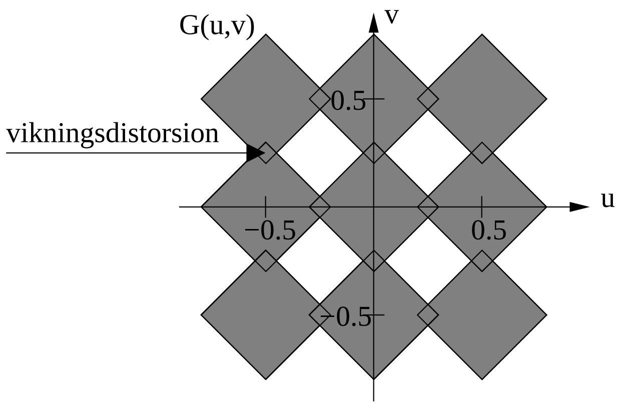
Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2012-10-25

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se),
Hans Knutsson, Mats Andersson, Gustaf Johansson

DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

Uppgift 1 (2p)



Ja, det blev vikningsdistorsion på flera ställen. Pilen pekar på ett ställe.

Uppgift 2 (2p)

$$\begin{aligned} G(u,v) &= F(u,v) * 0.5 \sum_n \delta(u - 0.5n) \cdot 0.5 \sum_m \delta(v - 0.5m) \\ &= F(u,v) * 0.25 \sum_n \sum_m \delta(u - 0.5n, v - 0.5m) \\ &= 0.25 \sum_n \sum_m F(u - 0.5n, v - 0.5m) \end{aligned}$$

Uppgift 3 (2p)

$$\text{mykernel} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ \hline 6 & 0 & -12 & 0 & 6 \\ \hline 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} /64, \qquad g(x,y) \approx \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}.$$

Uppgift 4 (4p)

- Detta är en separabel funktion. Då gäller att

  $$G(u,v) = \mathcal{F}_2[g(x,y) = g_1(x) \cdot g_2(y)] = \mathcal{F}_1[g_1(x)] \cdot \mathcal{F}_1[g_2(y)] = G_1(u) \cdot G_2(v).$$

  Tabell ger att

  $$\mathcal{F}_1\left[\Pi\left(\frac{x}{10}\right)\right] = 10\mathrm{sinc}(10u),$$
  $$\mathcal{F}_1\left[\Pi\left(\frac{y}{20}\right)\right] = 20\mathrm{sinc}(20v).$$

  Detta ger svaret

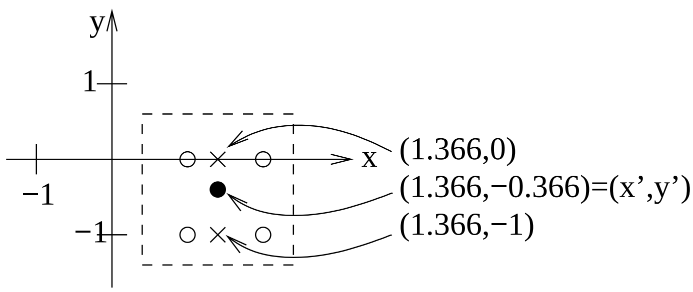
  $$\mathcal{F}_2\left[\Pi\left(\frac{x}{10}\right) \cdot \Pi\left(\frac{y}{20}\right)\right] = 200\mathrm{sinc}(10u)\mathrm{sinc}(20v).$$

- *Skalningsteoremet* säger att om ett bildobjekt är bredare i x-led än i y-led så gäller det omvända förhållandet för dess fouriertransform. Detta uppfylls endast av b), c) och e).
  Translationsteoremet säger att absolutbeloppet av fouriertransformen inte förändras vid translation. Speciellt sker ingen translation i fourierdomänen. Detta uppfylls endast av d), e) och f).
  Rätt svar är alltså e).

Uppgift 5 (4p)
Kalla inbilden $f(x', y')$ och den roterade bilden $g(x, y)$. Då gäller

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Punkten $(x, y) = (1, 1)$ och vinkeln $\alpha = 60^\circ$ insatt i formeln ovan ger koordinaten $(x', y') \approx (1.366, -0.366)$.



