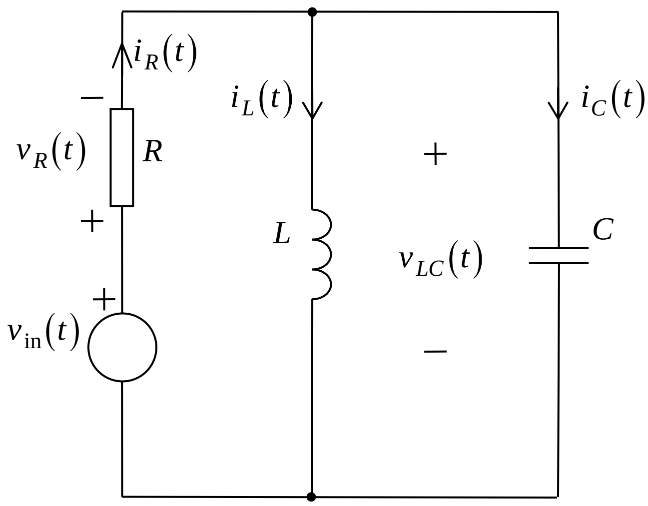
1.

Deluppgift	Svar	Kommentar (**ska inte finnas med i tentamen!**)
a)	F	Det går alldelelse utmärkt att skapa instabila system i verkligheten.
b)	S	Systemet är linjärt (men inte tidsinvariant).
c)	S	Fourierkoefficienterna beror inte av tiden, de beror istället av frekvens.
d)	F	Ett stabilt LTI-system har alltid egenskapen cosinus in – cosinus ut, vilket inte gäller för detta system.
e)	F	Spänningarna måste alltid vara lika, enligt Kirchhoffs spänningslag.

2. Utgå från given krets, eller den ekvivalenta kretsen nedan (där de parallellkopplade grenarna bytt plats, för att förtydliga att det är samma spänning över L och C), och inför hjälpspänningar och -strömmar i figuren. Ansätt korrekta riktningar, så att ström alltid går från högre till lägre potential genom R, C och L (dvs. strömmen går in vid spänningens "+"-sida). Spänningen $v_{LC}(t)$ ligger över både L och C.



Ström-spänning-samband som kommer att behövas för att beräkna differentialekvationen är:

1: $v_R(t) = R \cdot i_R(t)$ (Ohms lag)

2: $v_{LC}(t) = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$

3: $i_C(t) = C\dfrac{dv_{LC}(t)}{dt}$

4: $v_{\text{in}}(t) - v_R(t) - v_{LC}(t) = 0$ (Kirchhoffs sp.lag)

5: $i_R(t) = i_L(t) + i_C(t)$ (Kirchhoffs strömlag)

Utgå nu lämpligen från något samband som inbegriper utsignalen $i_R(t)$, dvs. samband 1 eller samband 5. Med t.ex. samband 1 erhålls:

$$\underline{R\cdot i_R(t)} = v_R(t) = /4/ = v_{in}(t) - v_{LC}(t) = /2/ = v_{in}(t) - L\frac{di_L(t)}{dt} = /5/ = v_{in}(t) - L\frac{d\left(i_R(t) - i_C(t)\right)}{dt}$$

$$= v_{in}(t) - L\frac{di_R(t)}{dt} + L\frac{di_C(t)}{dt} = /3/ = v_{in}(t) - L\frac{di_R(t)}{dt} + LC\frac{d^2 v_{LC}(t)}{dt^2} = /4/$$

$$= v_{in}(t) - L\frac{di_R(t)}{dt} + LC\frac{d^2\left(v_{\text{in}}(t) - v_R(t)\right)}{dt^2} = /1:\ v_R(t) = R\cdot i_R(t)/$$

$$= \underline{v_{in}(t) - L\frac{di_R(t)}{dt} + LC\frac{d^2 v_{\text{in}}(t)}{dt^2} - RLC\frac{d^2 i_R(t)}{dt^2}},$$

Den efterfrågade differentialekvationen är således

$$\underline{\underline{RLC\frac{d^2 i_R(t)}{dt^2} + L\frac{di_R(t)}{dt} + R\cdot i_R(t) = LC\frac{d^2 v_{\text{in}}(t)}{dt^2} + v_{in}(t)}}$$

3.

