Försättsblad till skriftlig tentamen vid Linköpings universitet

Datum för tentamen	2016-10-28
Sal (5)	KÅRA T1 T2 U2 U4
Tid	8-12
Kurskod	TSBB16
Provkod	TEN2
Kursnamn/benämning **Provnamn/benämning**	Grundläggande systemmodeller Skriftlig tentamen
Institution	ISY
Antal uppgifter som ingår i tentamen	6
Jour/Kursansvarig Ange vem som besöker salen	Klas Nordberg
Telefon under skrivtiden	013-281634
Besöker salen ca klockan	10
Kursadministratör/kontaktperson (namn + tfnr + mailaddress)	Carina Lindström 4423 carina.e.lindstrom@liu.se
Tillåtna hjälpmedel	Räknedosa med rensat minne
Övrigt	Visning av tentor sker 2016-11-16, 12:20-13:00 i konferensrummet Algoritmen som ligger i hus B, A-korridoren nära ingång 29.
Antal exemplar i påsen	

Anvisningar för TSBB16/TEN2

Tentamen består av 6 uppgifter som var och en innehåller deluppgifter som kan ge olika antal poäng. Se även speciella anvisningar för uppgift 1.

Totalt kan tentamen ge maximalt 20 poäng.

För betyg 3 krävs minst 9 poäng.

För betyg 4 krävs minst 13 poäng.

För betyg 5 krävs minst 17 poäng.

I samtliga uppgifter, utom uppgift 1, ska svaret/lösningen motiveras. Bristande motivering medför poängavdrag.

Skriv ditt anonyma identitetsnummer (AID) överst på varje sida i skrivningen.

Tillåtna hjälpmedel: räknare med rensat minne.

Gör rimliga avrundningar av numeriska värden i dina svar.

Om numeriska värden anges på parametrar eller komponenter i uppgiften ska dessa användas i formuleringen av svaret.

Lösningsförslag kommer normalt att publiceras inom 5 arbetsdagar efter tentamenstillfället.

Lycka till!
Klas Nordberg

Uppgift 1 I nedanstående tabell finns fyra påståenden relaterade till innehållet i kursen. Ange för vart och ett av påståendena om det är sant eller falsk genom att kryssa i motsvarande ruta på samma rad. Korrekt svar på en deluppgift ger +1 poäng, felaktigt svar -1 poäng, medan utelämnat svar ger 0 poäng. *Du ska inte lämna någon motivering till ditt svar.*

PÅSTÅENDE	SANT	FALSKT
Ett tidsinvariant system har en utsignal y där utsignalens värde vid tiden t, alltså $y(t)$, enbart beror av insignalens värde vid samma tidpunkt, alltså av $x(t)$.		
Ett LTI-system som har insignalen $x(t) = A\ \cos(\omega t + \phi)$ har en utsignal $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ som även den är en cosinussignal. Utsignalen $y(t)$ har alltid samma vinkelfrekvens ω som insignalen $x(t)$.		
Ett LTI-system är linjärt, vilket betyder att utsignalen är en linjär funktion: $y(t) = k \cdot t + l$, där k och l är konstanter.		
Ett LTI-system har ett impulssvar $h(t)$ och ett stegsvar $\hat{h}(t)$. De är relaterade enligt $\hat{h}(t) = \frac{d}{dt} h(t)$.		

Uppgift 2 En specifik kanal har kapacitet att överföra 100 kbit/s. En tidskontinuerlig signal $s(t)$ samplas med $b = 8$ bitar per sampel och det är dessa bitar som sänds över kanalen i samma takt som signalen samplas.

a. Vilken maximal samplingsfrekvens f_s, mätt i sampel per sekund, kan samplingen ske med i detta fall? (1p)

b. En kortare sekvens av fem bitar ges av [0 1 1 0 0]. Hur ser den modulerade signal $z(t)$ ut som sänds över kanalen ut vid frekvensmodulation? Rita ett typiskt exempel som tydligt visar hur symbolerna "0" respektive "1" skiljer sig åt i den modulerade signalen $z(t)$. (1p)