Se figur ovan. Interpolera först 1D i x-led och sedan 1D i y-led. Interpolationsfunktionen placeras först horisontellt i punkten $(1.366, 0)$.
$\Lambda(0.366) = 0.634$ interagerar då med $f(1, 0)$ och $\Lambda(0.634) = 0.366$ interagerar med $f(2, 0)$.

Sedan placeras $\Lambda(\ )$ i punkten $(1.366, -1)$.
$\Lambda(0.366)$ interagerar då med $f(1, -1)$ och $\Lambda(0.634)$ interagerar med $f(2, -1)$.
Till sist placeras $\Lambda(\ )$ vertikalt i punkten $(1.366, -0.366)$.
$\Lambda(0.366) = 0.634$ interagerar då med $f(1.366, 0)$ och $\Lambda(0.634) = 0.366$ interagerar med $f(1.366, -1)$.
Beräkningarna blir

$$\begin{aligned}
f(1.366, 0) &= f(1, 0) \cdot \Lambda(0.366) + f(2, 0) \cdot \Lambda(0.634) = 4, \\
f(1.366, -1) &= f(1, -1) \cdot \Lambda(0.366) + f(2, -1) \cdot \Lambda(0.634) = 7.536, \\
f(1.366, -0.366) &= f(1.366, 0) \cdot \Lambda(0.366) + f(1.366, -1) \cdot \Lambda(0.634) = \\
&= 4 \cdot 0.634 + 7.536 \cdot 0.366 = 5.29
\end{aligned}$$

DEL 2: Röntgen och CT

Uppgift 6 (2p)
Våra indata är fanbeam-projektioner.

Alternativ 1

- Utför viktning av fanbeam-projektionerna.
- Utför viktning av ramp-filtret.
- Utför ramp-filtrering.
- Utför återprojektion. Återprojektionen ska ske längs projektionsstrålarna i riktning mot röntgenkällan. Det sker också en viktning (med $1/L^2$) under återprojektionen. (L är avståndet mellan röngenkällan och aktuell position.)

Alternativ 2

- Utför rebinning till parallell-projektioner.
- Utför vanlig ramp-filtrering.
- Utför vanlig återprojektion längs parallella strålar.

Uppgift 7 (3p)
Se figuren nedan. De fyra projektionerna ger fyra återprojicerade delbilder som summeras och ger en resulternade bild.

Återprojektion av: $\phi=0^\circ$

0	−1	2	2	−1
0	−1	2	2	−1
0	−1	2	2	−1
0	−1	2	2	−1
0	−1	2	2	−1

$\phi=45^\circ$

1	2	2	1	−1
−1	1	2	2	1
−1	−1	1	2	2
0	−1	−1	1	2
0	0	−1	−1	1

$\phi=90^\circ$

−1	−1	−1	−1	−1
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
−1	−1	−1	−1	−1
0	0	0	0	0

$\phi=135^\circ$

0	−1	1	1	2
−1	1	1	2	1
1	1	2	1	1
1	2	1	1	−1
2	1	1	−1	0

Återprojektionsresultatet, summan av de 4 delbilderna:

0	−1	4	3	−1
0	3	7	8	3
2	1	7	7	4
0	−1	1	3	−1
2	0	2	0	0

Uppgift 8 (3p)

- En **röntgenkälla** ger normalt inte ifrån sig en enda frekvens ν (eller monoenergi $E = h\nu$), utan ett helt **spektrum** av olika frekvenser. **Dämpningen** μ för de olika vävnaderna i kroppen är **beroende av frekvensen** och vanligtvis minskar dämpningen för ökande frekvens. Formen på det spektrum som går in i kroppen skiljer sig därmed från formen på det spektrum som lämnar kroppen, med en förskjutning mot högre frekvenser. Spektrat har relativt sett blivit "hårdare", vilket förklarar benämningen "beam hardening".