a) Grafen ger att $x(t)$ har periodtid periodtid $T_0 = 8$ sek, vilket innebär att dess grundvinkelfrekvens är $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{4}$ rad/sek. De komplexa fourierseriekoefficienterna till $x(t)$ blir då

$$\underline{\underline{c_k}} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \Big/ \int_2^8 \bullet = 0 \Big/ = \frac{1}{8}\int_0^2 3\cdot e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\,dt = \Big/ \begin{array}{l} k \neq 0, \text{ ty division} \\ \text{med } k \text{ i nästa steg} \end{array} \Big/ = \frac{3}{-jk\frac{\pi}{4}\cdot 8}\left[e^{-jk\frac{\pi}{4}t}\right]_0^2$$

$$= \frac{3}{-jk2\pi}\left(e^{-jk\frac{\pi}{4}\cdot 2} - e^0\right) = \frac{3\left(1-e^{-jk\frac{\pi}{2}}\right)}{jk2\pi} = \underline{\underline{\frac{3\left(1-(-j)^k\right)}{jk2\pi}}}$$

Anm: c_k *kan utvecklas till antingen* 0, $\frac{3(1+j)}{jk2\pi}$, $\frac{6}{jk2\pi}$ eller $\frac{3(1-j)}{jk2\pi}$, *beroende på värdet på k.*

Det är dock tillräckligt att ange det sammansatta uttrycket $c_k = \frac{3\left(1-(-j)^k\right)}{jk2\pi}$ *som svar.*

Division med *k* vid divisionen med inre derivatan ovan medför att uttrycket *inte* gäller för $k = 0$.

Medelvärdesnivån c_0 måste därför beräknas separat: $\underline{\underline{c_0}} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\Big|_{k=0} = \frac{1}{8}\int_0^2 3dt = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$.

$$\text{Svar: } c_k = \underline{\underline{\begin{cases} \frac{3\left(1-(-j)^k\right)}{jk2\pi}; & k \neq 0 \\ \frac{3}{4}; & k = 0 \end{cases}}}$$

b) Från den komplexa fourierserieutvecklingen av $x(t)$, dvs. $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$, erhålls

$$y(t) = 2x(t-4) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega_0(t-4)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2c_k e^{-j4k\omega_0}\cdot e^{jk\omega_0 t}.$$

Vid jämförelse av detta uttryck med den komplexa fourierserieutvecklingen av $y(t)$, dvs.

$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$, så erhålls $\underline{d_k} = 2c_k e^{-j4k\omega_0} = 2c_k e^{-jk\pi} = \underline{2c_k(-1)^k}$, vilket medför

$$\underline{\underline{|d_k| = \left|2c_k(-1)^k\right| = 2|c_k|}} \text{ och } \underline{\underline{\arg(d_k) = \arg(2c_k) + \arg\left((-1)^k\right) = \begin{cases} \arg(c_k); & \text{jämna } k \\ \arg(c_k) + \pi; & \text{udda } k \end{cases}}}.$$

Anm: $\arg(2c_k) = \arg(c_k)$

4. Uppgift a) är lekt. uppg. S-2, uppgift b) är lekt. uppg. F-1 och uppgift c) är lekt. uppg. 7-18 b

a) Givet förhållande mellan systemets insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$: $y(t) = e^{x(t+2)}$ (1)

<u>Tidsinvarians:</u> Låt $\tilde{x}(t) = x(t - t_d)$ (2) $\Rightarrow$ $\tilde{y}(t) \overset{(1)}{=} e^{\tilde{x}(t+2)} \overset{(2)}{=} e^{x(t+2-t_d)} = e^{x(t-t_d+2)} \overset{(1)}{=} y(t - t_d)$.

En förskjutning av insignalen $\left(\tilde{x}(t) = x(t - t_d)\right)$ medför alltså en motsvarande förskjutning av utsignalen $\left(\tilde{y}(t) = y(t - t_d)\right)$, vilket innebär att systemet är **tidsinvariant**.

