1.

Deluppgift	Svar	Förslag till motivering (**ska inte finnas med i tentamen!**)
a)	S	Seriekoppling av impedanserna $\frac{1}{j\omega C}$ och $j\omega L$ ger den resulterande impedansen $\frac{1}{j\omega C} + j\omega L = \frac{1-\omega^2 LC}{j\omega C}$ vilken antar värdet 0 Ohm för vinkelfrekvesen $\omega = 1/\sqrt{LC}$.
b)	S	Fourierseriekoefficienterna ges av uttrycket $c_k = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\left(\cos(k\omega_0 t) + j\sin(k\omega_0 t)\right)dt =$ $= \frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt + \frac{j}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\sin(k\omega_0 t)dt$ Om $x(t)$ är udda kommer den första integralen bli =0, medan den andra generellt blir nollskiljd och ger rent imaginära koefficienter.
c)	F	För det första är det inte säkert att summan blir en periodisk signal, det blir den bara om ω_1 och ω_2 förhåller sig till varandra som hela tal. För det andra: om summan blir periodisk ges dess grundvinkelfrekvens av största gemensamma delare av ω_1 och ω_2 .
d)	F	Två elektriska komponenter som parallellkopplas har alltid samma spänning över sig.
e)	F	De är snarare funktioner av frekvens.

2.

a) För den komplexa insignalen $\tilde{x}(t) = X \cdot e^{j\omega t}$, där $X \in \mathbb{C}$ och $\omega \in \mathbb{R}$, ansätts för differentialekvationen den *komplexvärda partikulärlösningen* $\tilde{y}_p(t) = Y \cdot e^{j\omega t}$, där $Y \in \mathbb{C}$. Differentialekvationens *homogena lösning* $y_h(t)$ går, för ett stabilt LTI-system, alltid mot noll när tiden går mot oändligheten $\left(\lim_{t\to\infty} y_h(t) = 0\right)$. Vid insättning av $\tilde{x}(t)$ och $\tilde{y}_p(t)$ i differentialekvationen erhålls

$$\frac{d^2\left(Y\cdot e^{j\omega t}\right)}{dt^2} + 3\frac{d\left(Y\cdot e^{j\omega t}\right)}{dt} + 2\left(Y\cdot e^{j\omega t}\right) = 4\frac{d\left(X\cdot e^{j\omega t}\right)}{dt} \quad \Rightarrow$$
$$Y\cdot(j\omega)^2 e^{j\omega t} + 3Y\cdot(j\omega)e^{j\omega t} + 2Ye^{j\omega t} = 4X\cdot(j\omega)e^{j\omega t} \quad \Rightarrow$$
$$Y\left(-\omega^2 + j3\omega + 2\right) = X\cdot j4\omega$$

Frekvensfunktionens värde vid vinkelfrekvensen ω definieras som kvoten mellan utsignalens komplexa amplitud och insignalens komplexa amplitud, dvs. $H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{j4\omega}{-\omega^2 + j3\omega + 2}$.

b) För given insignal $x(t) = 7 + 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$ till ett stabilt LTI-system med frekvensfunktion

$H(\omega) = \frac{j4\omega}{2 - \omega^2 + j3\omega}$ erhålls utsignalen $y(t) = 7 \cdot H(0) + 3\left|H(2)\right|\cos\left(2t + \frac{\pi}{2} + \arg H(2)\right)$, där

$$\begin{cases} \underline{H(0)} = \frac{0}{2} = \underline{0} \quad \text{och} \\ \underline{H(2)} = \frac{j4 \cdot 2}{2 - 2^2 + j3 \cdot 2} = \frac{j4}{-1 + j3} = \frac{4e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+9} \cdot e^{j\left(\arctan\frac{3}{-1} + \pi\right)}} = \frac{4}{\sqrt{10}} e^{j\left(\frac{\pi}{2} - (-\arctan 3 + \pi)\right)} = \underline{\frac{4}{\sqrt{10}} e^{j\left(-\frac{\pi}{2} + \arctan 3\right)}} \end{cases}$$

Fasbidraget $+\pi$ tillkommer eftersom realdelen av $-1 + j3$ är negativ. Vi får alltså

$$\underline{\underline{y(t)}} = 0 + 3 \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} \cos\left(2t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \arctan 3\right) = \underline{\underline{\frac{12}{\sqrt{10}} \cos(2t + \arctan 3)}}.$$

Anm: Utsignalen blir alltså lika med differentialekvationens partikulärlösning. Eftersom insignalen läggs på systemet vid $t = -\infty$ och LTI-systemet är stabilt, så har den blir den homogena lösningen ”dött ut” för länge sedan (se resonemanget i deluppgift a).