Uppgift 3 Ett tidsdiskret system har ett impulssvar som beskrivs av filtervektorn $\mathbf{h} = [\,1\ \ 1\,]$. Dess utsignal $y[k]$ ges av

$$y[k] = (h * x)[k] = \sum_{l=0}^{1} h[l]\, x[k-l].$$

a. Systemet har en insignal $x[k]$ i form av en cosinussignal:

$$x[k] = 0{,}8 \cos(5{,}2\, k - 1{,}4).$$

Då är även $y[k]$ en cosinussignal. Bestäm amplitud och fas för $y[k]$. (2p)

b. Bestäm systemets frekvensfunktion $H(\omega)$. (1p)

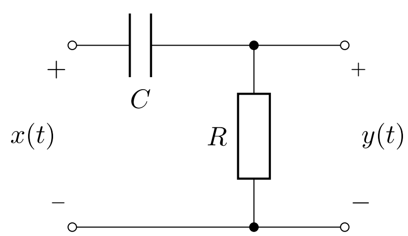
Uppgift 4 En tidskontinuerlig signal $s(t)$ består av två frekvenskomponenter:

$$s(t) = 8{,}2\cos(426\,t + 1{,}6) + 4{,}2\cos(738\,t - 0{,}8).$$

a. Signalen $s(t)$ samplas idealt med samplingsfrekvensen $f_s = 100$ Hz. Ange ett uttryck för motsvarande tidsdiskreta signal $s[k]$ (1p)

b. Från den tidsdiskreta signalen $s[k]$ återskapas en tidskontinuerlig signal $s_{\text{rek}}(t)$ genom ideal rekonstruktion. Bestäm ett uttryck för $s_{\text{rek}}(t)$. (2p)

Uppgift 5 Nedanstående figur visar en elektrisk krets som utgör ett LTI-system. Dess insignal är spänningen $x(t)$ och utsignal är spänningen $y(t)$.



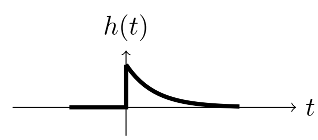
$R = 1{,}5$ kΩ

$C = 4{,}7$ nF

a. Använd $j\omega$-metoden för att bestämma kretsens frekvensfunktion $H(\omega)$. (2p)

Uppgift 6 Ett (kausalt) LTI-system $\mathcal{H}$ har ett impulssvar $h(t)$ som beskrivs med uttrycket

$$h(t) = u(t) \cdot e^{-3t}.$$



Systemet har en frekvensfunktion $H(\omega) = \frac{1}{j\omega+3}$.

a. Bestäm systemets stegsvar $\hat{h}(t)$. (2p)

b. Systemet används som ett frekvensselektivt filter. Vilken typ av filter är det? Vilken gränsfrekvens har det? (2p)

c. Systemet får en insignal $x(t) = 3{,}4\cos(8{,}6\,t + 1{,}2)$. Vad blir systemets utsignal $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$ i detta fall? (2p)