<u>Linjäritet:</u> Låt varje insignal $x_i(t)$ ge upphov till motsvarande utsignal $y_i(t) = e^{x_i(t+2)}$ (3)
och betrakta den linjärkombinerade insignalen $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ (4).
Om den resulterande utsignalen kan omformas till motsvarande linjärkombination av del-utsignaler $y_i(t)$, så är systemet linjärt. Test:

$y(t) = e^{x(t+2)} \overset{(4)}{=} e^{(ax_1(t+2)+bx_2(t+2))} = \left(e^{x_1(t+2)}\right)^a \left(e^{x_2(t+2)}\right)^b \overset{(3)}{=} \left(y_1(t)\right)^a \left(y_2(t)\right)^b$, vilket *inte* är lika med $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$. Systemet är således **icke-linjärt**.

<u>Alternativt bevis för icke-linjäritet:</u>
För ett linjärt system gäller alltid att utsignalen måste vara lika med noll om insignalen är lika med noll. Här gäller, för $x(t) = 0$, *att* $y(t) = e^{x(t+2)} = e^0 = 1 \neq 0$, *vilket innebär att systemet är* ***icke-linjärt****. (Anm: Notera att detta test bara kan användas för att påvisa icke-linjäritet , inte linjäritet, eftersom det finns icke-linjära system som också ger utsignal noll vid insignal noll .)*

b) Skriv om frekvensfunktionens täljare och nämnare som polynom av $j\omega$:

$$H(\omega) = \frac{2 + j3\omega}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)(3 + j\omega)} = \frac{2 + j3\omega}{(1 + j\omega)\left(6 + 5(j\omega) + (j\omega)^2\right)} = \frac{3(j\omega) + 2}{(j\omega)^3 + 6(j\omega)^2 + 11(j\omega) + 6}$$

Ur formelbladet erhålls direkt den systembeskrivande differentialekvationen för det givna stabila LTI-systemet (differentialekvationens koefficienter återfinns som koefficienterna i täljaren och nämnaren hos den omskrivna frekvensfunktionen):

$$\underline{\underline{\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)}}$$

c) Eftersom systemet är ett *stabilt LTI-system* kommer konstanta insignaler att amplitudskalas och sinusformade insignaler kommer att amplitudskalas och fasförskjutas av systemet.
Insignalen $x(t) = 3 + 10\cos(10t)$ ger då upphov till utsignalen

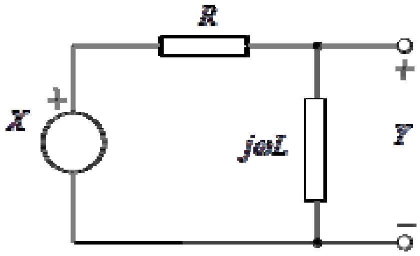
$y(t) = 3 \cdot H(0) + 10\left|H(10)\right|\cos\left(10t + \arg H(10)\right)$, där $H(0) = \dfrac{5}{1.5} = \dfrac{10}{3}$ och

$$H(10) = \frac{5 + j15}{1.5 - 1.5 + j2} = \frac{5 + j15}{j2} = \frac{\sqrt{5^2 + 15^2} \cdot e^{j\arctan\frac{15}{5}}}{2 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{5\sqrt{10}}{2} e^{j\left(\arctan 3 - \frac{\pi}{2}\right)} = \left|H(10)\right| e^{j\arg H(10)},$$

dvs. $\left|H(10)\right| = \dfrac{5\sqrt{10}}{2}$, $\arg H(10) = \arctan 3 - \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{y(t) = 10 + 25\sqrt{10}\cos\left(10t + \arctan 3 - \frac{\pi}{2}\right)}}$

5.

a) R kan bestämmas utgående från villkoret $\left|H(\omega_0)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

