Förberedelseuppgifter för
Lektioner i Signal- och Bildbehandling

Michael Felsberg 2005, uppdaterat av Maria Magnusson 2006-2007, 2016

För att förstå och lösa alla uppgifter på lektionerna behövs det en del kunskaper från de tidigare matematikkurserna. Erfarenhetsmässigt vet vi att dessa ibland inte är helt aktuella. Därför ger vi här några repetitionsuppgifter. Det viktigaste är att ni känner till definitionerna och kan använda dem. Ni behöver inte lära er alla utantill. De går att slå upp i tabellverk. Räkna gärna några av uppgifterna för att kontrollera att ni kan använda komplexa tal. Om det är några uppgifter som ni inte klarar så visar vi dem på första lektionen.

1 Komplexa Tal

Ett komplext tal $z \in \mathbb{C}$ består av två komponenter, realdel och imaginärdel,

$$z = \mathrm{Re}\{z\} + i\,\mathrm{Im}\{z\} \ , \tag{1}$$

där både $\mathrm{Re}\{z\}$ och $\mathrm{Im}\{z\}$ är reella tal och $i^2 = -1$. En viktig operation i den komplexa algebran är konjugatet,

$$z^* = \mathrm{Re}\{z\} - i\,\mathrm{Im}\{z\} \ . \tag{2}$$

Absolutvärdet av ett komplext tal definieras av

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}\{z\}^2 + \mathrm{Im}\{z\}^2} \ . \tag{3}$$

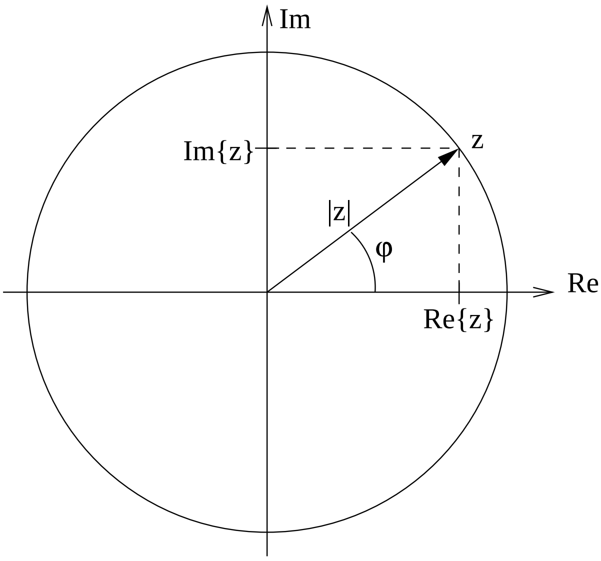
Uppgifter
Använd (1), (2) och (3) för att bevisa följande.

$$\mathrm{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2} \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\{z\} = i\frac{z^* - z}{2} \tag{5}$$

$$|z|^2 = zz^* \tag{6}$$

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} \tag{7}$$



Figur 1: Det komplexa talet z i det komplexa talplanet. Talet z kan skrivas som $z = \mathrm{Re}\{z\} + i\,\mathrm{Im}\{z\}$ eller $z = |z|e^{i\varphi}$ eller $z = |z|\cos\varphi + i\,|z|\sin\varphi$.

2 Polära Koordinater

Man kan också representera komplexa tal i polära koordinater, se Fig. 1,

$$z = |z|\exp(i\varphi) = |z|e^{i\varphi} \quad , \tag{8}$$

där $\varphi \in (-\pi; \pi]$ är argumentet av z. Vi behöver ofta Eulers formel,

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\,\sin\varphi \quad . \tag{9}$$

Ekvation (1), (8) och (9) ger

$$\mathrm{Re}\{z\} = |z|\cos\varphi \quad , \tag{10}$$
$$\mathrm{Im}\{z\} = |z|\sin\varphi \quad . \tag{11}$$

Fig. 1 ger för vinkeln φ,

$$\varphi = \arg\{z\} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}\right) & \text{om } \mathrm{Re}\{z\} > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{om } \mathrm{Re}\{z\} = 0 \text{ och } \mathrm{Im}\{z\} > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}\right) & \text{om } \mathrm{Re}\{z\} < 0 \text{ och } \mathrm{Im}\{z\} \geq 0 \\ -\pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{z\}}{\mathrm{Re}\{z\}}\right) & \text{om } \mathrm{Re}\{z\} < 0 \text{ och } \mathrm{Im}\{z\} < 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{om } \mathrm{Re}\{z\} = 0 \text{ och } \mathrm{Im}\{z\} < 0 \\ \text{obestämt} & \text{om } z = 0 \quad . \end{cases} \tag{12}$$

En alternativ formel är

$$\varphi = \arg\{z\} = 2\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{z\}}{|z| + \mathrm{Re}\{z\}}\right).$$

Uppgifter
Använd ovanstående formler för att bevisa följande.

$$\begin{aligned}
|z_1||z_2| &= |z_1 z_2| && (13)\\
z_1 z_2 &= |z_1||z_2| \exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)) && (14)\\
\cos\varphi &= \frac{\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)}{2} && (15)\\
\sin\varphi &= \frac{\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi)}{2i} && (16)\\
|\varphi_1 - \varphi_2| &= \arccos\left(\frac{\mathrm{Re}\{z_1 z_2^*\}}{|z_1 z_2|}\right) \quad \text{om } |z_1 z_2| > 0 && (17)
\end{aligned}$$

3 Additionsteorem för Trigonometriska Funktioner

Med hjälp av Eulers formel och de sista resultaten blir det ganska lätt att bevisa några additionsteorem för trigonometriska funktioner,

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta && (18)\\
\sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta && (19)\\
\cos(2\alpha) &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha && (20)\\
\sin(2\alpha) &= 2\cos\alpha\sin\alpha && (21)\\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} && (22)\\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} && (23)\\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} && (24)\\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} && (25)\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)}{2} && (26)\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)}{2} && (27)\\
\sin^2\alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} && (28)\\
\cos^2\alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} && (29)
\end{aligned}$$