

# Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2013-01-08

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se),  
Hans Knutsson, Mats Andersson, Gustaf Johansson

## DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

### Uppgift 1 (2p)

En reell signal har en hermitisk fouriertransform.

En jämn reell signal har en jämn och reell fouriertransform.

### Uppgift 2 (2p)

Bilden  $g_1(x, y)$  erhålls med *linjär faltning*.

Multiplikation i DFT-domänen motsvarar cirkulär faltning i spatialdomänen.

Bilden  $g_2(x, y)$  har alltså erhållits med *cirkulär faltning*.

De båda bilderna blir exakt lika i mitten, men längs kanterna skiljer de sig åt. (Eftersom faltningskärnans storlek var  $15 \times 15$ , kommer det att vara en 7 pixlar bred ram längs bildkanten där bilderna skiljer sig åt.)

### Uppgift 3 (3p)

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Filtret bör divideras med 49. Då kommer utbildens globala medelvärde att överensstämma med inbildens globala medelvärde.

### Uppgift 4 (4p)

$$h_{1T}(x, y) = \delta(x) \cdot [\delta(y + 1) + 2\delta(y) + \delta(y - 1)] / 4$$

$\Rightarrow$  {transformtabell och Eulers formel}  $\Rightarrow$

$$H_{1T}(u, v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi v)$$

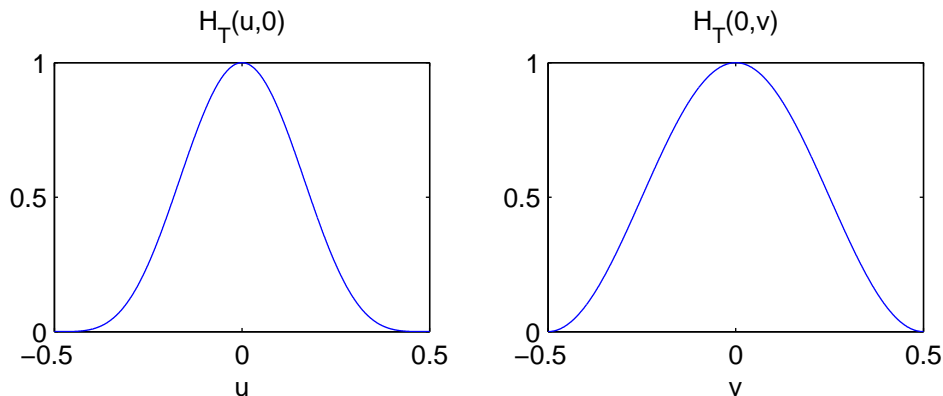
På liknande sätt erhålls

$$H_{2T}(u, v) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\pi u) + \frac{1}{8} \cos(4\pi u)$$

Faltning i spatialdomänen motsvarar multiplikation i Fourierdomänen. Detta ger svaret:

$$H_T(u, v) = \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\pi u) + \frac{1}{8} \cos(4\pi u) \right) \cdot \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\pi v) \right)$$

Figuren nedan visar att detta är ett LP-filter. LP-effekten är större i u-led.



### Uppgift 5 (3p)

Kalla interpolationsfiltret  $g(x)$ . Det gäller att

$$\begin{cases} g(0) = 1, \\ g(\pm\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}, \\ g(\pm\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}, \\ g(\pm 1) = 0. \end{cases}$$

För pixlarna A och B är det tillräckligt att interpolera i x-riktningen. För pixel C, beräknar man först A och en pixel, säg D, tre steg ovanför A. Dessa interpolering sker i x-riktningen. Sedan erhålls C genom interpolation i y-riktningen mellan A och D. (Det är också möjligt att konstruera en 2D-filter,  $g_2(x, y) = g(x) \cdot g(y)$ , och utföra en 2D interpolering direkt.)

$$B = g(-1) \cdot 0 + g(0) \cdot 1 + g(1) \cdot 0 = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$A = g\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 0 + g\left(\frac{1}{3}\right) \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

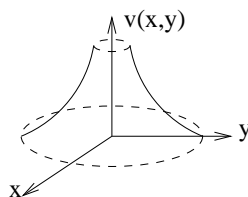
$$C = \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1 \right) + \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{2}{3} \cdot 2 \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{11}{9} \approx 1.222$$

## DEL 2: Röntgen och CT

### Uppgift 6 (2p)

Den erhållna bilden är den önskade bilden faltad med en "vulkan",

$$v(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$



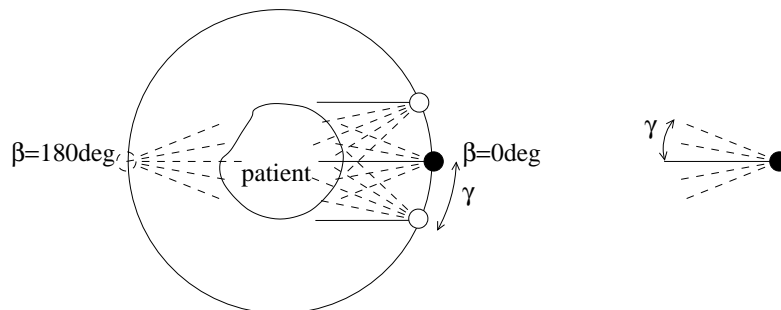
### Uppgift 7 (2p)

En CT-scanner ser ut som en stor ring. Inuti ringen sitter röntgenkällan. Detektorn sitter mittemot. Båda roterar runt. Patienten ligger på en patientbord. Under det att röntgenkälla-detektor roterar, rör sig bordet med patienten linjärt genom ringen. Sett från patientens koordinatsystem rör sig då röntgenkällan (och detektorn) i en helixformad bana.