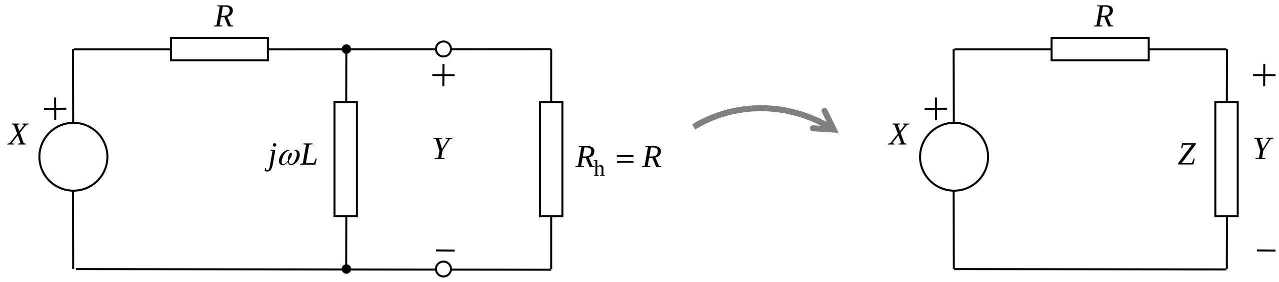


Då behöver vi först beräkna frekvensfunktionen $H(\omega)$.
Utgå från det ekvivalenta komplexschemat till höger:
Spänningsdelning ger då $Y = X \cdot \dfrac{j\omega L}{j\omega L + R}$, dvs.

$$H(\omega) = \frac{Y}{X} = \frac{j\omega L}{j\omega L + R}\text{, vilket medför } \left|H(\omega)\right| = \left|\frac{1}{1 - j\dfrac{R}{\omega L}}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{\omega L}\right)^2}}.$$

$$\left|H(\omega_0)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ger då } \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{R}{\omega_0 L}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{, dvs. } \frac{R}{\omega_0 L} = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{R}} = \omega_0 L = 20000\pi \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{200\pi\ \Omega}}.$$

b) Tag fram frekvensfunktionen $H_{\mathrm{b}}(\omega)$ utgående från nedanstående komplexschema:



Spänningsdelning ger, på motsvarande sätt som i upgift a):

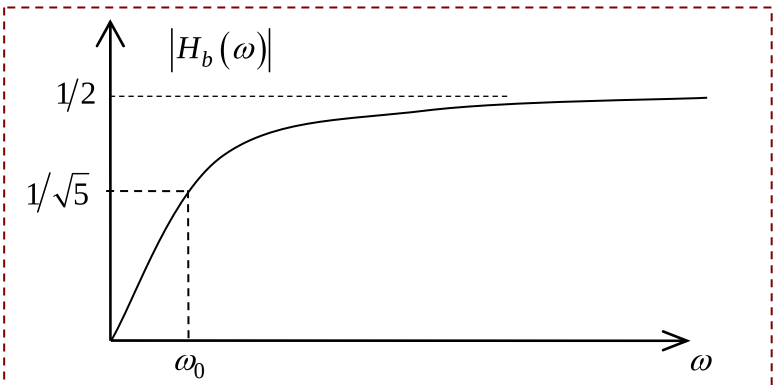
$$Y = X \cdot \frac{Z}{Z+R} = \Big/ Z = j\omega L \,//\, R_{\mathrm{h}} = \frac{j\omega L \cdot R_{\mathrm{h}}}{j\omega L + R_{\mathrm{h}}} \Big/ = X \cdot \frac{j\omega L \cdot R_{\mathrm{h}}}{j\omega L \cdot R_{\mathrm{h}} + \left(j\omega L + R_{\mathrm{h}}\right)R}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H_{\mathrm{b}}(\omega)}} = \frac{Y}{X} = \frac{j\omega L \cdot R_{\mathrm{h}}}{R_{\mathrm{h}} R + j\omega L\left(R_{\mathrm{h}} + R\right)} = \frac{j\omega LR}{R^2 + j2\omega LR} = \frac{j2\pi\omega}{200^2\pi^2 + j4\pi\omega} = \underline{\underline{\frac{j\omega}{20000\pi + j2\omega}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\left|H_{\mathrm{b}}(\omega_0)\right|}} = \left|\frac{j20000\pi}{20000\pi + j2 \cdot 20000\pi}\right| = \left|\frac{j}{1 + j2}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+2^2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}}}}$$

Vid skissering av $\left|H_{\mathrm{b}}(\omega)\right|$ beräknas amplitudkaraktäristiken exakt för några lämpliga ω-värden:

- $\left|H_{\mathrm{b}}(0)\right| = \left|\dfrac{j0}{20000\pi + j0}\right| = 0$
- $\left|H_{\mathrm{b}}(\omega_0)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ enligt ovan



c) $\displaystyle \lim_{\omega\to\infty} \left|H_{\mathrm{b}}(\omega)\right| = \lim_{\omega\to\infty} \left|\frac{1}{\dfrac{20000\pi}{j\omega} + 2}\right| = \frac{1}{2}$