- Den övre kurvan visar ett linjärt förhållande mellan $\mu\cdot$längd och längd. Detta erhålls om röntgenkällan endast ger en **mono-energi** och μ gäller för denna energi och **vatten**. Den undre kurvan visar det **verkliga förhållandet** mellan uppmätt projektionsvärde och olika tjocklekar ("längd") på en **vattenfantom**. Det som korrigeras är de **uppmätta projektionsvärdena**.

- Bildkvaliteten skulle bli **"perfekt"** om det objekt som man tomograferar bara innehåller **vatten**. Bildkvaliteten blir **"ganska bra"** om det objekt som man tomograferar bara innehåller **mjukdelar** eftersom dessa har en dämpning som liknar liknar vatten någorlunda. Bildkvaliteten blir **"inte så bra"** om det objekt som man tomograferar även innehåller **benvävnad** eftersom det inte liknar vatten-dämpningen.

DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

Uppgift 9 (2p)
Ett **radioaktivt material** distibueras till patienten. Detta emitterar **positroner**. Varje positron förenar sig snart med en **elektron**. Deras massor förbrukas och två fotoner med energin **511 keV** skapas. De färdas i motsatt riktning och detekteras. För att två fotoner ska betraktas som simultana måste **tidsfönstret** (tidsskillnaden) vara mycket litet, typiskt 2-20ns.

Uppgift 10 (2p)
Brusets energi är lika med variansen $\sigma_N^2 = \mu_N$. Brusets medelamplitud blir då lika med $\sigma_N = \sqrt{\mu_N}$. Då gäller:

$$SNR_a = \frac{\text{signalamplitud}}{\text{brusamplitud}} = \mu_N/\sqrt{\mu_N} = \sqrt{\mu_N}.$$

Alltså, ju mer radioaktivt material vi sprutar in i patienten, desto större blir signalamplituden μ_N och desto bättre blir SNR_a, ty det är proportionellt mot $\sqrt{\mu_N}$. (Givetvis ska man inte tillföra patienten så mycket radioaktivitet att det blir dåligt för hälsan.)

Uppgift 11 (3p)

```
kernel = ones(9,9,9);
kernelsize = 729;
SPECTm  = convn(SPECTvol, kernel, 'same') / kernelsize;
SPECT2m = convn(SPECTvol.^2, kernel, 'same') / kernelsize;
SPECTs = sqrt( kernelsize/(kernelsize-1)*(SPECT2m - SPECTm.^2) );
CV = SPECTs./SPECTm;
```

Uppgift 12 (2p)

$$Z = \sum_{k=1}^{K} a_k = 10 + 10 + 40 + 30 + 30 = 120,$$

$$X = \sum_{k=1}^{K} x_k a_k = 10 \cdot 0 + 10 \cdot (-2) + 40 \cdot 0 + 30 \cdot (2) + 30 \cdot 0 = 40,$$

$$Y = \sum_{k=1}^{K} y_k a_k = 10 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 30 \cdot (-2) = -40.$$

Gammafotonens position $(x_{pos}, y_{pos}) = \frac{(X,Y)}{Z} = \frac{(40,-40)}{120} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3},\right)$ mm.

DEL 4: Mikroskopi, mm

Uppgift 13 (2p)
Ljuset L filtreras i filtret till en våglängd som motsvarar absorbtionsvåglängden för **preparatet**. **Spegeln** reflekterar ljus av denna våglängd mot preparatet. Preparatet reflekterar sedan ljus av en lägre våglängd. Detta ljus transmitteras genom spegeln. Spegeln fungerar alltså så att den reflekterar vissa våglänger och transmitterar andra.

