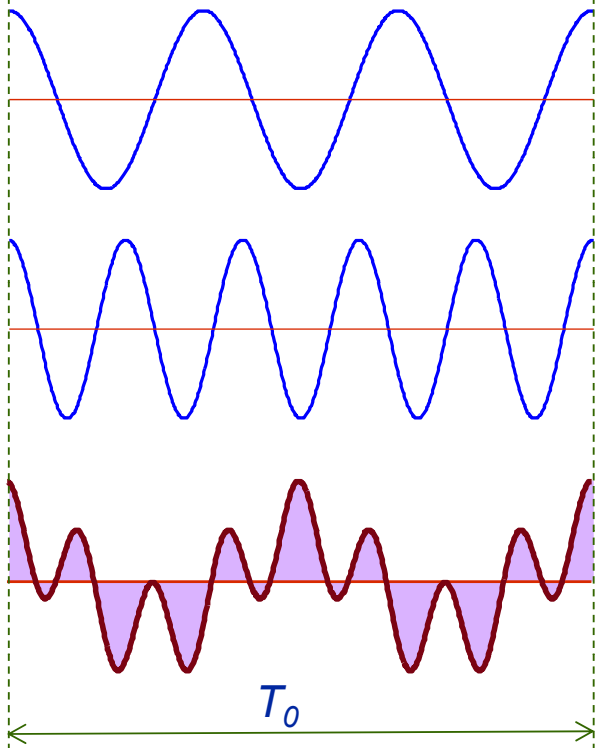


$$\phi_1(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$\phi_3(t) = \cos(3\omega_0 t)$$

$$\phi_5(t) = \cos(5\omega_0 t)$$

$\cos(k\omega_0 t)$ och $\cos(p\omega_0 t)$ är ortogonala basfunktioner!



$$\phi_3(t) = \cos(3\omega_0 t)$$

$$\left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \right)$$

$$\phi_5(t) = \cos(5\omega_0 t)$$

$$\phi_3(t)\phi_5(t) = \cos(3\omega_0 t) \cdot \cos(5\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \phi_3(t) \circ \phi_5(t) = \int_0^{T_0} \phi_3(t)\phi_5(t) dt = 0$$

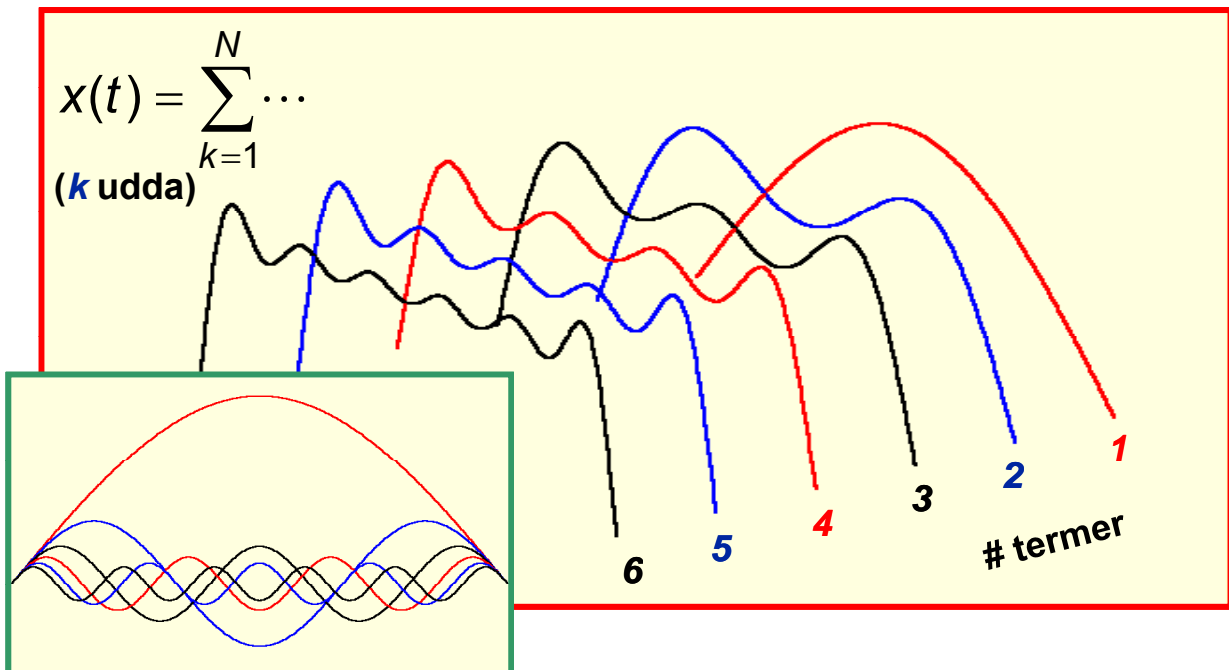
Även fasförskjutna cosinusar är ortogonala!

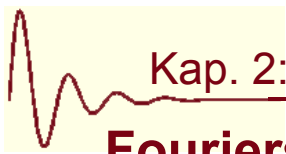
Ex: Approximation av fyrkantvåg



$$x(t) = \sum_{k=1}^N \dots$$

(k udda)





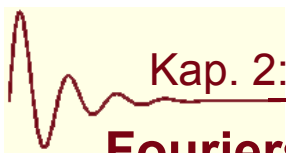
Fourierserietutveckling av periodiska signaler

JAVA-demo:

Generering av periodiska signaler med hjälp av (co)sinusformade basfunktioner:

www.falstad.com/fourier

OBS – testa även detta själv!



Fourierserietutveckling av periodiska signaler

Farbror Euler: $\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

⇒ Använd basfunktionerna $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ istället för $\cos(k\omega_0 t + \theta_k)$

⇒ Alternativ (matematiskt lämpligare) fourierserietutveckling:
(visas på tavlan)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

Komplex fourierserietutveckling av $x(t)$

Komplexa fouriersseriekoefficienter:

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

(visas på tavlan)

Fourierserietveckling av periodiska signaler

Jämförelse/sammanfattning:

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$x(t)$ är reellvärd

$$\Leftrightarrow c_{-k} = c_k^*$$

Enkelsidigt spektrum ($k \geq 0$):

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= c_0 \\ \hat{X}_k &= 2|c_k| \end{aligned} \right\} \text{Amplitudspektrum}$$

$$\theta_k = \arg c_k \text{ Fasspektrum}$$

Dubbelsidigt spektrum:

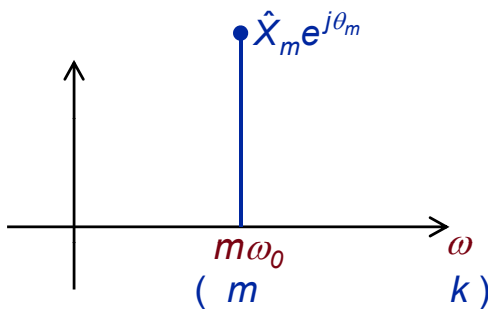
$$|c_k| \text{ Amplitudspektrum}$$

$$\arg c_k \text{ Fasspektrum}$$

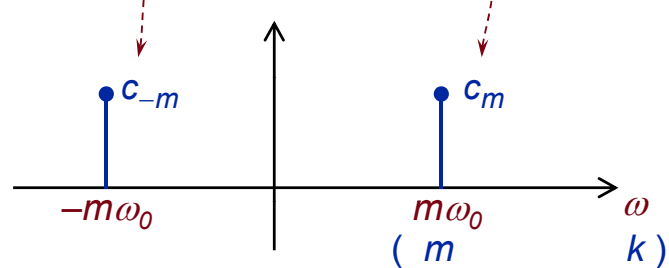
Spektrum – grafisk beskrivning av periodisk signal

(se även tidigare föreläsning)

$$\hat{X}_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\theta_m}}_{c_m} \cdot e^{jm\omega_0 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\theta_m}}_{c_m^* = c_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_0 t}$$



Enkelsidigt
komplext spektrum



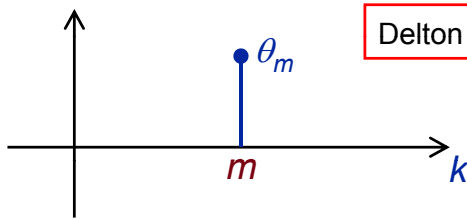
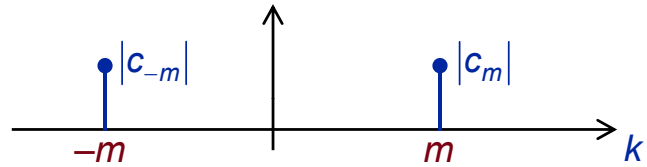
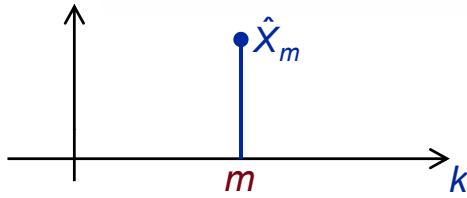
Dubbelsidigt
komplext spektrum

(Antingen ω -axel eller k -axel)

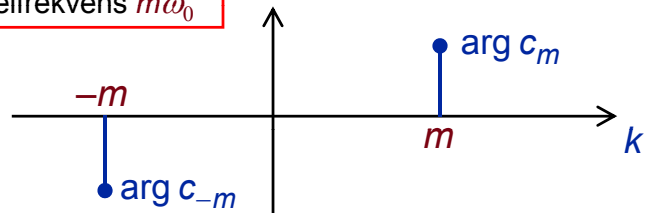
Spektrum – grafisk beskrivning av periodisk signal

(se även tidigare föreläsning)

$$\hat{X}_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m) = \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{j\theta_m}}_{c_m} \cdot e^{jm\omega_0 t} + \underbrace{\frac{\hat{X}_m}{2} e^{-j\theta_m}}_{c_m^* = c_{-m}} \cdot e^{-jm\omega_0 t}$$



Delton m har vinkelfrekvens $m\omega_0$



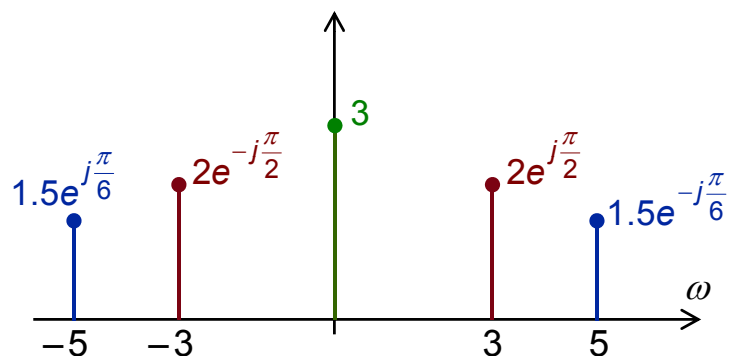
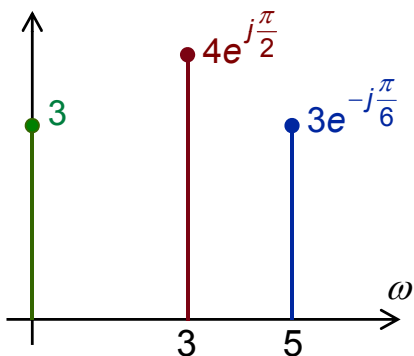
Enkelsidigt amplitudspektrum
resp. **fasspektrum**

Dubbelsidigt amplitudspektrum
resp. **fasspektrum**

Komplexvärt spektrum – ett allmänt exempel:

$$z(t) = 3 + 4 \cos\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) + 3 \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 3 + 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j3t} + 2e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j3t} + 1.5e^{-j\frac{\pi}{6}}e^{j5t} + 1.5e^{j\frac{\pi}{6}}e^{-j5t}$$