3. $x(t)$ har periodtid $T_0 = 2$ sek. och följaktligen grundvinkelfrekvensen $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \pi$ rad/sek.

De komplexa fourierseriekoefficienterna för den periodiska insignalen $x(t)$ beräknas då som

$$\underline{\underline{c_k}} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x(t) \cdot e^{-jk\pi t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 1 \cdot e^{-jk\pi t} dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} (-1) \cdot e^{-jk\pi t} dt$$

$$= \frac{1}{-2jk\pi}\left(\left[e^{-jk\pi t}\right]_{-1}^{0} - \left[e^{-jk\pi t}\right]_{0}^{1}\right) = \frac{-1}{j2k\pi}\left(e^0 - e^{jk\pi} - \left(e^{-jk\pi} - e^0\right)\right) = \Big/ \begin{matrix} e^{-jk\pi} = e^{jk\pi} = (-1)^k \\ -1 = j^2 \end{matrix} \Big/$$

$$= \frac{j}{k\pi}\left(1 - (-1)^k\right) = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{j2}{k\pi}; & \text{udda } k \\ 0; & \text{jämna } k \end{cases}}}.$$

Faktorn $\frac{j}{k\pi}$ i beräkningen ovan medför att uttrycket inte gäller för $k = 0$. Medelvärdesnivån c_0 måste

därför beräknas separat: $\underline{\underline{c_0}} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \Big|_{k=0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x(t)\, dt = \cdots = \underline{\underline{0}}$

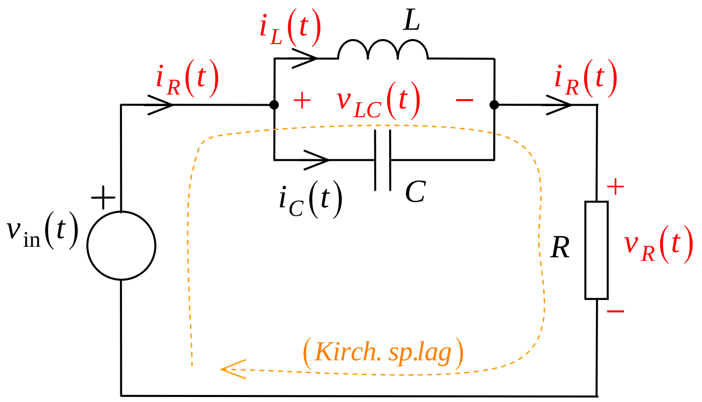
(*man kan även se direkt i figuren att medelvärdesnivån för $x(t)$ är noll.*)

Utsignalens komplexa fourierseriekoefficienter d_k erhålls från sambandet $Y = X \cdot H(\omega)$, som gäller för stabila LTI-system – där X är insignalens komplexa amplitud $(= c_k$ här$)$ och Y är utsignalens komplexa amplitud $(= d_k$ här$)$. För <u>jämna k</u> blir därför $d_k = c_k = 0$ $\left(\Rightarrow \; |d_k| = 0, \; \arg d_k = 0\right)$ och för <u>udda k</u> får vi

$$\underline{d_k} = c_k \cdot H(k\omega_0) = \frac{j2}{k\pi} \cdot \frac{jk\omega_0}{jk\omega_0 + 2}\Bigg|_{\omega_0 = \pi} = \frac{j^2 2k\pi}{k\pi(jk\pi + 2)} = \underline{\frac{-2}{2 + jk\pi}}$$, vilket ger utsignalens amplitudspektrum

$\underline{\underline{|d_k| = \frac{2}{\sqrt{2^2 + (k\pi)^2}}}}$ och fasspektrum $\underline{\underline{\arg d_k}} = \arg(-2) - \arg(2 + jk\pi) = \underline{\underline{\pi - \arctan\frac{k\pi}{2}}}$.

4. Inför först hjälpstorheterna $i_L(t)$, $v_{LC}(t)$, $i_R(t)$, och $v_R(t)$ i figuren, t.ex. med förslagna riktningar (vilket är mest logiskt här). Kom ihåg att strömmen går från högre till lägre potential genom *R*, *L* och *C*!



