# Formelsamling

i kursen Medicinska Bilder, TSBB31

1D och 2D Fouriertransformer,

samt några formler för CT, SPECT, mm

Maria Magnusson, maria.magnusson@liu.se

23 oktober 2019

# 1 1-D Tidskontinuerliga Fouriertransformer vinkelfrekvens, $\omega$

| | Signaldomän, $t \in \mathbf{R}$ | Fourierdomän, $\omega \in \mathbf{R}$ |
|---|---|---|
| Definition: | $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ | $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ |
| Linjäritet: | $ax_1(t) + bx_2(t)$ | $aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$ |
| Tidsskift: | $x(t-a)$ | $e^{-j\omega a}X(\omega)$ |
| Frekvensskift: | $e^{jat}x(t)$ | $X(\omega - a)$ |
| Dualitet: | $X(t)$ | $2\pi \cdot x(-\omega)$ |
| Skalning: | $x(at)$ | $(1/\|a\|) \cdot X(\omega/a)$ |
| Faltning: | $(x * h)(t)$ | $X(\omega) \cdot H(\omega)$ |
| Multiplikation: | $x(t) \cdot h(t)$ | $(1/(2\pi)) \cdot (X * H)(\omega)$ |
| Derivering: | $\frac{d}{dt}x(t)$ | $j\omega X(\omega)$ |
| Reell signal: | $x(t)$ reell | $X(-\omega) = X^*(\omega)$ |
| Diracpuls: | $\delta(t)$ | $1$ |
| Impulståg: | $\frac{1}{\Delta}\text{III}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \sum_k \delta(t - k\Delta)$ | $\text{III}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right) = \frac{2\pi}{\Delta}\sum_n \delta\left(\omega - \frac{n2\pi}{\Delta}\right)$ |
| Enhetssteg: | $u(t) = \begin{cases} 1, \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$ |
| Rektangelpuls: | $\Pi(t) = \begin{cases} 1, \ \|t\| \leq 0.5 \\ 0, \ \|t\| > 0.5 \end{cases}$ | $\text{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$ |
| Sincfunktion : | $\text{sinc}(t)$ | $\Pi(\omega/(2\pi))$ |
| Triangelpuls : | $\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - \|t\|, & \|t\| \leq 1 \\ 0, & \|t\| > 1 \end{cases}$ | $\text{sinc}^2(\omega/(2\pi))$ |
| Cosinusvåg: | $\cos\omega_0 t$ | $\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$ |
| 2 Dirac-er: | $\left(\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$ | $\cos(\Delta\omega)$ |
| Sinusvåg: | $\sin\omega_0 t$ | $j\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)$ |
| 2 Dirac-er: | $\left(-\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$ | $j\sin(\Delta\omega)$ |
| Konstant: | $1$ | $2\pi\delta(\omega)$ |
| Gauss: | $e^{-\pi t^2}$ | $e^{-\pi(\omega/2\pi)^2}$ |
| Diverse: | $e^{-at}u(t)$ | $1/(a + j\omega)$ |
| | $te^{-at}u(t)$ | $1/(a + j\omega)^2$ |
| | $e^{-a\|t\|}$ | $2a/(a^2 + \omega^2)$ |
| | $e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ |
| | $e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$ | $\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ |

