Formelsamling

i kursen Medicinska Bilder, TSBB31

1D och 2D Fouriertransformer,

samt några formler för CT, SPECT, mm

Maria Magnusson, maria.magnusson@liu.se

26 augusti 2022

1 1-D Tidskontinuerliga Fouriertransformer vinkelfrekvens, ω

	Signaldomän, $t \in \mathbf{R}$	Fourierdomän, $\omega \in \mathbf{R}$
Definition:	$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$
Linjäritet:	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$
Tidsskift:	$x(t-a)$	$e^{-j\omega a}X(\omega)$
Frekvensskift:	$e^{jat}x(t)$	$X(\omega - a)$
Dualitet:	$X(t)$	$2\pi \cdot x(-\omega)$
Skalning:	$x(at)$	$(1/\|a\|) \cdot X(\omega/a)$
Faltning:	$(x * h)(t)$	$X(\omega) \cdot H(\omega)$
Multiplikation:	$x(t) \cdot h(t)$	$(1/(2\pi)) \cdot (X * H)(\omega)$
Derivering:	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Reell signal:	$x(t)$ reell	$X(-\omega) = X^*(\omega)$
Diracpuls:	$\delta(t)$	1
Impulståg:	$\frac{1}{\Delta}\mathrm{III}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \sum_k \delta(t - k\Delta)$	$\mathrm{III}\left(\frac{\Delta\omega}{2\pi}\right) = \frac{2\pi}{\Delta}\sum_n \delta\left(\omega - \frac{n2\pi}{\Delta}\right)$
Enhetssteg:	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
Rektangelpuls:	$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \|t\| \leq 0.5 \\ 0, & \|t\| > 0.5 \end{cases}$	$\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}$
Sincfunktion :	$\mathrm{sinc}(t)$	$\Pi(\omega/(2\pi))$
Triangelpuls :	$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - \|t\|, & \|t\| \leq 1 \\ 0, & \|t\| > 1 \end{cases}$	$\mathrm{sinc}^2(\omega/(2\pi))$
Cosinusvåg:	$\cos\omega_0 t$	$\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)\right)$
2 Dirac-er:	$\left(\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$	$\cos(\Delta\omega)$
Sinusvåg:	$\sin\omega_0 t$	$j\pi\left(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right)$
2 Dirac-er:	$\left(-\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$	$j\sin(\Delta\omega)$
Konstant:	1	$2\pi\delta(\omega)$
Gauss:	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi(\omega/2\pi)^2}$
Diverse:	$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
	$te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
	$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$
	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$

2 1-D Tidskontinuerliga Fouriertransformer frekvens, f

	Signaldomän, $t \in \mathbf{R}$	Fourierdomän, $f \in \mathbf{R}$
Definition:	$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
Linjäritet:	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(f) + bX_2(f)$
Tidsskift:	$x(t-a)$	$e^{-j2\pi fa} X(f)$
Frekvensskift:	$e^{j2\pi at} x(t)$	$X(f-a)$
Dualitet:	$X(t)$	$x(-f)$
Skalning:	$x(at)$	$(1/\|a\|) \cdot X(f/a)$
Faltning:	$(x * h)(t)$	$X(f) \cdot H(f)$
Multiplikation:	$x(t) \cdot h(t)$	$(X * H)(f)$
Derivering:	$\frac{d}{dt} x(t)$	$j2\pi f X(f)$
Reell signal:	$x(t)$ reell	$X(-f) = X^*(f)$
Diracpuls:	$\delta(t)$	1
Impulståg:	$\frac{1}{\Delta} \mathrm{III}\left(\frac{t}{\Delta}\right) = \sum_k \delta(t - k\Delta)$	$\mathrm{III}(\Delta f) = \frac{1}{\Delta} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{\Delta}\right)$
Enhetssteg:	$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Rektangelpuls:	$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & \|t\| \leq 0.5 \\ 0, & \|t\| > 0.5 \end{cases}$	$\mathrm{sinc}(f) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$
Sincfunktion :	$\mathrm{sinc}(t)$	$\Pi(f)$
Triangelpuls :	$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - \|t\|, & \|t\| \leq 1 \\ 0, & \|t\| > 1 \end{cases}$	$\mathrm{sinc}^2(f)$
Cosinusvåg:	$\cos 2\pi f_0 t$	$\left(\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)\right)/2$
2 Dirac-er:	$\left(\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$	$\cos(2\pi\Delta f)$
Sinusvåg:	$\sin 2\pi f_0 t$	$j\left(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)\right)/2$
2 Dirac-er:	$\left(-\delta(t - \Delta) + \delta(t + \Delta)\right)/2$	$j \sin(2\pi\Delta f)$
Konstant:	1	$\delta(f)$
Gauss:	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
Diverse:	$e^{-at} u(t)$	$1/(a + j2\pi f)$
	$te^{-at} u(t)$	$1/(a + j2\pi f)^2$
	$e^{-a\|t\|}$	$2a/(a^2 + (2\pi f)^2)$
	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) u(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$
	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) u(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$