Ström-spänningsambanden för *R*, *L* och *C* kommer att behövas i lösningen:

$$i_C(t) = C \cdot \frac{dv_{LC}(t)}{dt} \qquad (1)$$

$$v_{LC}(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} \qquad (2)$$

$$v_R(t) = R \cdot i_R(t) \qquad (3)$$

a) Andra samband som kan vara användbara vid lösningen är

Kirchhoffs strömlag: $i_R(t) = i_C(t) + i_L(t)$ (4) (gäller i de båda förgreningsnoderna)

Kirchhoffs spänningslag: $v_{in}(t) - v_{LC}(t) - v_R(t) = 0$ (5) (Σ potentialändringar ett varv runt kretsen)

Börja med ett samband för utsignalen $i_C(t)$ (lämpligen ekv. (1)) och utveckla det tills du erhåller den sökta differentialekvationen, som bara innehåller utsignalen $i_C(t)$, insignalen $v_{in}(t)$ samt *R*, *L* och *C*:

$$\underline{i_C(t)} = C \cdot \frac{dv_{LC}(t)}{dt} = /\, v_{LC}(t) \text{ från ekv. (5)} / = C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt} - C \cdot \frac{dv_R(t)}{dt} = /\, v_R(t) \text{ från ekv. (3)} /$$

$$= C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt} - RC \cdot \frac{di_R(t)}{dt} = /\, i_R(t) \text{ från ekv. (4)} / = C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt} - RC \cdot \frac{di_C(t)}{dt} - RC \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$= \Big/ \frac{di_L(t)}{dt} \text{ från ekv. (2)} \Big/ = \underline{C \cdot \frac{dv_{in}(t)}{dt} - RC \cdot \frac{di_C(t)}{dt} - \frac{RC}{L} \cdot v_{LC}(t)} \qquad (6)$$

Återstår att eliminera $v_{LC}(t)$ i ekvation (6): Om ekvationen *deriveras* en gång, så kan den resulterande termen $C \cdot \frac{dv_{LC}(t)}{dt}$ som en sista eliminering (ekv. (1)) bytas ut mot utsignalen $i_C(t)$.

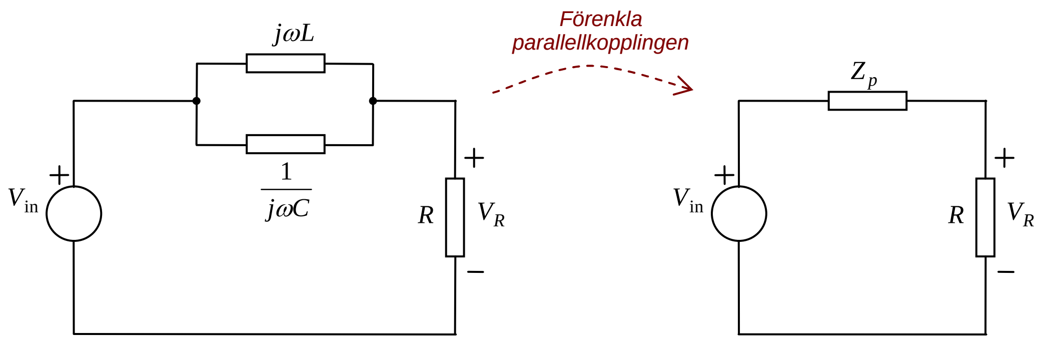
Derivering av ekv. (6) ger alltså

$$\underline{\frac{di_C(t)}{dt}} = C \cdot \frac{d^2 v_{in}(t)}{dt^2} - RC \cdot \frac{d^2 i_C(t)}{dt^2} - \frac{RC}{L} \cdot \frac{dv_{LC}(t)}{dt} = \underline{C \cdot \frac{d^2 v_{in}(t)}{dt^2} - RC \cdot \frac{d^2 i_C(t)}{dt^2} - \frac{R}{L} \cdot i_C(t)},$$

som ger den sökta differentialekvationen $\underline{\underline{RC \cdot \frac{d^2 i_C(t)}{dt^2} + \frac{di_C(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_C(t) = C \cdot \frac{d^2 v_{in}(t)}{dt^2}}}$

5.

a) Rita kretsens ekvivalenta komplexschema:



Impedanserna $j\omega L$ och $\dfrac{1}{j\omega C}$ är parallellkopplade $\Rightarrow Z_p = \dfrac{1}{j\omega C} // j\omega L = \dfrac{\dfrac{1}{j\omega C}\cdot j\omega L}{\dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \dfrac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$.