Enkelsidigt spektrum

Dubbelsidigt spektrum

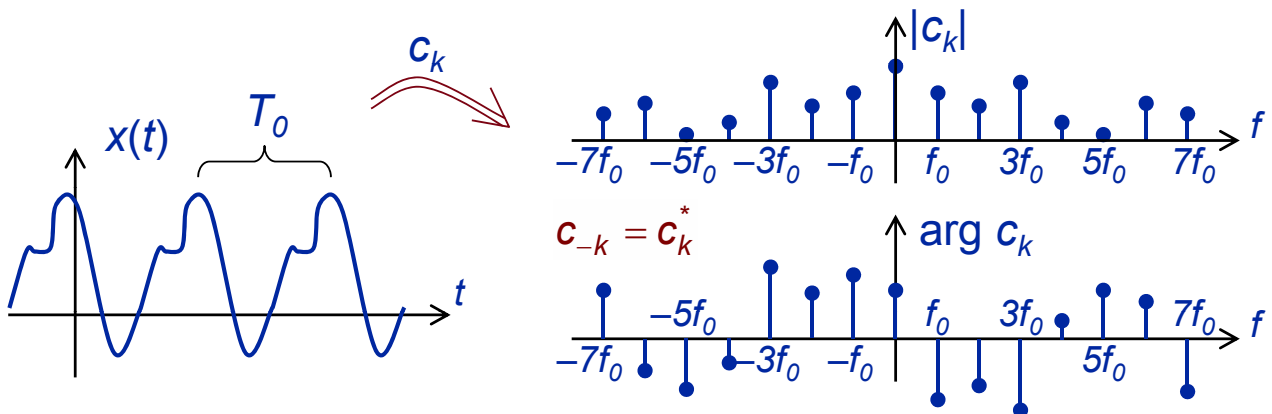
Fourieranalys & fouriersyntes

Fourieranalys:

$x(t)$ och ω_0 (eller T_0) är givna. Bestäm $c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$

Signalens frekvensspektrum, dvs. c_k ritad som funktion av frekvens eller vinkelfrekvens, är ofta av intresse.

Vanligen ritar man då amplitudspektrum och fasspektrum:

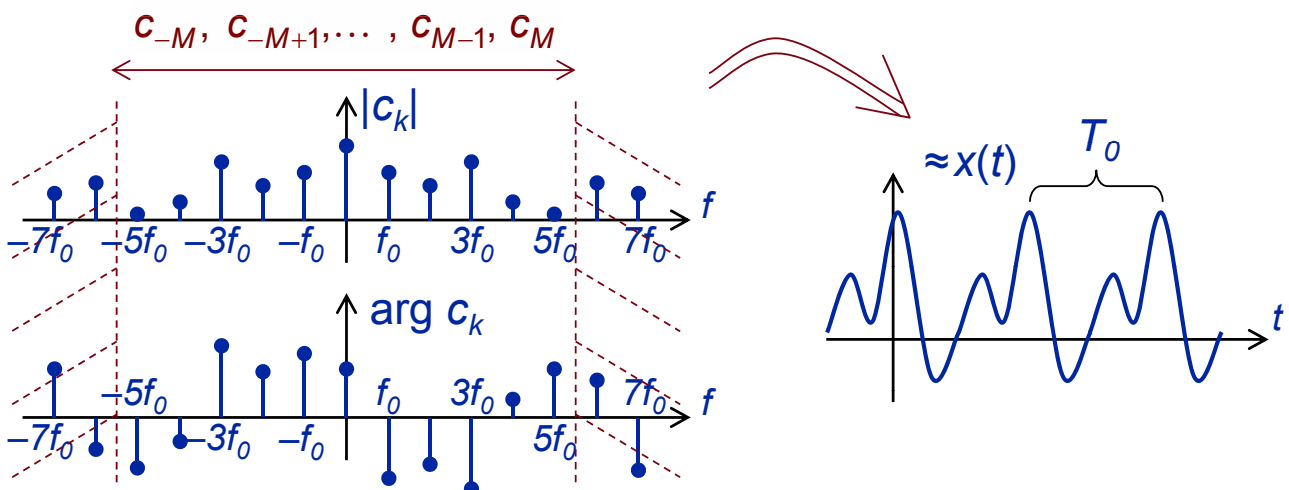


Fourieranalys & fouriersyntes

Fouriersyntes:

c_k och ω_0 (eller T_0) är givna. Bestäm $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$

I praktiska sammanhang nöjer man sig med en approximation: $x(t) \approx \sum_{k=-M}^M c_k e^{jk\omega_0 t}$



Vektorer

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Inre produkt

$$\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \sum_k a_k \cdot b_k^*$$

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = 0$$

$$\bar{x} \approx \hat{\bar{x}} = \sum_k c_k \cdot \bar{\Phi}_k$$

Om ortogonala basvektorer $\bar{\Phi}_k$

$$\Rightarrow \langle \bar{\Phi}_p, \bar{\Phi}_k \rangle = \begin{cases} 0; & p \neq k \\ \|\bar{\Phi}_k\|^2; & p = k \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{\|\bar{\Phi}_k\|^2} \cdot \langle \bar{x}, \bar{\Phi}_k \rangle$$

Funktioner

$a(t), b(t)$ i ett tidsintervall av längd T (T_0 om periodisk)

Inre produkt

$$\langle a, b \rangle = \int_T a(t) \cdot b(t)^* dt$$

$$a(t) \perp b(t) \Leftrightarrow \langle a, b \rangle = 0$$

$$x(t) \approx \hat{x}(t) = \sum_k c_k \cdot \Phi_k(t)$$

Om ortogonala basfunktioner $\Phi_k(t)$

$$\langle \Phi_p, \Phi_k \rangle = \begin{cases} 0; & p \neq k \\ \|\Phi_k\|^2; & p = k \end{cases}$$

$$\|\Phi_k\|^2 = \int_T |\Phi_k(t)|^2 dt$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{\|\Phi_k\|^2} \cdot \langle x, \Phi_k \rangle$$

T_0 -periodisk signal $x(t)$ med $\Phi_k(t) = e^{jkw_0 t}$; $w_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = \hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jkw_0 t}} \quad (T=T_0)$$

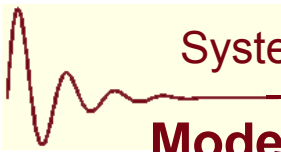
samt $\Phi_p \perp \Phi_k \Leftrightarrow \langle \Phi_p, \Phi_k \rangle = \begin{cases} 0; & p \neq k \\ \|\Phi_k\|^2 = T_0; & p = k \end{cases}$

$$\Rightarrow \underline{c_k = \frac{1}{\|\Phi_k\|^2} \langle x, \Phi_k \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jkw_0 t} dt}$$

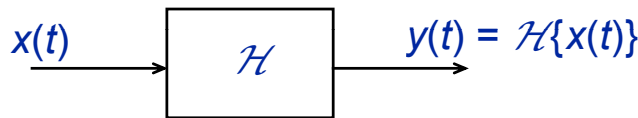
Lasses häfte

Föreläsning 6

- Systemegenskaper
 - Kausalitet
 - Tidsinvarians
 - Stabilitet
 - Linjäritet
 - Linjärisering av icke-linjära system



Modellering av fysikaliska system som diskreta system



Lumped = diskret

Ett system är **diskret** om systemets fysikaliska storlek är så liten att *hela systemet* exciteras (reagerar) *samtidigt* av en insignal.

Ett system som *inte* är diskret kallas för ett **distribuerat** system.

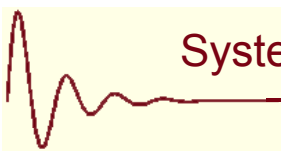
Modellering av system

Hittills har vi behandlat modeller för (främst periodiska) *signaler*.

Nu skall vi fokusera på modeller för *fysikaliska system*.

Speciellt intressant/viktigt:

- Systemegenskaper
- Beräkna systemets utsignal $y(t)$ för olika insignaler $x(t)$



Systemegenskaper



Systemoperatorn \mathcal{H} är olika för olika system.

Några

systemexempel:

$$y(t) = 3 \cdot x(t)$$

$$y(t) = 7 + x(t - 2)$$

$$y(t) = x(2 - t)$$

$$y(t) = 2 \cdot \frac{dx(t)}{dt}$$

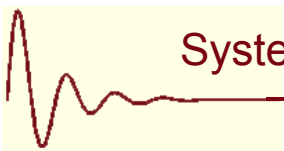
$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \sqrt{x(t)}$$

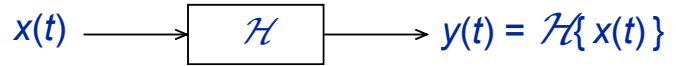
$$y(t) = \sum_{k=-2}^2 x(t - k \cdot T)$$

För ett **KAUSALT SYSTEM** gäller att dess utsignal *inte* beror på insignalens framtida värden, dvs. $y(t_0)$ beror *inte* på $x(t)$ för något $t > t_0$.

Ett system som *inte* är kausalt kallas **icke-kausalt**.



Systemegenskaper

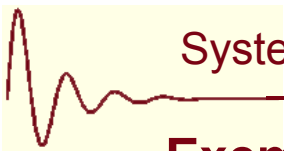


Egenskaperna hos ett **TIDSINVARIANT SYSTEM** ändras inte med tiden.
 Konsekvens: $x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)$. ("→" = "ger upphov till")

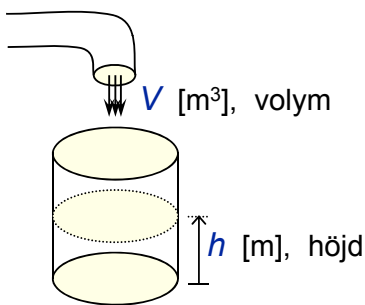
Inte tidsinvariant system \Leftrightarrow **tidsvariant** (= tidsvariabelt, icke tidsinvariant)

Utsignalen från ett **STABILT SYSTEM** är begränsad för *alla* begränsade insignaler, dvs $|x(t)| \leq M < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq N < \infty$ $M, N \in \mathbb{R}$

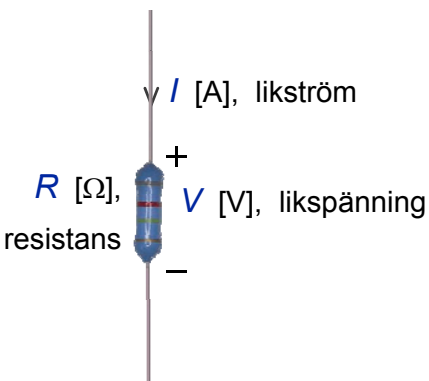
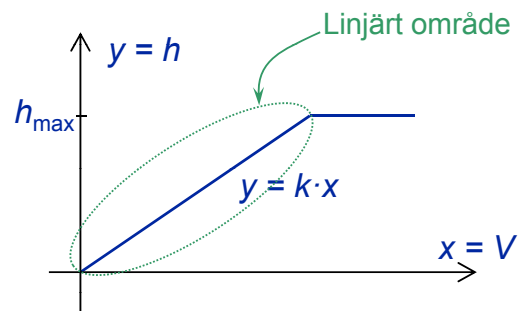
Marginellt stabilt system: utsignalen är begränsad för *de flesta* begränsade insignaler.
Instabilt system: utsignalen är obegränsad för *alla* begränsade insignaler.