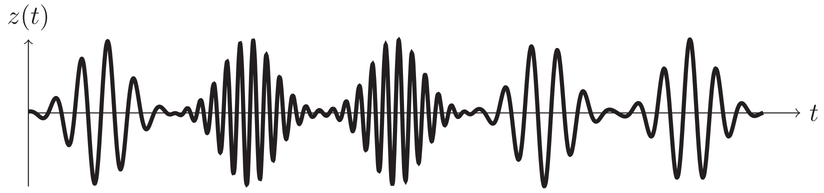
Uppgift 1

RÄTT SVAR	Kommentar
FALSKT	En tidsfördröjning: $y(t) = x(t - \Delta t)$ är ett exempel på ett LTI-system, men det uppfyller inte beskrivningen av tidsinvarians som ges i uppgiften. Utsignalens värde vid tiden t beror inte av insignalens värde vid tiden t, utan vid tiden $t - \Delta t$. Alltså: FALSKT.
SANT	LTI-system har egenskapen "cosinus in - cosinus ut" och då har in- och utsignal samma frekvens. Se avsnitt 6.1 i kompendiet.
FALSKT	Att ett LTI-system $\mathcal{H}$ är linjärt betyder att om signalen består av en linjärkombination av två signaler, $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, då blir systemets utsignal motsvarande linjärkombination deras utsignaler: $y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \mathcal{H}\{\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{H}\{x_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{H}\{x_2(t)\}$. Den utsignal som beskrivs i uppgiften behöver inte alls vara systemets utsignal i detta fall.
FALSKT	Det är impulssvaret som ges av $h(t) = \frac{d}{dt}\hat{h}(t)$.

Uppgift 2

a. Varje sampel motsvaras av $b = 8$ bitar, vilket genererar $b \cdot f_s$ bitar per sekund när signalen samplas med frekvensen f_s. Alltså måste $8 \cdot f_s \leq 100$ kHz, vilket ger $f_s \leq 12{,}5$ kHz.

b. Varje bit motsvaras i den modulerade signalen av en puls som typiskt har en gaussisk envelopp och en frekvens som beror av om biten är noll eller ett. Här antar vi att en nolla motsvaras av en lägre frekvens och en etta av högre frekvens.



Uppgift 3

a. Vi kan bestämma utsignalen genom att sätta in värdena för impulssvaret h och den kända insignalen x i uttrycket för $y[k]$:

$$
\begin{aligned}
y[k] &= h[0]\,x[k] + h[1]\,x[k-1] = 1 \cdot x[k] + 1 \cdot x[k-1] = \\
&= 0{,}8\cos(5{,}2\,k - 1{,}4) + 0{,}8\cos(5{,}2\,(k-1) - 1{,}4) = \\
&= 0{,}8\cos(5{,}2\,k - 1{,}4) + 0{,}8\cos(5{,}2\,k - 6.6) = \\
&= 0{,}8\big(\cos(5{,}2\,k)\cos(1{,}4) + \sin(5{,}2\,k)\sin(1{,}4)\big) + \\
&\qquad + 0{,}8\big(\cos(5{,}2\,k)\cos(6{,}6) + \sin(5{,}2\,k)\sin(6{,}6)\big) = \\
&= 0{,}9\cos(5{,}2\,k) + 1{,}04\sin(5{,}2\,k) = \\
&= \sqrt{0{,}9^2 + 1{,}04^2}\;\cos(5{,}2\,k - \mathrm{atan2}(1{,}04, 0{,}9)) = \\
&= 1{,}37\;\cos(5{,}2\,k - 0{,}86)
\end{aligned}
$$

b. $y[k] = \mathcal{H}\{x[k]\} = h[0]\,x[k] + h[1]\,x[k-1] \quad \Rightarrow$
$H(\omega) = h[0] + h[1]\,e^{-j\omega\,T_s} = 1 + e^{-j\omega T_s}$.

Här har vi använt oss av att frekvensfunktionen för en tidsfördröjning med Δt ges av $e^{-j\omega\Delta t}$ (kompendiet 6.4.2). Vidare ges frekvensfunktionen av en linjärkombination av två termer i systemoperatorn som motsvarande linjärkombination av termernas frekvensfunktioner (kompendiet 6.3.2). Slutligen att avståendet mellan två sampel ges av T_s = samplingsperioden.

Nu när vi har bestämt $H(\omega)$ kan vi även enkelt kontrollera deluppgift a) genom att bestämma hur systemet påverkar en cosinussignal med vinkelfrekvens $\omega = 5{,}2/T_s$ rad/s. Vi får $H(5{,}2/T_s) = 1+e^{-5{,}2j}$ $=1{,}47 + 0{,}88j$, vilket ger $D(5{,}2) = |H(5{,}2)| = |1{,}47 + 0{,}88j| = 1,71$ och $\psi(5{,}2) = \arg H(5{,}2) = \text{atan2}(0{,}88, 1{,}47) = 0{,}54$ rad. Det ger utsignalen

$y[k] = 1{,}71 \cdot 0{,}8 \cos(5{,}2k - 1{,}4 + 0{,}54) = 1{,}37 \cdot \cos(5{,}2k - 0{,}86)$.

