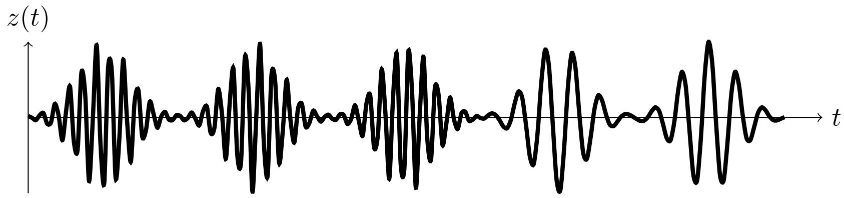
Uppgift 1

RÄTT SVAR	Kommentar
FALSKT	Frekvensen kommer att avta från Nyquist-frekvensen ned mot noll.
FALSK	Nej, endast en kort puls vid övergångarna från nolla till etta och tvärtom kommer att sändas ut registreras av en mottagare.
SANT	Vid resonansfrekvensen för seriekopplingen är impedansen 0 Ohm. $Z_{LC} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$ när $\omega = 1/\sqrt{LC}$
SANT	Påståendet är precis definitionen för tidsinvarians.

Uppgift 2

a) Samplingen måste ske med en samplingsfrekvens som är minst det dubbla av signalens högsta frekvens, i det här fallet blir $f_s \geq 16$ kHz. Eftersom varje sampel har 8 bitar, motsvarar det 128 kbit/s som minsta överföringshastighet för kanalen.

b) Varje bit motsvaras i den modulerade signalen av en puls som typiskt har en gaussisk envelopp och en frekvens som beror av om biten är noll eller ett. Här antar vi att en nolla motsvaras av en lägre frekvens och en etta av högre frekvens.



Uppgift 3 Utsignalen blir

$$\begin{aligned} y[k] &= 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cos(5{,}2\, k - 1{,}4) - 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cos(5{,}2\, (k-1) - 1{,}4) = \\ &= 0{,}4 \cos(5{,}2\, k - 1{,}4) - 0{,}4 \cos(5{,}2\, k - 6{,}6) = \\ &= -0{,}312 \cos(5{,}2\, k) + 0{,}270 \sin(5{,}2k) = 0{,}412 \cos(5{,}2\, k - 2{,}42) \end{aligned}$$

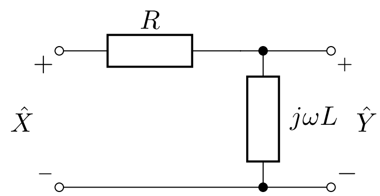
Amplitud: 0,412, fas: $-2{,}42$ (alternativ fas: -2,42 $+ 2\pi = 3.86$).

Uppgift 4 Samplingsfrekvensen $f_s = 350$ Hz motsvarar Nyquist-frekvensen $f_N =$ 175 Hz eller $\omega_N = 2\pi f_N = 1{,}10$ krad/s. Alla frekvenser över Nyquist-frekvensen utsätts för vikning vid ideal sampling och rekonstruktion. Signalens första frekvenskomponent ligger under Nyquist-frekvensen, och bevaras därför intakt efter rekonstruktionen. Den andra komponenten i signalen har en frekvens ω ligger över Nyquist-frekvensen. Denna komponent viks ned till en frekvens $\omega' = \omega - n \cdot \omega_s$ så att $|\omega'| \leq \omega_N$, där n är ett heltal. I detta fall, för $n = 1$, får vi $\omega' = \omega - 1 \cdot \omega_s = 2500 - 2\pi \cdot 350 = 301$ rad/s. Efter ideal rekonstruktion får vi alltså signalen

$$s_{\text{rek}}(t) = 3{,}6 \cos(1070\, t + 0{,}12) + 6{,}2 \cos(301\, t - 0{,}35).$$

Uppgift 5

a. Det komplexa kretsschemat fås genom att ersätta varje komponent med motsvarande impedans och att ersätta de tidberoende in- och utsignalerna med motsvarande komplexa amplituder.