# 2 1-D Tidskontinuerliga Fouriertransformer frekvens, $f$

| | Signaldomän, $t \in \mathbf{R}$ | Fourierdomän, $f \in \mathbf{R}$ |
|---|---|---|
| Definition: | $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$ | $X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$ |
| Linjäritet: | $ax_1(t) + bx_2(t)$ | $aX_1(f) + bX_2(f)$ |
| Tidsskift: | $x(t-a)$ | $e^{-j2\pi fa} X(f)$ |
| Frekvensskift: | $e^{j2\pi at} x(t)$ | $X(f-a)$ |
| Dualitet: | $X(t)$ | $x(-f)$ |
| Skalning: | $x(at)$ | $(1/\|a\|) \cdot X(f/a)$ |
| Faltning: | $(x * h)(t)$ | $X(f) \cdot H(f)$ |
| Multiplikation: | $x(t) \cdot h(t)$ | $(X * H)(f)$ |
| Derivering: | $\frac{d}{dt} x(t)$ | $j2\pi f X(f)$ |
| Reell signal: | $x(t)$ reell | $X(-f) = X^*(f)$ |
| Diracpuls: | $\delta(t)$ | 1 |
| Impulståg: | $\frac{1}{\Delta} \mathrm{III}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \sum_k \delta(t - k\Delta)$ | $\mathrm{III}(\Delta f) = \frac{1}{\Delta} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{\Delta}\right)$ |
| Enhetssteg: | $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ | $\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$ |
| Rektangelpuls: | $\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \|t\| \leq 0.5 \\ 0, & \|t\| > 0.5 \end{cases}$ | $\mathrm{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$ |
| Sincfunktion : | $\mathrm{sinc}(t)$ | $\Pi(f)$ |
| Triangelpuls : | $\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - \|t\|, & \|t\| \leq 1 \\ 0, & \|t\| > 1 \end{cases}$ | $\mathrm{sinc}^2(f)$ |
| Cosinusvåg: | $\cos 2\pi f_0 t$ | $\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)/2$ |
| 2 Dirac-er: | $\left(\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$ | $\cos(2\pi \Delta f)$ |
| Sinusvåg: | $\sin 2\pi f_0 t$ | $j\left(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right)/2$ |
| 2 Dirac-er: | $\left(-\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$ | $j \sin(2\pi \Delta f)$ |
| Konstant: | 1 | $\delta(f)$ |
| Gauss: | $e^{-\pi t^2}$ | $e^{-\pi f^2}$ |
| Diverse: | $e^{-at} u(t)$ | $1/(a + j2\pi f)$ |
| | $te^{-at} u(t)$ | $1/(a + j2\pi f)^2$ |
| | $e^{-a\|t\|}$ | $2a/(a^2 + (2\pi f)^2)$ |
| | $e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) u(t)$ | $\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$ |
| | $e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) u(t)$ | $\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$ |

# 3 2-D Kontinuerliga Fouriertransformer spatiella frekvenser, $(u, v)$

| | Spatialdomän, $x, y \in \mathbf{R}$ | Fourierdomän, $u, v \in \mathbf{R}$ |
|---|---|---|
| Definition: | $f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(xu+yv)} dudv$ | $F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(xu+yv)} dxdy$ |
| Reell signal: | $f(x,y)$ reell | $F(-u,-v) = F^*(u,v)$ |
| Linjäritet: | $af_1(x,y) + bf_2(x,y)$ | $aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$ |
| Translation, tid: | $f(x-a, y-b)$ | $e^{-j2\pi(au+bv)} F(u,v)$ |
| Translation, frekv: | $e^{j2\pi(ax+by)} f(x,y)$ | $F(u-a, v-b)$ |
| Skalning: | $f(ax, by)$ | $(1/\|ab\|) \cdot F(u/a, v/b)$ |
| Faltning: | $(f * g)(x,y)$ | $F(u,v) \cdot G(u,v)$ |
| Korrelation: | $(f \Box g)(x,y)$ | $F(-u,-v) \cdot G(u,v)$ |
| Korrelation, reell: | $(f \Box g)(x,y),\ f$ och $g$ reella | $F^*(u,v) \cdot G(u,v)$ |
| Multiplikation: | $f(x,y) \cdot g(x,y)$ | $(F * G)(u,v)$ |
| Derivering i x: | $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ | $j2\pi u \cdot F(u,v)$ |
| Derivering i y: | $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ | $j2\pi v \cdot F(u,v)$ |
| Laplace: | $\nabla^2 f(x,y) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x,y)$ | $-4\pi^2(u^2+v^2) \cdot F(u,v)$ |
| Generell skalning: | $f(\mathbf{A}\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{\|\det \mathbf{A}\|} F((\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{u}),\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ |
| Rotation 1: | $f(\mathbf{R}\mathbf{x}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ | $F(\mathbf{R}\mathbf{u}),\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ |
| Rotation 2: | $f(r, \theta + \theta_0)$ | $F(\omega, \varphi + \theta_0)$ |
| | $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ | $u = \omega\cos\varphi,\ v = \omega\sin\varphi$ |
| Separabel funktion: | $f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$ | $F(u,v) = G(u) \cdot H(v)$ |
| Diracpuls: | $\delta(x,y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$ | 1 |
| Box: | $\Pi(x,y) = \Pi(x) \cdot \Pi(y)$ | $\text{sinc}(u) \cdot \text{sinc}(v)$ |
| Böjd pyramid: | $\Lambda(x,y) = \Lambda(x) \cdot \Lambda(y)$ | $\text{sinc}^2(u) \cdot \text{sinc}^2(v)$ |
| Gauss: | $e^{-\pi(x^2+y^2)} = e^{-\pi x^2} \cdot e^{-\pi y^2}$ | $e^{-\pi(u^2+v^2)} = e^{-\pi u^2} \cdot e^{-\pi v^2}$ |