Exempel på Linjära Fysikaliska System

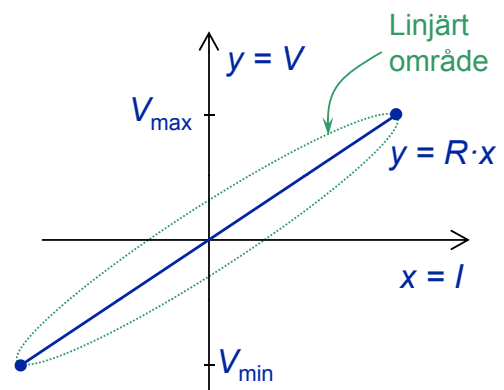


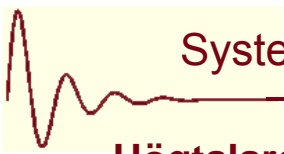
Vattentank



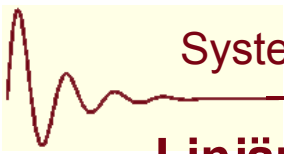
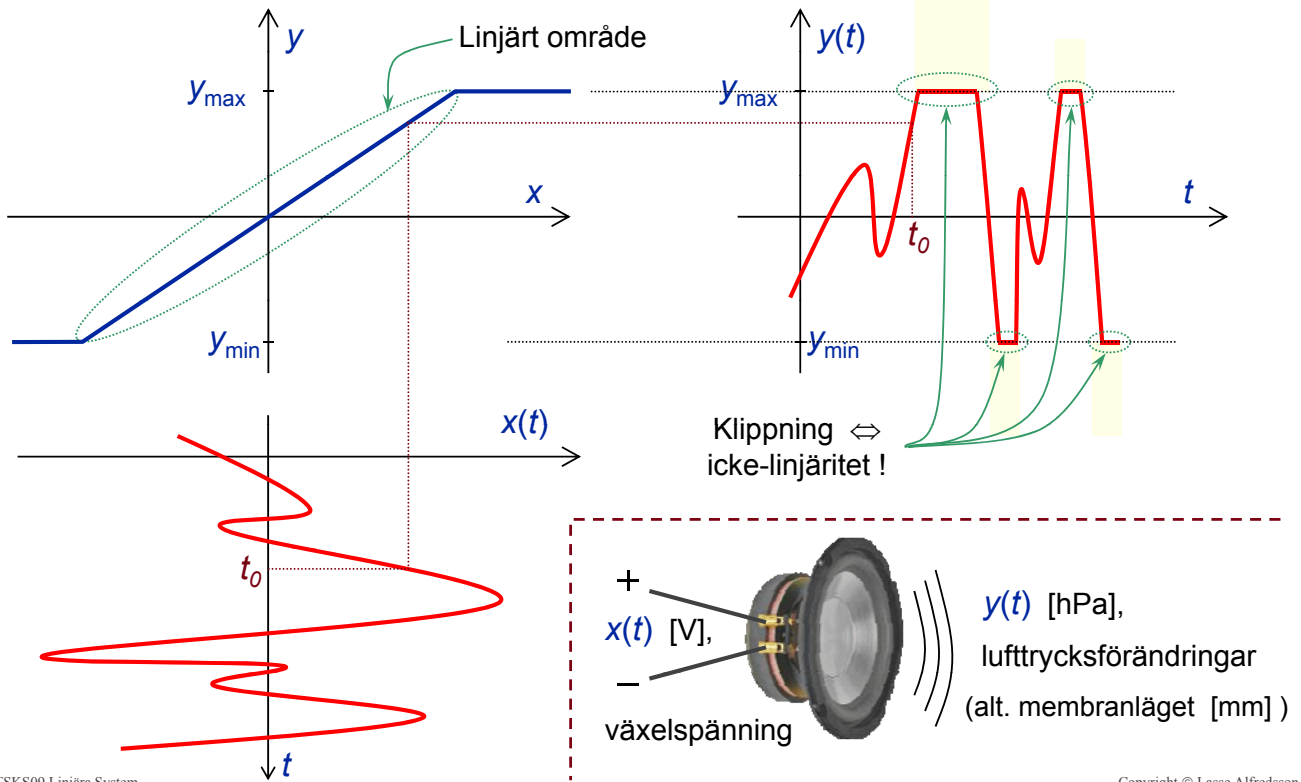
Motstånd

Ohms lag:
 $V = R \cdot I$





Högtalaren – ett linjärt system med tidsberoende signaler



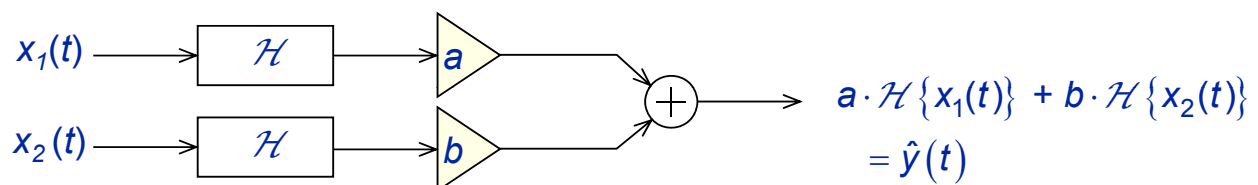
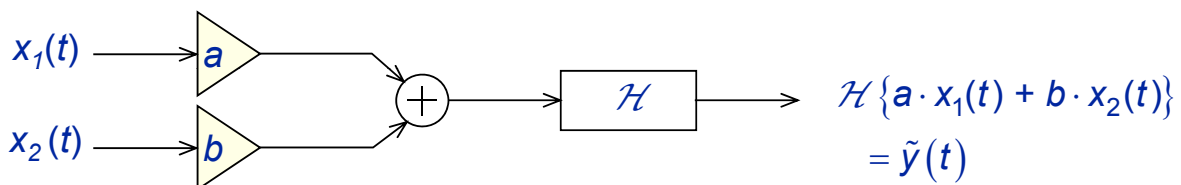
Linjäritet

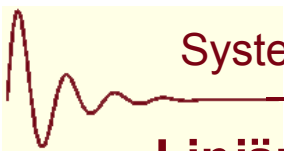
$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

Låt insignalerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$ ge upphov till utsignalerna $y_1(t)$ resp. $y_2(t)$ och betrakta insignalen $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ (a, b konstanter)

\Rightarrow Systemet är **linjärt** om utsignalen kan skrivas som $y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

Om systemet \mathcal{H} är linjärt gäller följaktligen nedan att $\tilde{y}(t) = \hat{y}(t)$:





Linjäritet

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\mathcal{H}} \longrightarrow y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

Varför är linjäritet en så central systemegenskap?

Allmänt samband: Låt $x_k(t) \rightarrow y_k(t) = \mathcal{H}\{x_k(t)\}$

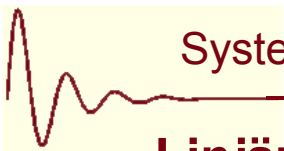
och låt $x(t) = c_1 \cdot x_1(t) + c_2 \cdot x_2(t) + c_3 \cdot x_3(t) + \dots = \sum_k c_k \cdot x_k(t)$

Om systemet är **linjärt** gäller följande:

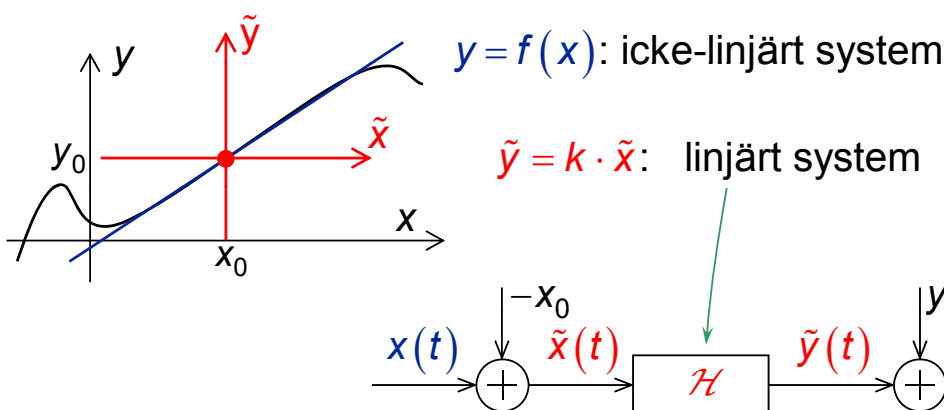
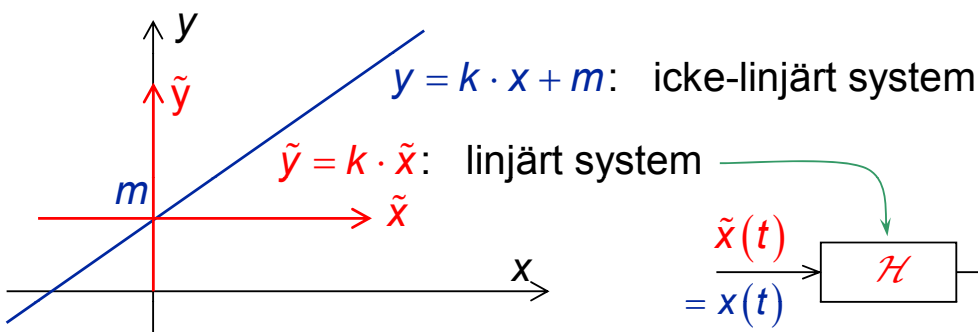
$$y(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t) + c_3 \cdot y_3(t) + \dots = \sum_k c_k \cdot y_k(t)$$

Detta blir speciellt intressant om alla $x_k(t)$ är **basfunktioner**, helst ortogonala, dvs. $x_k(t) = \phi_k(t) \Rightarrow$ Alla $y_k(t) = \mathcal{H}\{\phi_k(t)\}$ behöver bara beräknas en gång!

Periodiska signaler är speciellt intressanta, dvs. då $x_k(t) = \phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$



Linjär modell av icke-linjärt system



Det icke-linjära systemet är approximativt linjärt nära $(x, y) = (x_0, y_0)$

KAPITEL 4–5

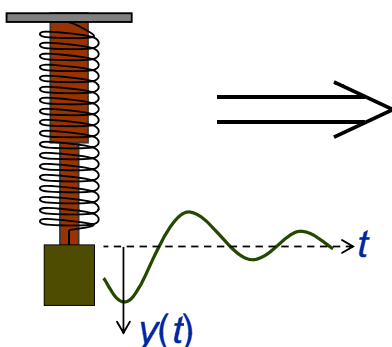
& Lasses häfte

Föreläsning 7–8

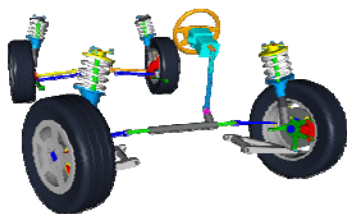
- Differentialekvations-
beskrivning av LTI-system
 - Exempel: mekaniskt
svängningssystem
- Linjära elektriska nät/system
 - Grundläggande samband
för RLC-nät

Systembeskrivning – mekaniska svängningssystem

Svängande dämpad fjäder

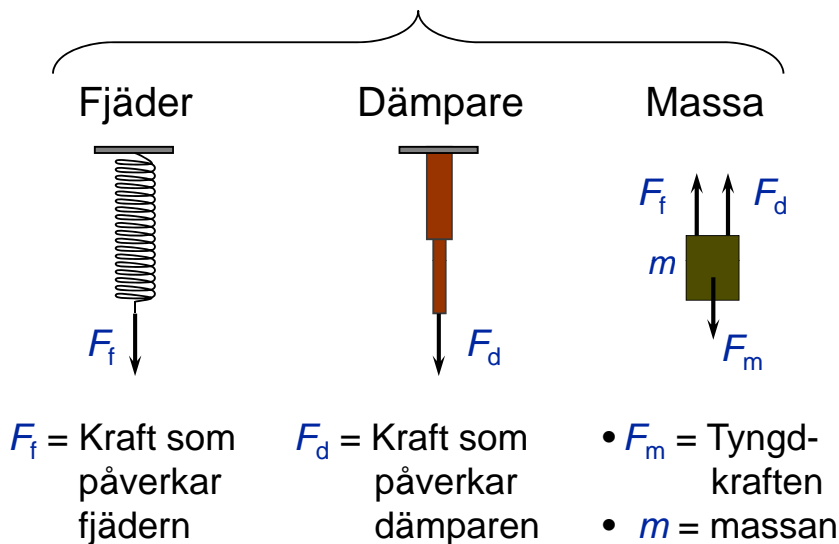


Tillämpningsexempel:



TSKS09 Linjära System

Byggblock för att representera mekaniska svängningssystem

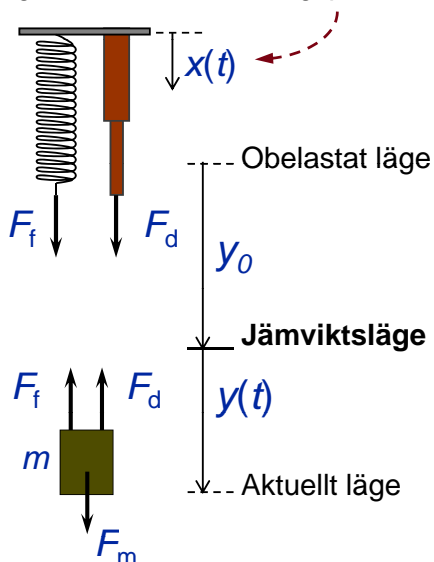


Copyright © Lasse Alfredsson

Systembeskrivning – mekaniska svängningssystem

Svängande dämpad fjäder – frilägg och sätt ut krafter:

Insignal: ändrad infästningspunkt



Fjäderkraften $F_f = k \cdot y_{\text{tot}}(t) = k \cdot (y_0 + y(t) - x(t))$

Dämpkraften $F_d = c \cdot (y_{\text{tot}}(t))' = c \cdot (y'(t) - x'(t))$

Tyngdkraften $F_m = m \cdot g$ ($g =$ tyngdaccelerationen)

Newtons 2:a lag: $F_m - F_f - F_d = m \cdot y''(t)$

$\Rightarrow m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = m \cdot g - k \cdot y_0 + c \cdot x'(t) + k \cdot x(t)$

Vid vila är $x=0, x'=0, y=0, y'=0, y''=0 \Rightarrow m \cdot g = k \cdot y_0$

$m \cdot y''(t) + c \cdot y'(t) + k \cdot y(t) = c \cdot x'(t) + k \cdot x(t)$

(Motsvarar bokens ekv. 4.28 för $y_{in}(t) = x(t)$, och $f(t) = 0$)

TSKS09 Linjära System

Copyright © Lasse Alfredsson

Systembeskrivning – mekaniska svängningssystem

Systemet med fjäder, dämpare och massa resulterar alltså i en **linjär differentialekvation med konstanta koefficienter** som beskriver sambandet mellan insignalen $x(t)$ och utsignalen $y(t)$:

$$m \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + c \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k \cdot y(t) = c \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t)$$

En matematisk systembeskrivning kallas i boken för **the governing equation**

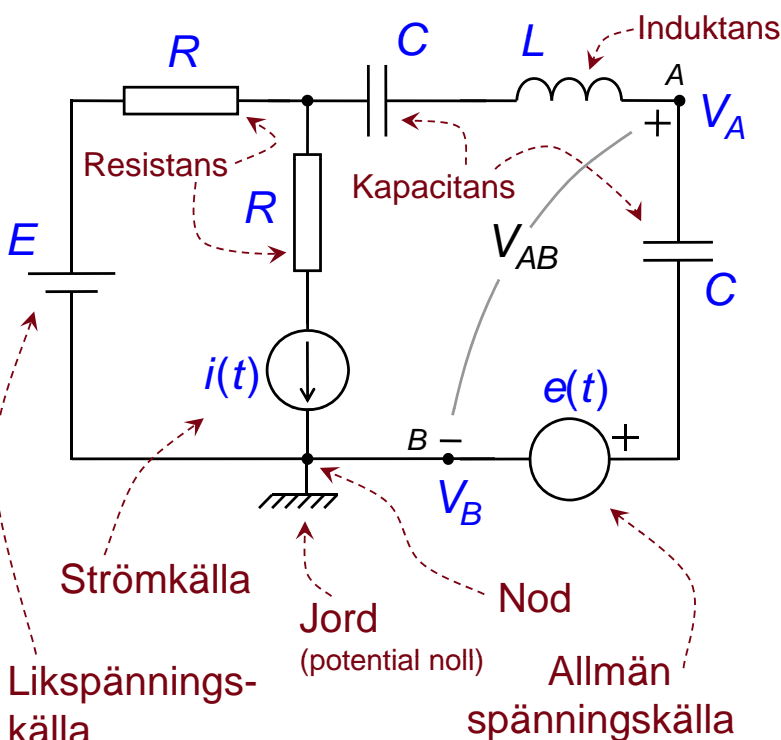
För varje insignal $x(t)$ erhålls $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

homogen lösning

partikulärlösning

Vid modellering av fysikaliska system som **linjära tidsinvarianta system (LTI-system)**, blir ofta den systembeskrivande ekvationen en linjär differentialekvation med konstanta koefficienter!

Linjära elektriska nät (system)



Ström

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Potential & Spänning

$$V_{AB} = V_A - V_B :$$

Spänningen mellan noderna A och B

V_A : Potentialen i nod A

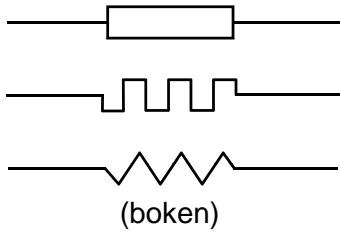
V_B : Potentialen i nod B

Tidsberoende spänning:

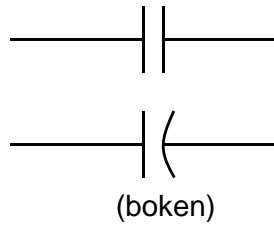
$$V_{AB}(t) = V_A(t) - V_B(t)$$

Exempel på alternativa nätelementsymboler

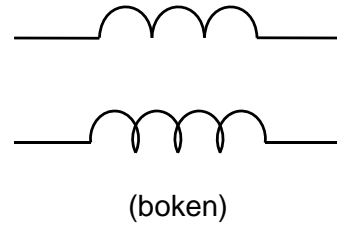
Resistanser



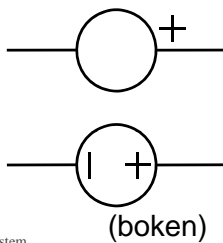
Kapacitanser



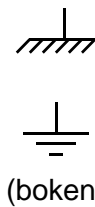
Induktanser



Spänningskällor

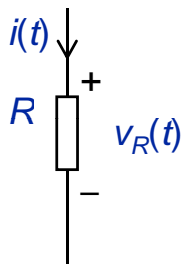


Jordsymbol



Det kan även finnas fler alternativa nätelement-symboler, beroende på vilken standard man håller sig till. Oftast är det dock lätt att inse vilka nätelement som avses.

Elektriska Kretsar – byggblock

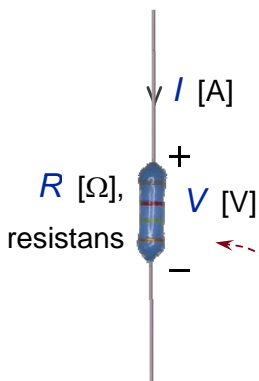
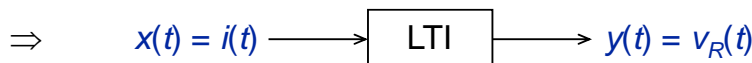


Resistans = ideal linjär modell av motstånd (resistor).

Storhet: $R = \text{resistans}$

Enhet: *Ohm* [Ω]

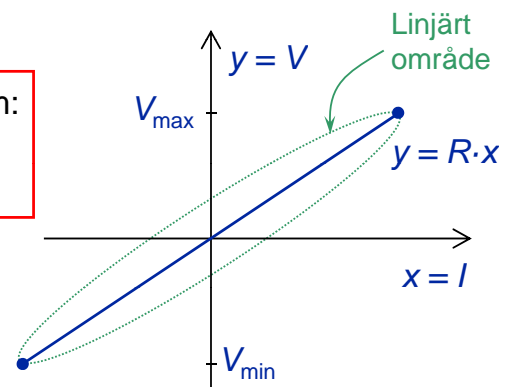
Ohms lag, " $V = R \cdot I$ " gäller i varje tidpunkt $\Rightarrow v_R(t) = R \cdot i(t)$



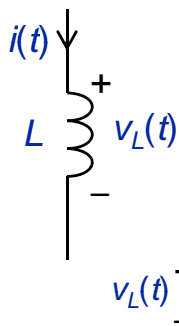
Resistansen = LTI-system:

- insignal $x(t) = i(t)$
- utsignal $y(t) = v_R(t)$.

Motstånd/resistor = fysikalisk komponent



Elektriska Kretsar – byggblock

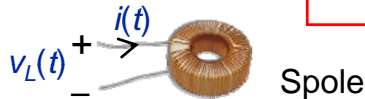


Induktans = ideal linjär modell av en spole.

Storhet: $L = \text{induktans}$
Enhet: *Henry* [H]

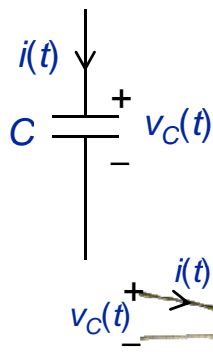
$$v_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau$$



Spole

Även induktansen och kapacitansen kan betraktas som LTI-system med insignal $x(t) = i(t)$ och utsignal $y(t) = v_L(t)$ resp. $y(t) = v_C(t)$, eller spänningarna som insignal och strömmen som utsignal!

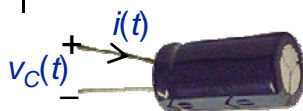


Kapacitans = ideal linjär modell av en kondensator.

Storhet: $C = \text{kapacitans}$
Enhet: *Farad* [F]

$$i(t) = C \cdot \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$



Kondensator

Kirchhoffs lagar

Kirchhoffs strömlag

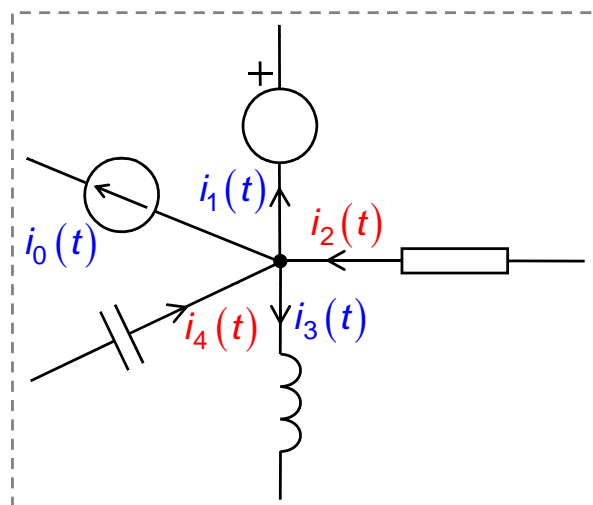
Summan av alla strömmar in i en nod är lika med summan av alla strömmar ut från noden.