Uppgift 4

a. Samplingsperioden blir $T_s = \frac{1}{f_s} = 0{,}01$ s. Vid ideal sampling ges $s[k]$ av

$$\begin{aligned} s[k] = s(T_s\,k) &= 8{,}2\cos(426\,T_s k + 1{,}6) + 4{,}2\cos(738\,T_s k - 0{,}8) = \\ &= 8{,}2\cos(4{,}26\,k + 1{,}6) + 4{,}2\cos(7{,}38\,k - 0{,}8) \end{aligned}$$

b. $f_s = 100 \Rightarrow \omega_s = 2\pi f_s = 628$ rad/s. Det ger Nyquist-frekvensen $\omega_N = \frac{1}{2}\omega_s = 314$ rad/s. Alla frekvenskomponenter som ligger över denna frekvens kommer att “vikas ned” efter ideal rekonstruktion. De ska då hamna på en frekvens som är en heltalsmultipel av ω_s från ursprungsfrekvensen där heltalet väljs så att resultatet ligger innanför Nyquist-frekvensen.

Den första frekvenskomponenten har frekvensen $\omega_1 = 426$ rad/s vilket är över ω_N. Med heltalsmultipeln 1 fås den nedvikta frekvensen $\omega_1' = \omega_1 - 1 \cdot \omega_s = 426 - 628 = -202$ rad/s. Denna frekvens har ett belopp $< \omega_N$, men eftersom ω_1' är negativt ska både frekvesnen och fasen byta tecken i motsvarande frekvenskomponent i s_{rek}.

Den andra frekvenskomponenter har frekvensen $\omega_2 = 738$ rad/s, vilket även det är över ω_N. Med heltalsmultipeln 1 fås den nedvikta frekvensen $\omega_2' = \omega_2 - 1 \cdot \omega_s = 738 - 628 = 110$ rad/s. Eftersom ω_2' landar på ett positivt värde ska fasen inte byta tecken.

Sammanfattningsvis kan den rekonstruerade signalen uttryckas som

$$s_{\text{rek}}(t) = 8{,}2\cos(202\,t - 1{,}6) + 4{,}2\cos(110\,t - 0{,}8).$$

Uppgift 5

a. Kapacitansen har en impedans på $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$. Utsignalens komplexa amplitud $\hat{Y}$ fås genom spänningsdelning av insignalens komplexa amplitud $\hat{X}$:

$$\hat{Y} = \hat{X} \cdot \frac{R}{R + Z_C} = \hat{X} \cdot \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \hat{X} \cdot \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}$$

Motsvarande frekvensfunktion blir då

$$H(\omega) = \frac{\hat{Y}}{\hat{X}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1} = \frac{j\omega \cdot 1500 \cdot 4,7 \cdot 10^{-9}}{j\omega \cdot 1500 \cdot 4,7 \cdot 10^{-9} + 1} = \frac{j\omega \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{j\omega \cdot 7 \cdot 10^{-6} + 1}$$

Rimlighetskontroll: För $\omega = 0$ fungerar kapacitansen som ett avbrott, dvs. då blir $y(t) = 0$. För mycket höga frekvensen fungerar kapacitansen som en kortslutning, dvs. då blir $y(t) = x(t)$. Detta stämmer med frekvensfunktionen som erhålls: $H(0) = 0$ och $H(\infty) = 1$.

Uppgift 6

a. Det finns (minst) två sätt att bestämma stegsvaret $\hat{h}(t)$ för detta system.

Alternativt 1: Stegsvaret ges av utsignalen när insignalen är ett enhetssteg: $\hat{h}(t) = \mathcal{H}\{u(t)\}$, dvs. $\hat{h}(t)$ fås genom att falta impulssvaret $h(t)$ med $u(t)$. För att beräkna $(h * u)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau$ behöver vi betrakta två fall:

Fall 1: $t \leq 0$. I det här fallet har $h(t-\tau)$ och $u(\tau)$ inget överlapp där båda är nollskilda. Alltså är $(h * u)(t) = 0$ när $t \leq 0$.