Uppgift 14 (2p)
Vi antar violett ljus, $\lambda = 0.4\mu m$, maxvinkel, $\theta = 90°$, och $n = 1.4$.

$$d = 1.22 \cdot 0.39 \cdot \frac{1}{1.4 \cdot 2 \sin 90°} = 1.22 \cdot 0.39 \cdot \frac{1}{1.4 \cdot 2} \approx 0.17\mu\text{m} \approx 0.2\mu\text{m}$$

DEL 5: Ultraljud

Uppgift 15 (3p)

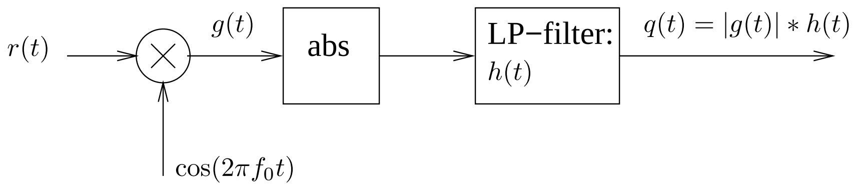
- **I.** Spektrum C: Ultraljudspulsen $f(t)$ är i princip en ren $\cos$-våg, d.v.s. en frekvens vars spektrum breddats något p.g.a. $\cos$-fönstret. Spektrumet har en positiv och en negativ frekvenskomponent.

  II. Spektrum D: Det mottagna ekot kommer ha ett spektrum snarlikt **I.**, men man kommer att kunna se en breddning av spektrumet p.g.a. övertoner.

  III. Spektrum B: Kvadraturfiltret approximerar den analytiska signalen, eftersom filtrets överföringsfunktion $H(\omega) = 0, \omega \leq 0$. D.v.s. Endast positiva frekvenser finns kvar.

  IV. Spektrum A: $|q(t)|$ är den detekterade enveloppen. Den demodulerade signalen har betydlig lägre frekvensinnehåll, samt en dominerande DC-term.

Uppgift 16 (2p)
Se figur. Signalen $r(t)$ är den mottagna signalen. Denna multipliceras med en cosinussignal till $g(t) = r(t) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$. Därefter tas absolutbeloppet, följt av lågpass-filtrering vilket ger $q(t)$, den önskade enveloppen.



Uppgift 17 (2p)
Spektrumkomponenter som är mindre än 1% av den starkaste komponenten kan anses oviktiga $\Rightarrow 20\ \log_{10}(0.01) = -40$ dB, vilket ungefär motsvarar frekvensen 1 MHz. Enligt samplingsteoremet krävs då en samlingsfrekvens $f_s^{(new)} \geq 2$ MHz. Det gäller att $f_s/f_s^{(new)} = 30/2 = 15$. Detta ger att signalen maximalt kan samplas ner en faktor 15.

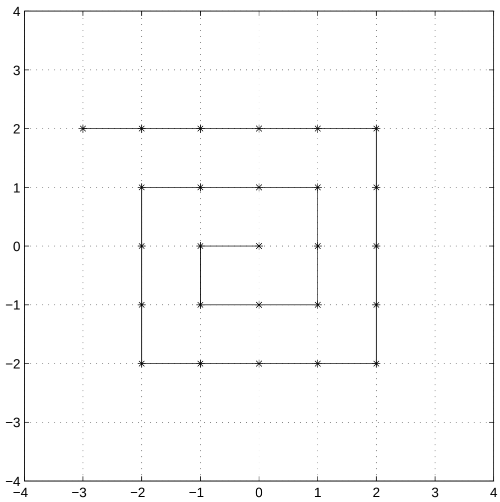
DEL 6: MRI

Uppgift 18 (2p)

- För att få bilder med högre upplösning måste man sampla längre ut i k-space.
- För att avbilda större spatiella områden måste sampelavståndet i k-space minskas för att undvika spatiell vikning.

Uppgift 19 (2p)
Under utsändandet av RF-pulsen låter man magnetfältet variera i den riktning som är vinkelrät mot bildplanet. Eftersom vävnad bara kommer att exciteras där ett visst förhållande råder mellan magnetfältets styrka och RF-pulsens frekvens, medför det att bara vävnad nära bildplanet kommer att exciteras. Tjockleken på det exiterade bildplanet bestämms av gradientens storlek och RF-pulsens bandbredd.

Uppgift 20 (4p)
Avsökningsbanan ges av integralen av Gx och Gy, se figur nedan.



Från figuren kan man se att k-space kommer att avsökas med lika avstånd över hela området, dvs det blir ‘som vanligt’ och den minsta tid som krävs blir då $512 \times 512 \times 2 = 524$ $[\mathrm{mS}]$.