3 2-D Kontinuerliga Fouriertransformer spatiella frekvenser, (u, v)

	Spatialdomän, $x, y \in \mathbf{R}$	Fourierdomän, $u, v \in \mathbf{R}$
Definition:	$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(xu+yv)}dudv$	$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(xu+yv)}dxdy$
Reell signal:	$f(x,y)$ reell	$F(-u,-v) = F^*(u,v)$
Linjäritet:	$af_1(x,y) + bf_2(x,y)$	$aF_1(u,v) + bF_2(u,v)$
Translation, spat:	$f(x-a, y-b)$	$e^{-j2\pi(au+bv)}F(u,v)$
Translation, frekv:	$e^{j2\pi(ax+by)}f(x,y)$	$F(u-a, v-b)$
Skalning:	$f(ax, by)$	$(1/\|ab\|) \cdot F(u/a, v/b)$
Faltning:	$(f * g)(x,y)$	$F(u,v) \cdot G(u,v)$
Korrelation:	$(f \Box g)(x,y)$	$F(-u,-v) \cdot G(u,v)$
Korrelation, reell:	$(f \Box g)(x,y),\ f$ och g reella	$F^*(u,v) \cdot G(u,v)$
Multiplikation:	$f(x,y) \cdot g(x,y)$	$(F * G)(u,v)$
Derivering i x:	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$	$j2\pi u \cdot F(u,v)$
Derivering i y:	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$	$j2\pi v \cdot F(u,v)$
Laplace:	$\nabla^2 f(x,y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y)$	$-4\pi^2(u^2+v^2) \cdot F(u,v)$
Generell skalning:	$f(\mathbf{Ax}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\|\det \mathbf{A}\|} F((\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{u}),\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
Rotation 1:	$f(\mathbf{Rx}),\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$F(\mathbf{Ru}),\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
Rotation 2:	$f(r, \theta + \theta_0)$ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$	$F(\omega, \varphi + \theta_0)$ $u = \omega\cos\varphi,\ v = \omega\sin\varphi$
Separabel funktion:	$f(x,y) = g(x) \cdot h(y)$	$F(u,v) = G(u) \cdot H(v)$
Diracpuls:	$\delta(x,y) = \delta(x) \cdot \delta(y)$	1
Box:	$\Pi(x,y) = \Pi(x) \cdot \Pi(y)$	$\text{sinc}(u) \cdot \text{sinc}(v)$
Böjd pyramid:	$\Lambda(x,y) = \Lambda(x) \cdot \Lambda(y)$	$\text{sinc}^2(u) \cdot \text{sinc}^2(v)$
Gauss:	$e^{-\pi(x^2+y^2)} = e^{-\pi x^2} \cdot e^{-\pi y^2}$	$e^{-\pi(u^2+v^2)} = e^{-\pi u^2} \cdot e^{-\pi v^2}$

4 Definitioner, Egenskaper och Samband

DFT och IDFT, 1D och 2D:

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$F[k,l] = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f[n,m] \cdot e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)},$$

$$f[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{M-1} F[k,l] \cdot e^{j2\pi(nk/N+ml/M)}$$

Symmetrisk DFT och IDFT, 1D och 2D:

$$F[k] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} f[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad f[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} F[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$F[k,l] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1}\sum_{m=-M/2}^{M/2-1} f[n,m] \cdot e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)},$$

$$f[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1}\sum_{l=-M/2}^{M/2-1} F[k,l] \cdot e^{j2\pi(nk/N+ml/M)}$$

Faltning med en skiftad dirac-puls, 1D och 2D:

$$x(t) * \delta(t-t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t')\delta(t'-t_0)\,dt' = x(t-t_0)$$

$$\begin{aligned} f(x,y) * \delta(x-x_0, y-y_0) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x-x', y-y')\delta(x'-x_0, y'-y_0)\,dx'dy' \\ &= f(x-x_0, y-y_0) \end{aligned}$$

Parseval's formel, 1D kontinuerlig, 2D kontinuerlig and 2D diskret:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)\,df$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)g^*(x,y)\,dxdy = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v)G^*(u,v)\,dudv$$

$$\sum_n\sum_m f[n,m]g^*[n,m] = \frac{1}{NM}\sum_k\sum_l F[k,l]G^*[k,l]$$

5 Några mätvärden

MTF, generell och cirkulärsymmetrisk:

$$\mathrm{MTF}(u,v) = \frac{|H(u,v)|}{H(0,0)}, \quad \mathrm{MTF}(u) = \frac{|H(u,0)|}{H(0,0)}$$

Medelvärdet (för ett stickprov) av N pixlar:

$$m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n$$

Standardavvikelen (för ett stickprov) av N pixlar:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{n=1}^{N}(f_n - m)^2} = \sqrt{\frac{N}{N-1}\left(\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n^2\right) - m^2\right)}$$

Olika varianter av SNR:

$$\begin{aligned}
\mathrm{SNR} &= \frac{P_{signal}}{P_{noise}} = \left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}}\right)^2, \\
\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} &= 10\log_{10}\left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}}\right) = 20\log_{10}\left(\frac{A_{signal}}{A_{noise}}\right), \\
\mathrm{SNR}_a &= \mu/\sigma, \\
\mathrm{CV} &= \sigma/\mu,
\end{aligned}$$

där P_{signal} är signalens effekt,
A_{signal} är signalens amplitud,
μ är signalens medelvärde (“signal-amplitud”) och
σ är brusets standardavvikelse (“brus-amplitud”).