# 4 Definitioner, Egenskaper och Samband

DFT och IDFT, 1D och 2D:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$F[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f[n,m] \cdot e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)},$$

$$f[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} F[k,l] \cdot e^{j2\pi(nk/N+ml/M)}$$

Symmetrisk DFT och IDFT, 1D och 2D:

$$F[k] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$F[k,l] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1}\sum_{m=-M/2}^{M/2-1} f[n,m] \cdot e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)},$$

$$f[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1}\sum_{l=-M/2}^{M/2-1} F[k,l] \cdot e^{j2\pi(nk/N+ml/M)}$$

Faltning med en skiftad dirac-puls, 1D och 2D:

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')\delta(t'-t_0)\,dt' = x(t-t_0)$$

$$\begin{aligned} f(x,y) * \delta(x-x_0, y-y_0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-x', y-y')\delta(x'-x_0, y'-y_0)\,dx'dy' \\ &= f(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

Parseval's formel, 1D kontinuerlig, 2D kontinuerlig and 2D diskret:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\,df$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g^*(x,y)\,dxdy = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v)G^*(u,v)\,dudv$$

$$\sum_n\sum_m f[n,m]g^*[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_k\sum_l F[k,l]G^*[k,l]$$

# 5 Några mätvärden

**MTF, generell och cirkulärsymmetrisk:**

$$\text{MTF}(u,v) = \frac{|H(u,v)|}{H(0,0)}, \quad \text{MTF}(u) = \frac{|H(u,0)|}{H(0,0)}$$

**Medelvärdet (för ett stickprov) av N pixlar:**

$$m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n$$

**Standardavvikelen (för ett stickprov) av N pixlar:**

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(f_n - m)^2} = \sqrt{\frac{N}{N-1}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n^2\right) - m^2\right)}$$

**Olika varianter av SNR:**

$$\begin{aligned}
\text{SNR} &= \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}}\right)^2, \\
\text{SNR}_{\text{dB}} &= 10\log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}}\right), \\
\text{SNR}_a &= \mu/\sigma, \\
\text{CV} &= \sigma/\mu,
\end{aligned}$$

där $P_{signal}$ är signalens effekt,
$A_{signal}$ är signalens amplitud,
$\mu$ är signalens medelvärde (“signal-amplitud”) och
$\sigma$ är brusets standardavvikelse (“brus-amplitud”).