$R = 100\ \Omega$

$L = 10$ mH

b. Kretsen utgör en spänningsdelare över impedansen $j\omega L$ tillsammans R. Spänningen $\hat{Y}$ ges därför av

$$\hat{Y} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} \cdot \hat{X}.$$

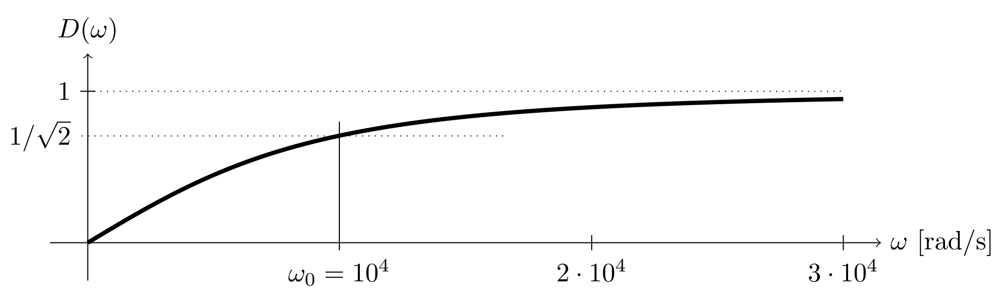
Systemets frekvensfunktion ges därför av

$$H(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega \cdot 0{,}01}{100 + j\omega \cdot 0{,}01} = \frac{j\omega}{10^4 + j\omega}.$$

c. Amplitudkarakteristiken blir

$$D(\omega) = \big|H(\omega)\big| = \frac{|\omega|}{\sqrt{100^8 + \omega^2}}$$

En skiss av $D(\omega)$:



d. Från skissen ses att systemet utgör ett högpassfilter (HP-filter).

e. Filtrets gränsfrekvens är $\omega_0 = 10^4$ rad/s, motsvarande 1,6 kHz, eftersom det är vid denna frekvens som amplitudförstärkningen är $1/\sqrt{2}$ av maximala värdet, som i detta fall är $= 1$.

Uppgift 6

a. Vi ska bestämma $y(t) = \mathcal{H}\{h(t)\} = (h * h)(t)$. För att bestämma denna faltning behöver vi undersöka två olika fall. Eftersom h innehåller enhetssteget $u(t)$ så kommer faltningen av denna funktion med sig själv att bli $= 0$ när $t \leq 0$. Det andra fallet inträffar för $t > 0$ och då blir

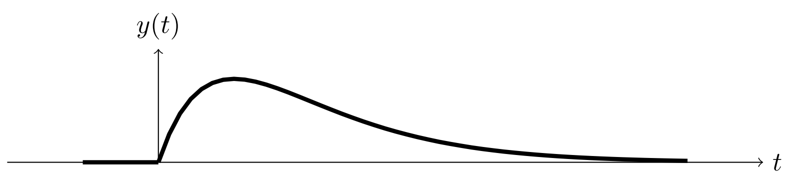
$$y(t) = (h * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} e^{-2(t-\tau)}\, e^{-2\tau}\, d\tau =$$

$$= e^{-2t} \int_{0}^{t} d\tau = e^{-2t} \cdot t.$$

Sammanfattningsvis:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ e^{-2t} \cdot t, & t > 0. \end{cases}$$

En plot av utsignalen $y(t)$ visas här:



b. För denna signal är vinkelfrekvensen $\omega = 2{,}5$ rad/s, vilket ger

$$H(2{,}5) = \frac{2}{j \cdot 2{,}5 + 3} = \frac{2}{3{,}2\, e^{j0{,}89}} = 0{,}625\, e^{-j0{,}891}.$$

Det innebär att systemet förstärker amplituden för denna signal med faktorn $D(2{,}5) = |H(2{,}5)| = 0{,}625$ och fasen förskjuts med $\psi(2{,}5) = \arg(H(2{,}5)) = -0{,}896$. Utsignalen blir därför

$$y(t) = 0{,}625 \cdot 2{,}1 \cos(8{,}6\, t + 0{,}45 - 0{,}896) = 1{,}31 \cos(8{,}6\, t - 1{,}35).$$