6 Lite fysik för röntgen- och gammastrålning

Energi (E) och frekvens (ν) för en foton:

$$E = h\nu, \quad h = 6.626 \cdot 10^{-34}$$

Dämpningen (attenuation) $\mu(E)$ och dess beroende av olika processer:

$$\mu(E) = \rho \cdot (\mu_{mCo}(E) + \mu_{mIn}(E) + \mu_{mPh}(E)),$$

E: energy
ρ: density $[\mathrm{kg/m^3}]$
$\mu_{mCo}(E)$: mass attenuation coefficient for coherent scattering $[\mathrm{m^2/kg}]$
$\mu_{mIn}(E)$: mass attenuation coefficient for incoherent scattering $[\mathrm{m^2/kg}]$
$\mu_{mPh}(E)$: mass attenuation coefficient for photoelectric absorbtion $[\mathrm{m^2/kg}]$

7 CT

Omvandling mellan Hounsfield värden H [HU] **och attenueringsvärden** μ [1/cm]**:**

$$H = \frac{\mu - \mu_{\mathrm{H_2O}}}{\mu_{\mathrm{H_2O}}} \cdot 1000$$

Dämpning (attenuation) av röntgenstrålning, samt röntgenprojektion $p(x)$ **:**

$$I(x) = I_0 \exp\left(-\int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)\; dy\right),$$

$$p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x,y)\; dy$$

där I_0 är inkommande intensitet, $I(x)$ är utgående intensitet, $\mu(x,y)$ är objektets dämpningsfunktion.

Den parallella projektionen $p(r,\theta)$ **av objektet** $\mu(x,y)$**:**

$$p(r,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x(s), y(s))\; ds,$$

där

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

Projektionsteoremet:

$$P(R,\theta) = F(u,v)|_{u=R\cos\theta, v=R\sin\theta} = F(R\cos\theta, R\sin\theta),$$

där $P(R,\theta) = \mathcal{F}_r[p(r,\theta)]$, $F(u,v) = \mathcal{F}_2[f(x,y)]$, och $p(r,\theta)$ är den parallella projektionen av objektet $f(x,y)$.

Filtrerad återprojektion (2D parallella varianten):

- Tag projektioner $p(r,\theta)$ och beräkna fouriertransformen i r-riktningen, $P(R,\theta)$.
- Utför ramp-filtrering:

$$Q(R,\theta) = \mathcal{F}_r[p(r,\theta)] \cdot H(R), \quad H(r) = |R|$$
$$q(r,\theta) = \mathcal{F}_r^{-1}[Q(R,\theta)]$$

- Utför återprojektion:

$$\hat{f}(x,y) = \int_0^{\pi} q(r,\theta)\; d\theta = \int_0^{\pi} q(x\cos\theta + y\sin\theta, \theta)\; d\theta$$

8 Gamma-kameran, SPECT

Gammakameraprojektion $\phi(x)$, en vinkel:

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y)\; dy,$$

där A är aktivitetsfunktionen, dvs antalet emitterade fotoner.

SPECTprojektioner $\phi(l, \phi)$, (flera vinklar):

$$\phi(l, \phi) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x(s), y(s))\; ds,$$

där

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ s \end{pmatrix}$$

SPECTprojektioner $\phi(l, \phi)$, mer noggrant:

$$\phi(l, \phi) = \int_{-\infty}^{R} \frac{A(x(s), y(s))}{4\pi(s-R)^2} \exp\left\{ -\int_{s}^{R} \mu(x(s'), y(s'); E)\; ds' \right\} ds,$$

där R är detektorns position, E är energin, $\mu(x, y)$ är objektets dämpningsfunktion.

Iterativ rekonstruktion med ML-EM algoritmen:

$$f_i^{k+1} = \frac{f_i^k}{\sum_{j=1}^{m} A_{ji}} \sum_{j=1}^{m} \left(A_{ji} \frac{p_j}{\sum_{i'=1}^{m} A_{ji'} f_{i'}^k} \right),$$

där f_i är en bildpunkt,
p_j är ett uppmätt projektionsvärde,
$\sum_{i'=1}^{m} A_{ji'} f_{i'}^k$ är ett beräknat projektionsvärde (framåtprojektion)
$\sum_{i'=1}^{m} A_{ji'}$ används för normalisering,
och den återstående summan är en återprojektion.