För kretsen till höger:

$$i_2(t) + i_4(t) = i_0(t) + i_1(t) + i_3(t)$$

\Rightarrow

$$-i_0(t) - i_1(t) + i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) = 0$$



Allmänt samband:

$$\sum_k i_k(t) = 0$$

Summera med

- + om strömmen går *in* i noden
- om strömmen går *ut* från noden

Kirchhoffs lagar

Kirchhoffs spänningslag

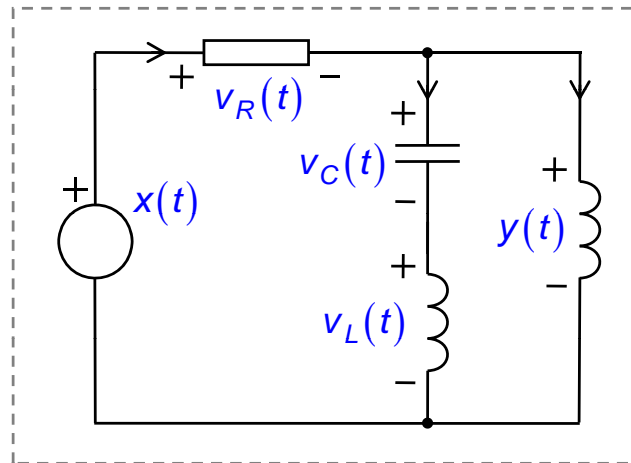
Summan av alla potentialändringar längs varje slutna väg i ett elektriskt nät är noll.

Allmänt samband:

$$\sum_k v_k(t) = 0$$

Summera med

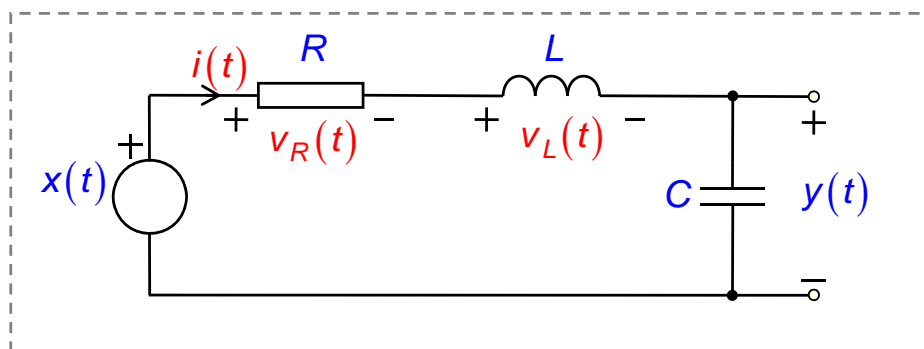
- + vid potentialhöjning
- vid potentialsänkning



⇒ Tre ekvationer för kretsen ovan:

- 1) $y(t) + v_R(t) - x(t) = 0$
- 2) $x(t) - v_R(t) - v_C(t) - v_L(t) = 0$
- 3) $v_L(t) + v_C(t) - y(t) = 0$

Exempel – systembeskrivning för ett elektriskt system



Beräkna sambandet mellan utsignalen $y(t)$ och insignalen $x(t)$!

Tavelberäkning – använd Kirchhoffs spänningslag samt ström-spänningsambanden för R , L och C :

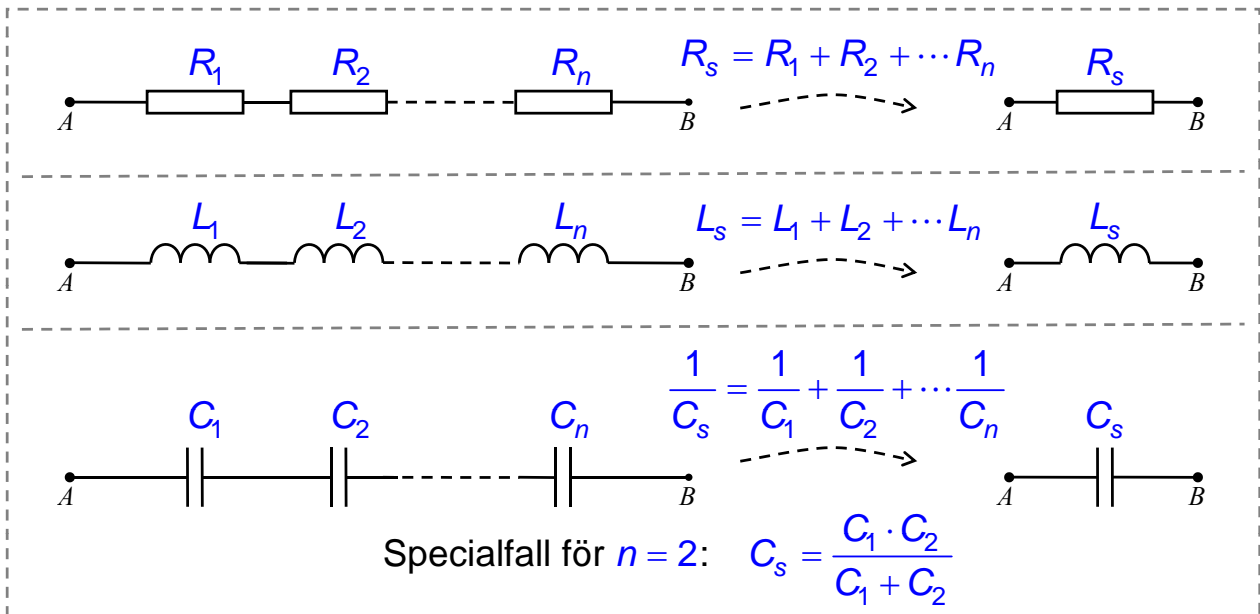
Hjälpstorheter:
 $i(t)$, $v_R(t)$
 och $v_L(t)$

$$LC \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

En differentialekvation! Samma typ av systembeskrivning som för mekaniska svängningssystem!

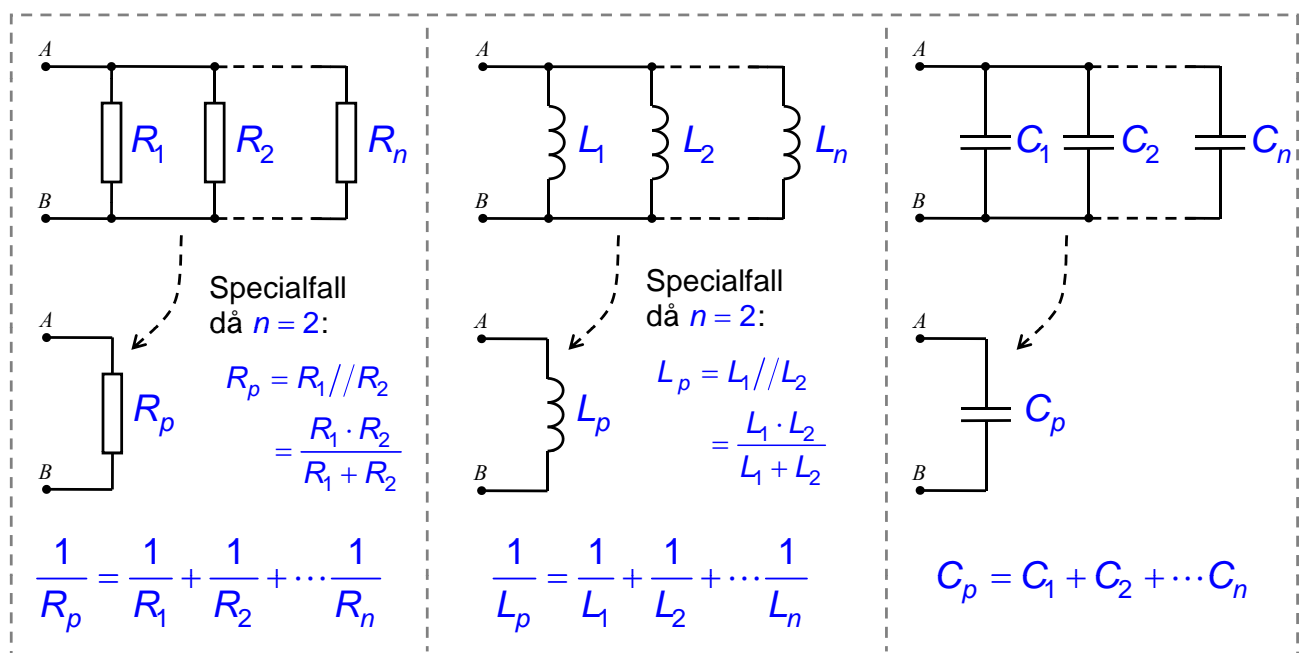
Seriekoppling av nätelement

Nedanstående kan erhållas bl.a. med hjälp av Kirchhoffs spänningslag samt observationen att samma ström flyter genom hela seriekopplingen:



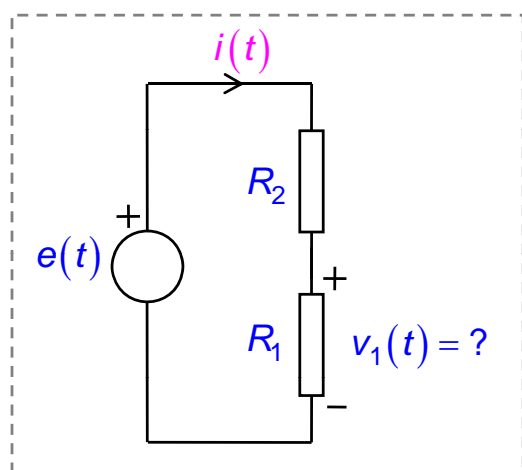
Parallellkoppling av nätelement

Nedanstående kan erhållas bl.a. med hjälp av Kirchhoffs strömlag samt observationen att samma spänning ligger över alla nätelement:



Spänningsdelning över resistanser

En spänning som ligger över två seriekopplade resistanser fördelas över resistanserna *i proportion* till deras storlek:



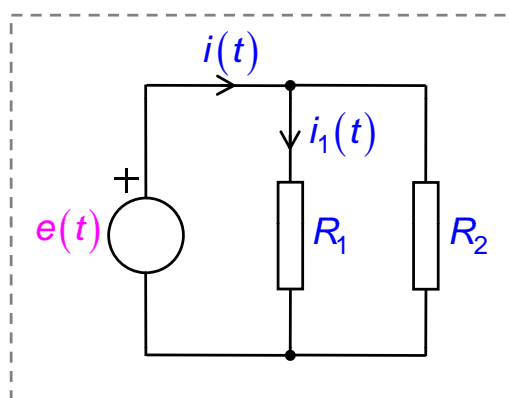
(Strömmen $i(t)$ går genom båda resistanserna)

$$i(t) = \begin{cases} \frac{v_1(t)}{R_1} \\ \frac{e(t)}{R_1 + R_2} \end{cases} \quad (\text{Ohms lag})$$

$$\Rightarrow v_1(t) = e(t) \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Strömdelning för resistanser

En ström som går genom två parallellkopplade resistanser fördelas så att storleken av varje delström blir *omvänt proportionell* mot storleken av respektive resistans:



(Spänningen $e(t)$ ligger över såväl R_1 som R_2)

$$e(t) = \begin{cases} R_1 \cdot i_1(t) \\ (R_1 // R_2) \cdot i(t) \end{cases} \quad (\text{Ohms lag})$$

$$\Rightarrow i_1(t) = i(t) \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

KAPITEL 6–7

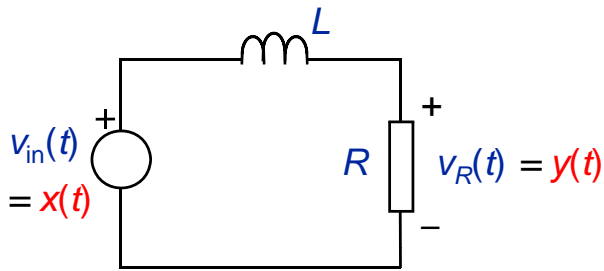
& Lasses häfte

Föreläsning 8–10

- Ström/spännings samband i elektriska LTI-system vid sinusformade källor
 - $j\omega$ -metoden: impedanser, & komplexschema
- Frekvensfunktionen $H(\omega)$
 - Ampl.- & faskaraktäristik
- Frekvensselektiva filter

Beräkning av utsignal från LTI-system

Exempel – uppgift 5-4a):



$$\Rightarrow L \cdot \frac{dv_R(t)}{dt} + R \cdot v_R(t) = R \cdot v_{in}(t)$$



$$\Rightarrow L \cdot \frac{dy(t)}{dt} + R \cdot y(t) = R \cdot x(t)$$

Lösning av differentialekvationen för varje insignal $x(t)$:
 ($y_h(t)$ = homogen lösning, $y_p(t)$ = partikulär lösning)

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

Finns det något enklare sätt att beräkna utsignalen $v_R(t)$, utan att först beräkna differentialekvationen och sedan lösa differentialekvationen för varje insignal?