# 6 Lite fysik för röntgen- och gammastrålning

**Energi $(E)$ och frekvens $(\nu)$ för en foton:**

$$E = h\nu, \quad h = 6.626 \cdot 10^{-34}$$

**Dämpningen (attenuation) $\mu(E)$ och dess beroende av olika processer:**

$$\mu(E) = \rho \cdot (\mu_{mCo}(E) + \mu_{mIn}(E) + \mu_{mPh}(E)),$$

$E$: energy
$\rho$: density $[\text{kg}/\text{m}^3]$
$\mu_{mCo}(E)$: mass attenuation coefficient for coherent scattering $[\text{m}^2/\text{kg}]$
$\mu_{mIn}(E)$: mass attenuation coefficient for incoherent scattering $[\text{m}^2/\text{kg}]$
$\mu_{mPh}(E)$: mass attenuation coefficient for photoelectric absorbtion $[\text{m}^2/\text{kg}]$

# 7 CT

**Omvandling mellan Hounsfield värden $H$ $[\mathrm{HU}]$ och attenueringsvärden $\mu$ $[1/\mathrm{cm}]$:**

$$H = \frac{\mu - \mu_{\mathrm{H_2O}}}{\mu_{\mathrm{H_2O}}} \cdot 1000$$

**Dämpning (attenuation) av röntgenstrålning, samt röntgenprojektion $p(x)$ :**

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)\, dy\right),$$
$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)\, dy$$

där $I_0$ är inkommande intensitet, $I(x)$ är utgående intensitet, $\mu(x,y)$ är objektets dämpningsfunktion.

**Den parallella projektionen $p(r,\theta)$ av objektet $\mu(x,y)$:**

$$p(r,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x(s), y(s))\, ds,$$

där

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

**Projektionsteoremet:**

$$P(R,\theta) = F(u,v)|_{u=R\cos\theta, v=R\sin\theta} = F(R\cos\theta, R\sin\theta),$$

där $P(R,\theta) = \mathcal{F}_r[p(r,\theta)]$, $F(u,v) = \mathcal{F}_2[f(x,y)]$, och $p(r,\theta)$ är den parallella projektionen av objektet $f(x,y)$.

**Filtrerad återprojektion (2D parallella varianten):**

- Tag projektioner $p(r,\theta)$ och beräkna fouriertransformen i $r$-riktningen, $P(R,\theta)$.
- Utför ramp-filtrering:

$$Q(R,\theta) = \mathcal{F}_r[p(r,\theta)] \cdot H(R), \quad H(r) = |R|$$
$$q(r,\theta) = \mathcal{F}_r^{-1}[Q(R,\theta)]$$

- Utför återprojektion:

$$\hat{f}(x,y) = \int_0^{\pi} q(r,\theta)\, d\theta = \int_0^{\pi} q(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\, d\theta$$

# 8 Gamma-kameran, SPECT

**Gammakameraprojektion $\phi(x)$, en vinkel:**

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y)\; dy,$$

där $A$ är aktivitetsfunktionen, dvs antalet emitterade fotoner.

**SPECTprojektioner $\phi(l, \phi)$, (flera vinklar):**

$$\phi(l, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x(s), y(s))\; ds,$$

där

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix}$$

**SPECTprojektioner $\phi(l, \phi)$, mer noggrant:**

$$\phi(l, \phi) = \int_{-\infty}^{R} \frac{A(x(s), y(s))}{4\pi(s-R)^2} \exp\left\{-\int_{s}^{R} \mu(x(s'), y(s'); E)\; ds'\right\} ds,$$

där $R$ är detektorns position, $E$ är energin, $\mu(x, y)$ är objektets dämpningsfunktion.

**Iterativ rekonstruktion med ML-EM algoritmen:**

$$f_i^{k+1} = \frac{f_i^k}{\sum_{j=1}^{m} A_{ji}} \sum_{j=1}^{m} \left( A_{ji} \frac{p_j}{\sum_{i'=1}^{m} A_{ji'} f_{i'}^k} \right),$$

där $f_i$ är en bildpunkt,
$p_j$ är ett uppmätt projektionsvärde,
$\sum_{i'=1}^{m} A_{ji'} f_{i'}^k$ är ett beräknat projektionsvärde (framåtprojektion)
$\sum_{i'=1}^{m} A_{ji'}$ används för normalisering,
och den återstående summan är en återprojektion.