### Uppgift 8 (2p)

För parallella projektioner behövs ett projektionsintervall på  $180^\circ$ .

Se figuren där den halva fanbeam-vinkeln  $\gamma$  indikeras. Antag att rebinning (interpolering från fan-beam till parallella strålar) utförs. Då behövs fanbeam-positionerna för  $[-\gamma, \gamma]$  för att producera en parallell projektion för  $0^\circ$ . Likaså behövs fanbeam-positionerna för  $[180^\circ - \gamma, 180^\circ + \gamma]$  för att producera en parallell projektion på  $180^\circ$ . Därför behövs åtminstone ett projektionsintervall på  $180^\circ$  plus fanbeam-vinkeln, dvs  $(180^\circ + 2\gamma)$ , för fanbeam-projektioner. (Observera att en del av fanbeam-strålarna utanför det parallella intervallet på  $[0^\circ, 180^\circ[$  måste kastas bort, såvida inte fanbeam-intervallet  $\beta \in [0^\circ, 360^\circ[$  väljs.)



### Uppgift 9 (3p)

Figuren illustrerar projektionsteoremet. I boxen med frågetecknet sker en 1D fouriertransform i r-led. Funktionen  $f(x, y)$  motsvarar objektet och  $F(u, v)$  är dess fouriertransform. Projektionsteoremet lyder:

“Den en-dimensionella fouriertransformen av en parallel projektion  $p(r, \theta)$  för en vinkel  $\theta$  av  $f(x, y)$ , är identisk med funktionsvärdena längs en radiell linje med samma vinkel  $\theta$  i den två-dimensionella fouriertransformen  $F(u, v)$ ”.

## DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

### Uppgift 10 (2p)

För små värden på  $r$  är  $BW(r) \approx 1$ , dvs låga frekvenser kan passera. För stora värden på  $r$  är  $BW(r) \ll 1$ , dvs höga frekvenser stoppas. Butterworth-filtret  $BW(r)$  är alltså ett lågpasfilter. Det minskar bruset i SPECT-volymer.

**Uppgift 11** (3p)

Strukturelementet (eller faltningkärnan)  $se$  har storleken  $3 \times 3 \times 3$  och liknar en liten "rund" boll fylld med 19 ettor. När man faltar med  $se$  blir värdena inne i det binära lungobjektet 19 och värdena i bakgrunden 0. På kanten mellan lunga och bakgrund erhålls värden i intervallet 1-18. Endast värden = 19 beaktas och blir till 1 i den resulterande volymen  $ctvolbin$ .

Effekten av koden är alltså att ett lager av voxlar längs kanten skalas av.

Vår binära lunga ska användas som en "mask" på SPECT-volymen. Genom att kanten är avskalad undviker vi kanteffekter från yttre gränsen av lungorna.

**Uppgift 12** (1p)

Då kan formeln förenklas till

$$f_i^{k+1} = f_i^k.$$

Bilden kommer inte att förändras mer, vi har nått konvergens. (Ofta avbryter man den iterativa rekonstruktionen i förtid, bl.a. för att minska beräkningstiden.)

**Uppgift 13** (2p)

De svarta prickarna noterar voxel-positioner. Antag att vi vill beräkna ett projektionsvärde längs den sneda linjen. Vi stegar oss då fram längs trianglarna. För varje triangelposition interpoleras värdet fram med hjälp av linjär interpolation mellan voxeln ovanför och voxeln under triangeln. (I 3D-fallet blir det en bi-linjär interpolation mellan 4 st voxlar.) Sedan summeras alla värdena i trianglarna. Slutligen multiplicerar man med

$$\frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}}{|x_1 - x_2|}.$$

Detta värde beskriver steglängden mellan trianglarna relativt voxelavståndet. Det måste användas i projektionsberäkningen enligt ovan för att den ska bli korrekt.

**Uppgift 14** (1p)

$$\mu_N = \sigma_N^2$$

**Uppgift 15** (2p)

Projektionerna  $p(l, \theta)$  av attenueringsfunktionen mäts upp vid en extra "transmission study". En liten radioaktiv källa på 511 keV utanför kroppen sänder gammastrålar med intensiteten  $I_0$  genom kroppen som mäts upp på andra sidan kroppen till  $I(l, \theta)$ . På samma sätt som vid CT används sedan formeln

$$p(l, \theta) = -\ln \left( \frac{I(l, \theta)}{I_0} \right).$$

Därefter divideras PET-projektionerna med  $p(l, \theta)$  och sedan utförs vanlig filtrerad återprojektion.