JA – i synnerhet om insignalen är en frekvenssignal!

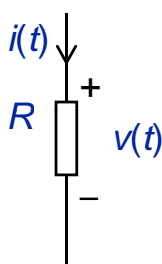
Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

$$v(t) = \hat{V} \cos(\omega t + \varphi_v) = \text{Re}\{V \cdot e^{j\omega t}\}, \quad \text{där } \underline{V} = \hat{V} \cdot e^{j\varphi_v}$$

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \varphi_i) = \text{Re}\{I \cdot e^{j\omega t}\}, \quad \text{där } \underline{I} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi_i}$$

($\omega \in \mathbb{R}$ är här en konstant)

R



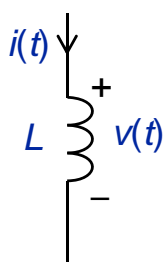
$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$\Rightarrow \text{Re}\{\underline{V} \cdot e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\underline{R} \cdot \underline{I} \cdot e^{j\omega t}\}$$

$$\Rightarrow \underline{V} = R \cdot \underline{I}$$

Samband, ström-spänning, för elektriska nätelement vid (co)sinusformade strömmar och spänningar

(L)



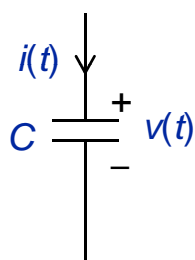
$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$V = j\omega L \cdot I$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{V \cdot e^{j\omega t}\} = L \cdot \frac{d(\operatorname{Re}\{I \cdot e^{j\omega t}\})}{dt}$$

$$\Leftarrow = \operatorname{Re}\left\{L \cdot I \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt}\right\} = \operatorname{Re}\{j\omega L \cdot I \cdot e^{j\omega t}\}$$

(C)



$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

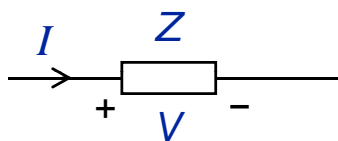
$$V = \frac{1}{j\omega C} \cdot I$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}\{I \cdot e^{j\omega t}\} = C \cdot \frac{d(\operatorname{Re}\{V \cdot e^{j\omega t}\})}{dt}$$

$$\Leftarrow = \operatorname{Re}\left\{C \cdot V \cdot \frac{d(e^{j\omega t})}{dt}\right\} = \operatorname{Re}\{j\omega C \cdot V \cdot e^{j\omega t}\}$$

Elektriska kretsar med (co)sinusformade källor

Sammanfattningsvis gäller alltså följande:



Ohms lag:

$$V = Z \cdot I$$

Nätelement

Resistans R

Induktans L

Kapacitans C

Impedans, Z

$$\Rightarrow Z_R = R$$

$$\Rightarrow Z_L = j\omega L$$

$$\Rightarrow Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

V är en *komplexvärd* spänning,
 I är en *komplexvärd* ström

Tolkning: Den elektriska kretsen görs om till ett **komplexschema**, med **komplexvärda signaler** och **komplexvärda impedanser**. Impedanserna betraktas som komplexvärda "resistanser"!

\Rightarrow Oftast mycket enklare beräkningar!

\Rightarrow "j ω -metoden"

Exempel på tavlan: Beräkna $y(t)$ i 5-4a) då $x(t)=4\cos(50t + \pi/3)$ Volt

Frekvensfunktionen $H(\omega)$

(slutsats – från tavlans räkneexempel:)

Frekvensfunktionen $H(\omega)$ för ett (stabilt) LTI-system beskriver systemets **frekvensegenskaper**, dvs. hur mycket systemet *amplitudskalar* och *fasförskjuter* frekvenssignaler:

Insignal: $x(t) = \hat{X} \cos(\omega_x t + \varphi_x) = \text{Re}\{X \cdot e^{j\omega_x t}\}$ $X = \hat{X} e^{j\varphi_x}$

\Rightarrow Utsignal: $y(t) = \hat{Y} \cos(\omega_x t + \varphi_y) = \text{Re}\{Y \cdot e^{j\omega_x t}\}$ $Y = X \cdot H(\omega_x) = \hat{Y} e^{j\varphi_y}$

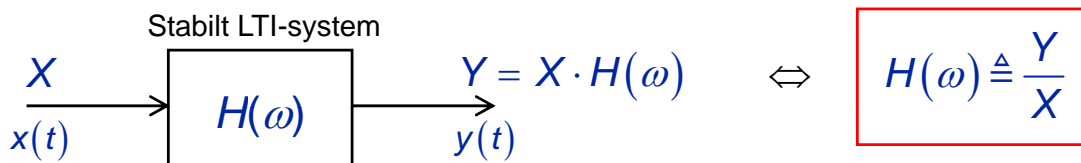
Med $H(\omega_x) = |H(\omega_x)| e^{j\arg H(\omega_x)}$ erhålls då

$$\hat{Y} = \hat{X} \cdot |H(\omega_x)|$$

$$\varphi_y = \varphi_x + \arg H(\omega_x)$$

Frekvensfunktionen $H(\omega)$ (för stabila LTI-system)

Alternativ framställning av de mycket centrala sambanden:



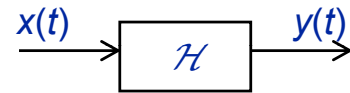
$$x(t) = \hat{X} \cos(\omega_x t + \varphi_x) \Rightarrow y(t) = \underbrace{\hat{X} \cdot |H(\omega_x)|}_{\hat{Y}} \cos(\omega_x t + \underbrace{\varphi_x + \arg H(\omega_x)}_{\varphi_y})$$

$$x(t) = X \cdot e^{j\omega_x t} \Rightarrow y(t) = \underbrace{X \cdot H(\omega_x)}_Y \cdot e^{j\omega_x t}$$

\uparrow
 $X = \hat{X} \cdot e^{j\varphi_x}$

$$\underline{H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\arg H(\omega)}} \quad \left\{ \begin{array}{l} |H(\omega)|: \text{Amplitudkaraktäristiken} \\ \arg H(\omega): \text{Faskaraktäristiken} \end{array} \right.$$

Samband mellan differentialekvationsbeskrivning och frekvensfunktion för LTI-system



LTI-system av ordning n :

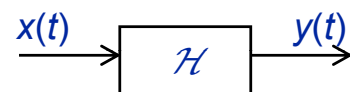
$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = \underbrace{b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot x(t)}_{= f(t) \text{ i kursboken}}$$

Lösning av differentialekvationen $\Rightarrow y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

Insignaler av främsta intresse: $\begin{cases} x(t) = \hat{X} \cos(\omega t + \varphi_x) = \text{Re}\{X \cdot e^{j\omega t}\} \\ x(t) = X \cdot e^{j\omega t} \end{cases}$ OBS: $\omega = \omega_x = \text{konstant}$

Låt $x(t) = X \cdot e^{j\omega t}$
 $\Rightarrow y_p(t) = Y \cdot e^{j\omega t}$ $\Rightarrow Y = X \cdot \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0}$

Samband mellan differentialekvationsbeskrivning och frekvensfunktion för LTI-system



Frekvensfunktionen:

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (\omega = \text{variabel})$$

Jämför med den systembeskrivande differentialekvationen:

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot x(t)$$

OBS: • Frekvensfunktionen $H(\omega)$ existerar bara om LTI-systemet är **stabil!**

• Information om systemets stabilitetsegenskap erhålls från differentialekvationens **homogena lösning**, $y_h(t)$

Differentialekvationens homogena lösning, $y_h(t)$

Total diff.ekvationslösning:

$$\underline{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$

- Partikulärlösningen $y_p(t)$ beror på signalen $x(t)$
- Den homogena lösningen $y_h(t)$ är oberoende av $x(t)$

Homogen lösning – Sätt differentialekvationens högerled till noll:

$$a_n \cdot \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = 0$$

En lösning är $y_h(t) = A \cdot e^{st}$

Stoppa in i

... \Rightarrow Den karakteristiska ekvationen: $a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 = 0$

\Rightarrow n lösningar s_1, s_2, \dots, s_n

\Rightarrow $y_h(t) = \dots$

OBS!!

$\lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t)$

$= 0 \Leftrightarrow$ **Stabilt system**

$= \pm\infty \Leftrightarrow$ **Instabilt system**

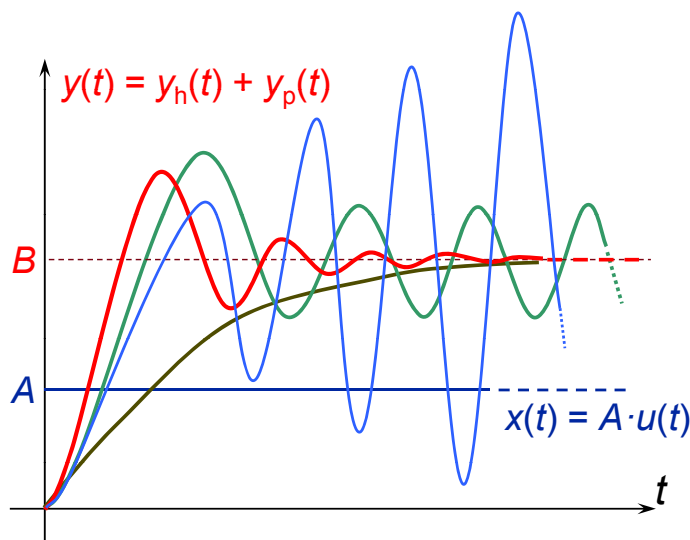
$\neq 0, \pm\infty \Leftrightarrow$ **Marginellt stabilt system**

Den homogena lösningen $y_h(t)$

Stegsvar (transientsvar), kap. 6.3: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ då $x(t) = A \cdot u(t)$

Här är den homogena lösningen $y_h(t)$ av speciellt intresse:

$y_h(t)$ = utsignalens *insvängningsförlopp* runt den partikulära lösningen $y_p(t) = B \cdot u(t)$.



Om (kausalt och) **stabilt system**

$$\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0$$

\Rightarrow $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_p(t)$

Den homogena lösningen $y_h(t)$

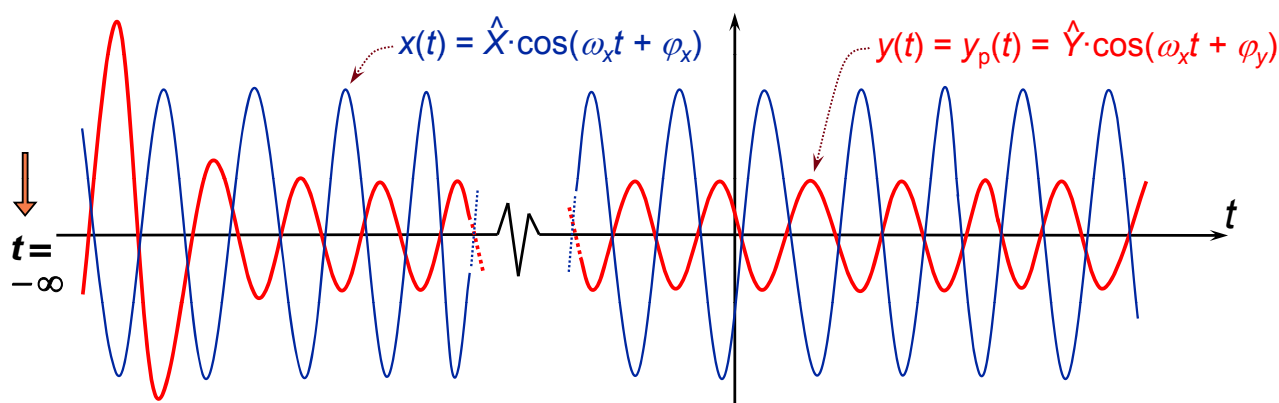
Frekvenssvar ("steady state response"), kap 7:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \text{då} \quad x(t) = \hat{X} \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_x)$$

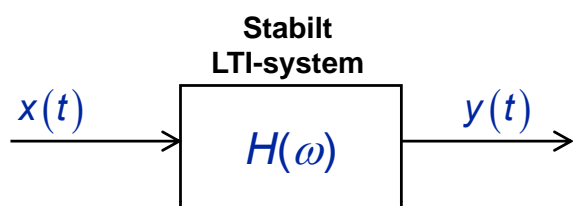
Vi studerar främst (kausala och) **stabila system** $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y_h(t) = 0$

$$\Rightarrow y(t) \approx y_p(t) = \hat{X} \cdot |H(\omega_x)| \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_x + \arg H(\omega_x))$$

Vid $t > 0$ har $y_h(t)$ dött ut "för länge sedan"!