Fall 2: $t > 0$. I det här fallet är $h(t-\tau)$ och $u(\tau)$ båda två nollskilda i intervallet $[0, t]$. Det ger

$$(h * u)(t) = \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \cdot 1 \cdot d\tau = e^{-3t} \int_0^t e^{3\tau} \cdot 1 \cdot d\tau = e^{-3t} \left[\frac{1}{3} e^{3\tau}\right]_{\tau=0}^{\tau=t} =$$

$$= \frac{e^{-3t}}{3}(e^{-3t} - 1) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right).$$

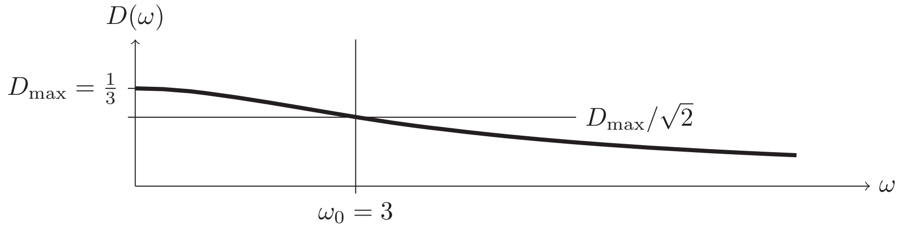
Alltså är $(h * u)(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$ när $t > 0$.

De två fallen kan sammanfattas med $\hat{h}(t) = u(t) \cdot \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$.

Alternativt 2: Sambandet mellan impulssvar stegsvar ges av $h(t) = \frac{d}{dt}\hat{h}(t)$. Vi söker alltså en funktion $\hat{h}(t)$ sådan att dess derivata ges av $h(t)$. Eftersom $h(t) = 0$ för $t \leq\!< 0$ måste $\hat{h}(t) =$ konstant för $t \leq 0$. Eftersom systemet är kausalt så är konstanten $= 0$. För $t > 0$ söker vi en primitiv funktion till $h(t) = e^{-3t}$, vilket ger $\hat{h}(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} + C$ där C är en konstant. Eftersom $h(t)$ har ett ändligt värde vid $t = 0$ måste $\hat{h}(t)$ vara kontinuerlig vid $t = 0$, alltså är $\hat{h}(t) = 0$ när $t = 0$. Det ger $C = \frac{1}{3}$.

Sammanfattningsvis: $(h * u)(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-3t}\right)$ när $t > 0$

b. Systemets amplitudkarakteristik ges av $D(\omega) = |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2+9}}$. För att tydligare se vilken typ av filter systemet motsvarar ritar vi upp denna funktion:



Amplitudkarakteristiken har ett max-värde $D_{\max} = 1/3$ för $\omega = 0$ och sedan avtar funktionen mot noll, alltså är systemet ett lågpassfilter. Dess gränsfrekvens ω_0 ges av $D(\omega_0) = D_{\max}/\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2+9}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0 = 3$ rad/s.

c. För denna signal är vinkelfrekvensen $\omega = 8{,}6$ rad/s, vilket ger

$$H(8{,}6) = \frac{1}{j \cdot 8{,}6 + 3} = \frac{1}{9{,}1\, e^{j1{,}24}} = 0{,}11\, e^{-j1{,}24}.$$

Det innebär att för denna frekvens förstärks signalens amplitud med $D(8{,}6) = |H(8{,}6)| = 0{,}11$ och fasen förskjuts med $\psi(8{,}6) = \arg(H(8{,}6)) = -1{,}24$. Utsignalen blir därför

$$y(t) = 0{,}11 \cdot 3{,}4 \cos(8{,}6t + 1{,}2 - 1{,}24) = 0{,}37 \cos(8{,}6t - 0{,}04).$$