Spänningsdelning i figuren ovan till höger ger då

$$V_R = V_{in}\frac{R}{R+Z_p} = V_{in}\frac{R}{R+\dfrac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}} = V_{in}\frac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + j\omega\dfrac{L}{R}}$$

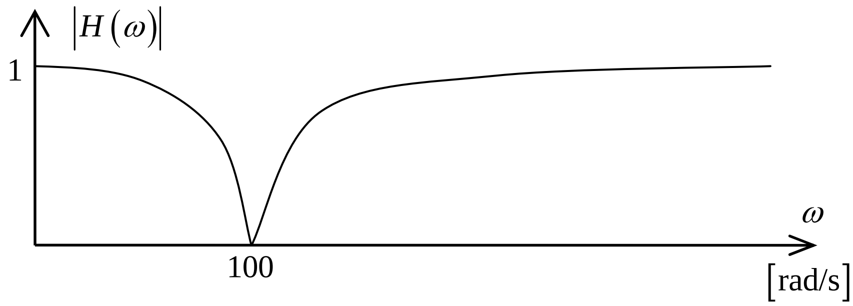
$$\underline{\underline{H(\omega)}} = \frac{\text{Utsignalens komplexa amplitud}}{\text{Insignalens komplexa amplitud}} = \frac{V_R}{V_{in}} = \frac{1-\omega^2 LC}{1-\omega^2 LC + j\omega\dfrac{L}{R}}$$

$$= \Bigg/ \begin{array}{l} R = 60\ \Omega \\ L = 0.2\ \text{H} \\ C = 0.5\ \text{mF} \end{array} \Bigg/ = \frac{1-\dfrac{\omega^2}{10^4}}{1-\dfrac{\omega^2}{10^4} + j\dfrac{\omega}{300}} = \underline{\underline{\frac{10^4-\omega^2}{10^4-\omega^2 + j\dfrac{100\omega}{3}}}}$$

b) Undersök/bestäm värdet på amplitudkaraktäristiken $|H(\omega)| = \dfrac{|10^4-\omega^2|}{\sqrt{(10^4-\omega^2)^2 + \left(\dfrac{100\omega}{3}\right)^2}}$ vid $\omega = 0$, då $\omega \to \infty$ och vid ytterligare något lämpligt ändligt ω-värde:

ω	$\lvert H(\omega)\rvert$
0	$\dfrac{\lvert 10^4-0\rvert}{\sqrt{(10^4-0)^2+(0)^2}} = 1$
$\to\infty$	$\lim\limits_{\omega\to\infty}\dfrac{\left\lvert \dfrac{10^4}{\omega^2}-1\right\rvert}{\sqrt{\left(\dfrac{10^4}{\omega^2}-1\right)^2+\left(\dfrac{100}{3\omega}\right)^2}} = \dfrac{\lvert 0-1\rvert}{\sqrt{(0-1)^2+(0)^2}} = 1$
Då $10^4-\omega^2=0$, dvs. $\omega=100$	$\dfrac{0}{\sqrt{(0)^2+\left(\dfrac{100}{3}\cdot 100\right)^2}} = 0$

Skiss av amplitudkaraktäristikens typutseende (*kommentar: det är ett Notchfilter*):



c) Insignalen är $v_{\text{in}}(t) = 2.5\sin\left(80t + \frac{\pi}{3}\right) - 3\cos\left(100t - \frac{\pi}{5}\right)$ volt. Eftersom systemet är ett stabilt LTI-system, kommer utsignalen att bli

$$v_R(t) = 2.5\left|H(80)\right|\sin\left(80t + \frac{\pi}{3} + \arg H(80)\right) - 3\left|H(100)\right|\cos\left(100t - \frac{\pi}{5} + \arg H(100)\right).$$

Eftersom $H(100) = 0$, enligt uppgift b), kommer den andra termen att helt filtreras bort av systemet.

$$\underline{H(80)} = \frac{10^4 - 80^2}{10^4 - 80^2 + j\dfrac{8000}{3}} \approx \frac{3600}{3600 + 2667j} = \frac{3600}{\sqrt{3600^2 + 2667^2}\cdot e^{j\arctan\frac{2667}{3600}}} \approx \bigg/ \frac{1}{e^{j\alpha}} = e^{-j\alpha} \bigg/ \approx \underline{0.80 \cdot e^{-0.64}}$$

dvs. $\left|H(80)\right| \approx 0.8$ och $\arg H(80) \approx -0.64 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{v_R(t) \approx 2.0\sin(80t + 0.41) \text{ volt}}}$