Sammanfattning, samband insignal–utsignal för stabila LTI-system



$$H(\omega) = \frac{Y}{X}$$

Y = Utsignalens komplexa amplitud
 X = Insignalens komplexa amplitud

$x(t)$	$y(t)$
$\hat{X} \cos(\omega_x t + \varphi_x)$	$\hat{X} \cdot H(\omega_x) \cos(\omega_x t + \varphi_x + \arg H(\omega_x))$
$X \cdot e^{j\omega_x t}$	$X \cdot H(\omega_x) \cdot e^{j\omega_x t}$
$X_0 + \sum_k \hat{X}_k \cos(\omega_k t + \varphi_k)$	$X_0 \cdot H(0) + \sum_k \hat{X}_k \cdot H(\omega_k) \cos(\omega_k t + \varphi_k + \arg H(\omega_k))$

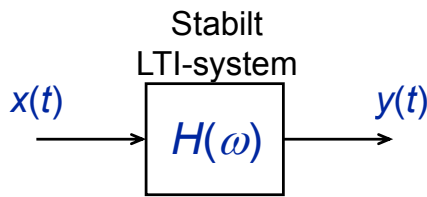
Om $x(t)$ är *periodisk* med periodtid $T_0 \Rightarrow \omega_k = k \cdot \omega_0$ där $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ samt $\sum_k \dots \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \dots$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot H(k\omega_0) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

(Samband för komplexa fourierseriekoefficienter)

Jämförelse – amplitudspektrum och amplitudkaraktäristik



T_0 -periodisk insignal $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Systemets frekvensfunktion:

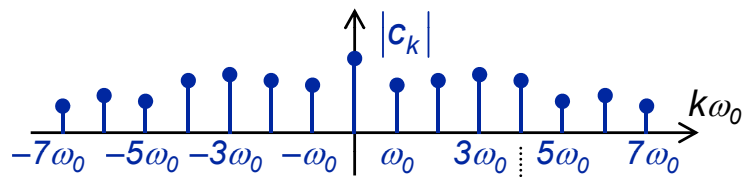
$$H(\omega) \Rightarrow |H(\omega)|$$

T_0 -periodisk utsignal $y(t)$:

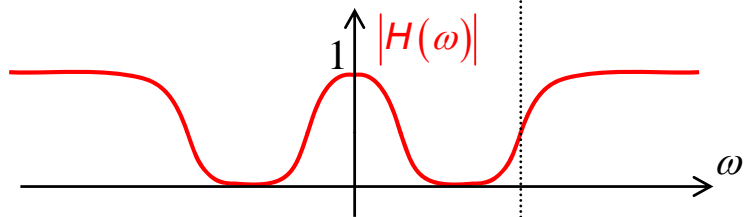
$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

$$d_k = c_k \cdot H(k\omega_0)$$

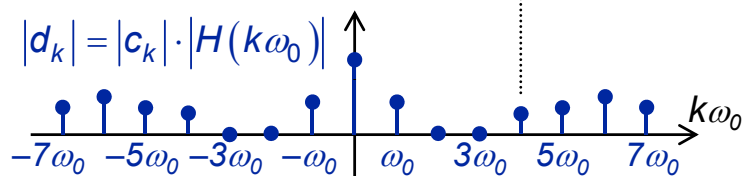
Insignalens amplitudspektrum



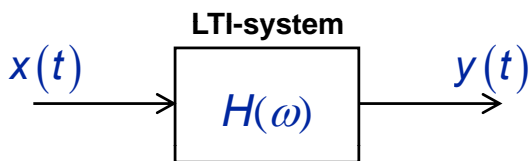
Systemets amplitudkaraktäristik



Utsignalens amplitudspektrum



Frekvensselektiva Filter

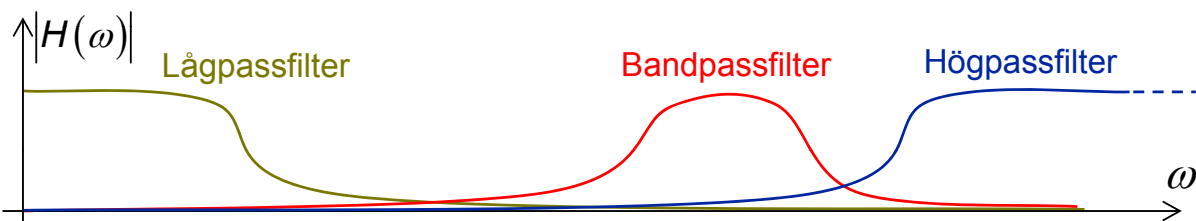


Vid systemanalys är man oftast i första hand intresserad av systemets **amplitudkaraktäristik** $|H(\omega)|$ (faskaraktäristiken $\arg H(\omega)$ är inte lika central)

Mycket ofta förekommande och viktig typ av LTI-system:

Frekvensselektiva filter

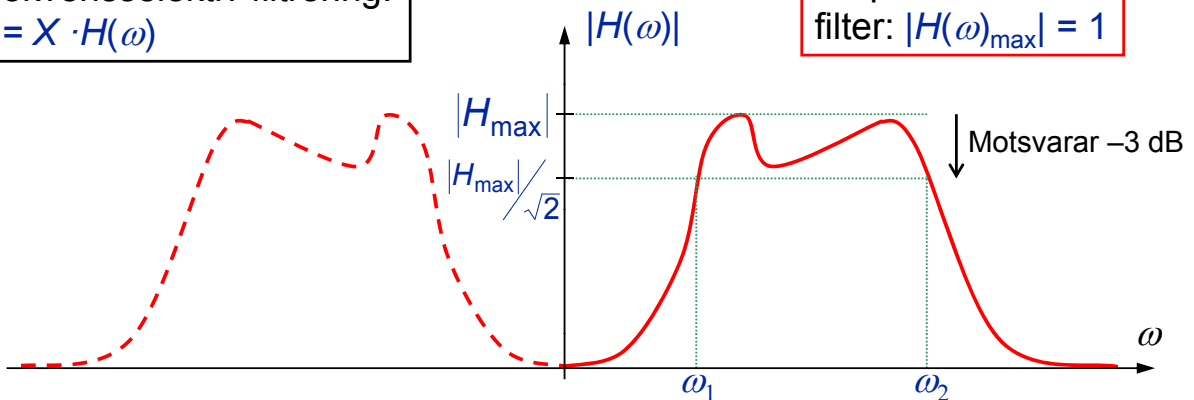
Ett LTI-system som konstrueras så att det får *önskade frekvensegenskaper*, dvs. önskad amplitudkaraktäristik (och/eller faskaraktäristik). **Exempel:**



Frekvensselektiva Passiva Filter

Frekvensselektiv filtrering:
 $Y = X \cdot H(\omega)$

Amplitudnormerat filter: $|H(\omega)_{\max}| = 1$



ω_1 ; undre 3 dB-gränsvinkelfrekvens

ω_2 ; övre 3 dB-gränsvinkelfrekvens

Passband

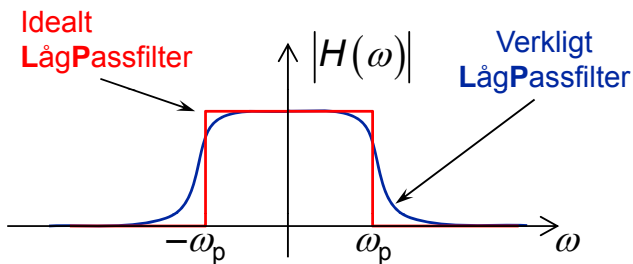
Spärrband

Spärrband

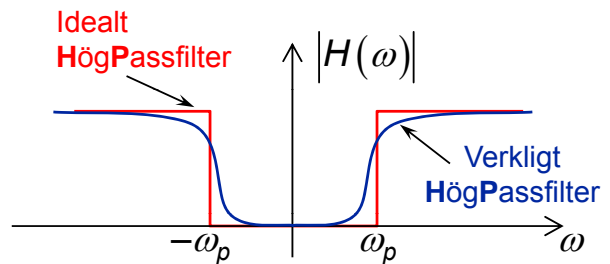
$B = \omega_2 - \omega_1$; bandbredden

Vanliga Ideala och verkliga frekvensselektiva filter:

LP-filter

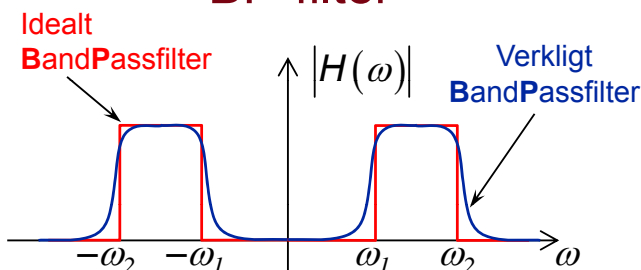


HP-filter

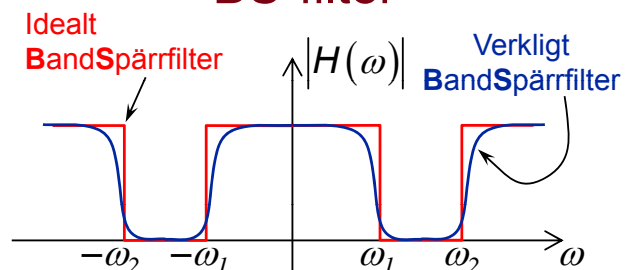


$$H(-\omega) = H^*(\omega)$$

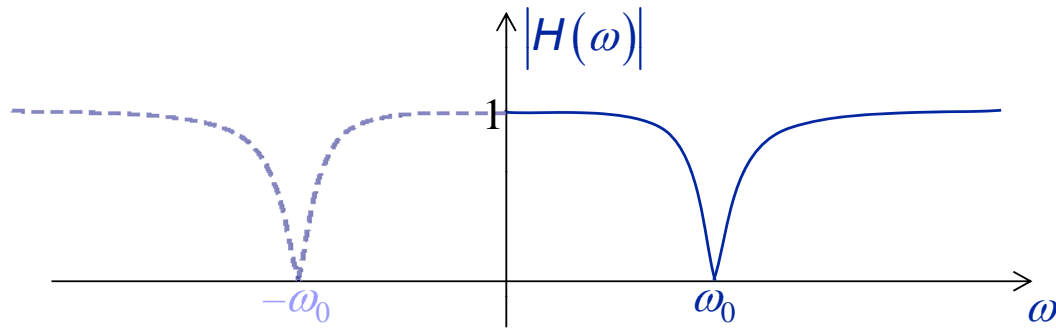
BP-filter



BS-filter



Exempel: Laboration i Linjära system – Notchfilter

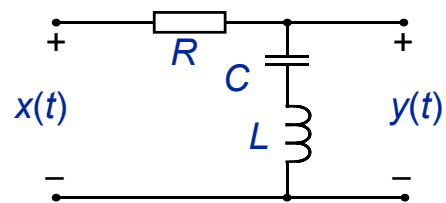


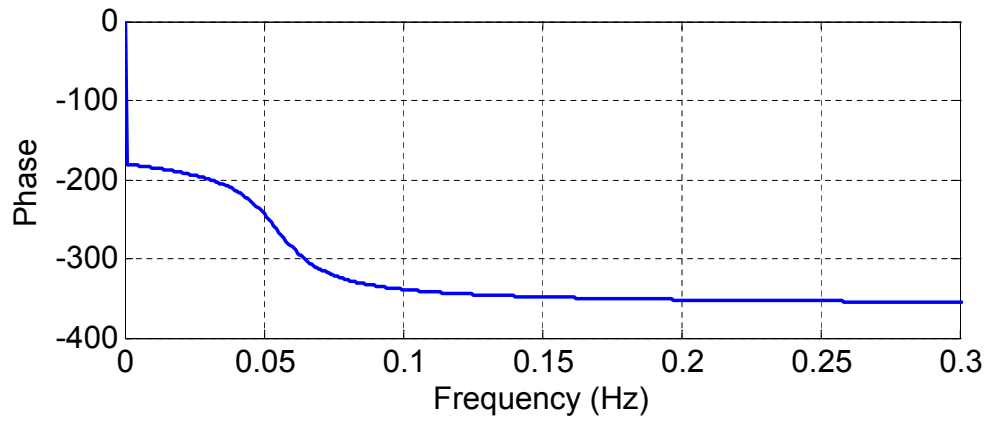
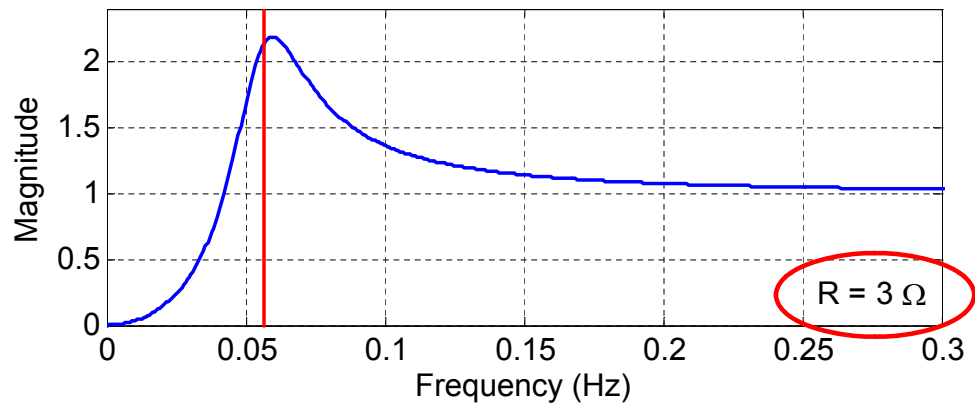
Funktion: "Släpp igenom" alla sinusformade signaler, utom de som har vinkelfrekvens ω_0 rad/s. Frekvenssignaler nära ω_0 dämpas kraftigt.

Ett enkelt notchfilter av ordning 2:

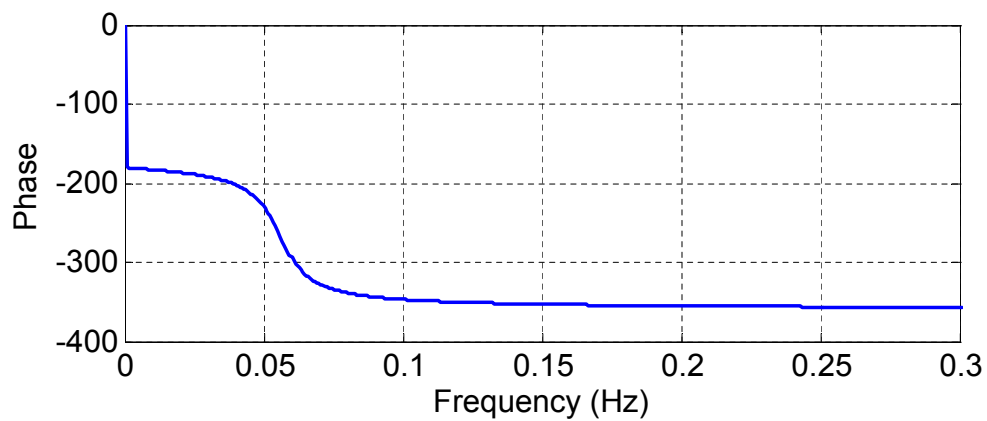
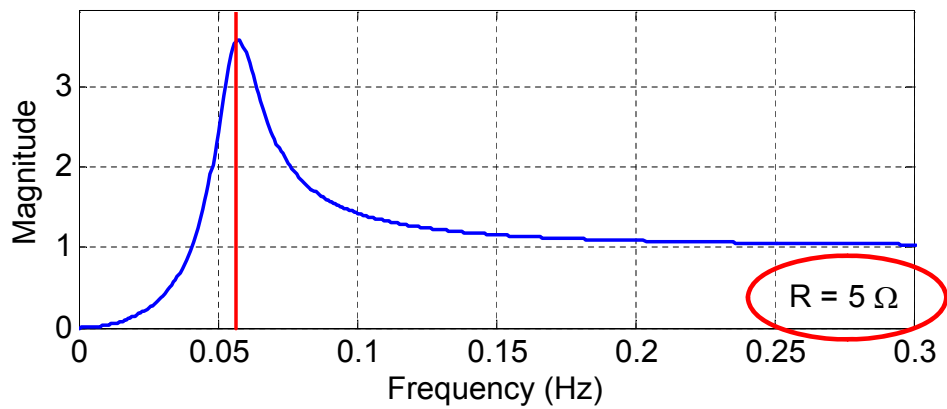
(Filtrets/systemets ordning = antalet kapacitanser + antalet induktanser)

Testa **rlcdemo** i Matlabs Control Systems Toolbox!

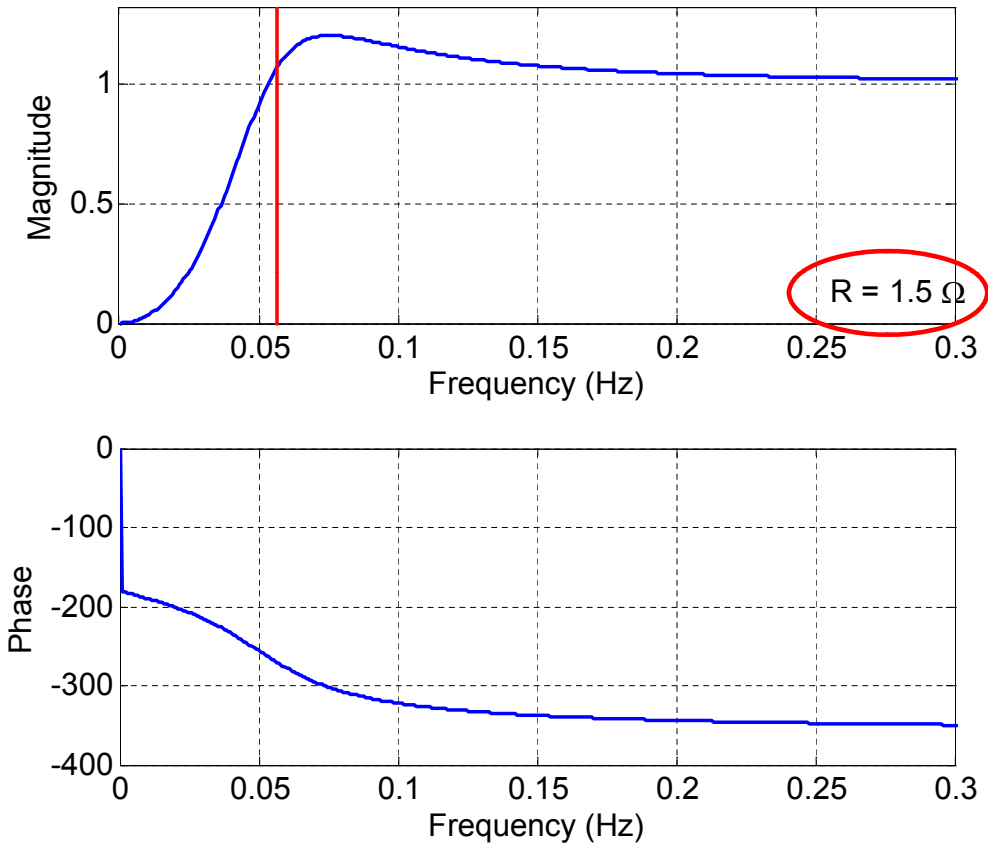




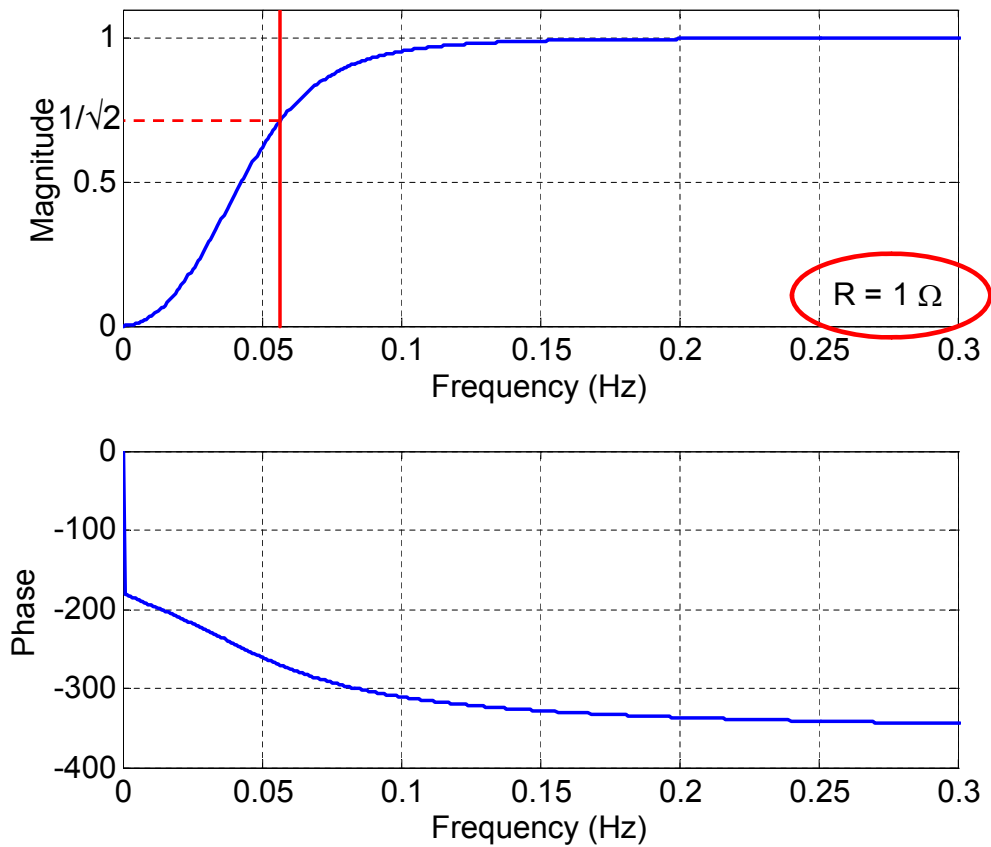
Filter characteristics or signal spectrum



Filter characteristics or signal spectrum



Filter characteristics or signal spectrum



Filter characteristics or signal spectrum