## DEL 4: Mikroskopi, mm

### Uppgift 16 (3p)

- Den viktigaste fördelen med ett konfokalt mikroskop är att upplösningen i z-led är så bra att man kan göra 3D-studier av ett preparat.
- Preparatet förbereds som för ett konventionellt ljusmikroskop och det är möjligt att studera både levande och fixerade celler.
- "Pinnhålet" släpper bara igenom ljus från det önskade z-planet (fokalplanet). Ljus från övriga plan hindras att komma fram till detektorn. Detta ger den goda upplösningen i z-led.

## DEL 5: Ultraljud

### Uppgift 17 (3p)

- Fouriertransformens samplingsteorem säger att vi måste sampla med dubbla frekvensen av den högsta förekommande frekvenskomponenten, dvs  $2 \cdot (2 \cdot 10^6 + 10 \cdot 10^3) \text{ Hz} = 4.02 \text{ MHz}$ .
- 1. Multiplicera med  $e^{i\omega_0 t}$  eller (primitivare)  $\cos(\omega_0 t)$ .  
2. Tag absolutbeloppet.  
3. Lågpasfiltrera.

Multiplikation i tidsdomänen motsvarar faltning i fourierdomänen (och vice versa). Att i tidsdomänen multiplicera  $s_m$  med en signal med samma frekvensinnehåll som den modulerande cosinus-funktionen  $\cos(\omega_0 t)$  gör att vi "flyttar ner" signalens frekvenser från bärfrekvensen  $\omega_0$  till DC (nollfrekvensen). Absolutbeloppet är till för att bli av med fasberoende. Lågpasfiltret är till för att bli av med de kopior av  $s_m$  som faltas upp till dubbla modulationsfrekvensen  $2\omega_0$  i Fourier-domänen.

### Uppgift 18 (2p)

2 Mhz motsvarar 2 miljoner svängningar per sekund. Tiden för utbredningen av fem svängningar är alltså  $5/(2 \cdot 10^6) \text{ s}$ . Sträckan som vågen kan tillryggalägga på denna tid är  $s = vt = 1500 \cdot 5/(2 \cdot 10^6) \text{ m}$ . Färdad sträcka, fram-och-tillbaka, motsvarar dubbla tjockleken mellan vävnaderna. Vi har då ett krav som kan uttryckas med ekvationen  $2a = 1500 \cdot 5/(2 \cdot 10^6)$ , vilket ger den numeriskt approximativa (upp)lösningen:  $a = 1.875 \text{ mm}$ .

## DEL 6: MRI

### Uppgift 19 (2p)

- Vi har fått spatiell vikning (notera att huvudet förutom vikningsartefakterna är större än i de andra bilderna). Samplingsavståndet i k-space är för stort för att

avbilda ett objekt med denna storlek. Lösningen är att minska samplingsavståndet. Om vi vill sampla lika långt ut i k-space som tidigare måste antalet sampel ökas.

- Bilden är suddig eftersom vi inte samplar tillräckligt mycket av de höga frekvenserna i k-space. Lösningen är att använda fler sampel och sampla längre ut i k-space med bibehållet samplingsavstånd.

### Uppgift 20 (2p)

- Spinnvektorerna orienteras antingen parallellt eller anti-parallellt med det stationära magnetfältet och precesserar runt magnetfältets riktning med Larmor-frekvensen  $\omega = \gamma B_0$  där  $\gamma = 42.58 \text{ MHz/T}$ .
- För en RF-puls med samma frekvens som Larmor-frekvensen,  $63.9 = 42.58 B_0$ , kommer spinnvektorn att röra sig bort från z-axeln och rotera i en spiral ner mot ner mot xy-planet.

### Uppgift 21 (4p)

- Förändringen av k-space positionen per tidsenhet ges av x- och y-magnetfältsgradienterna:

$$\frac{\partial k_x}{\partial t} = g_x$$

$$\frac{\partial k_y}{\partial t} = g_y$$

För spiralen gäller i kartesiska koordinater:

$$k_x = \alpha t \cos(\beta t)$$

$$k_y = \alpha t \sin(\beta t)$$

Vilket medför att gradienterna för spiral-skanningen ges av:

$$g_x = \frac{\partial k_x}{\partial t} = \alpha (\cos(\beta t) - \beta t \sin(\beta t))$$

$$g_y = \frac{\partial k_y}{\partial t} = \alpha (\sin(\beta t) + \beta t \cos(\beta t))$$

- För att inte riskera att få vikning måste avståndet mellan två på varandra följande sampel längst ut på spiralen vara lika långt (eller mindre än) avståndet mellan två närliggande varv.

Efter 256 varv befinner vi oss på avståndet  $r_{max}$  från origo. Avståndet mellan två varv:

$$\Delta r = r_{max}/256$$

Avståndet mellan två på varandra följande sampel:

$$\Delta s = r_{max} \Delta \varphi = r_{max} \beta \Delta t$$

Vilket ger:

$$\beta = 1/(256 \Delta t) = 391 [s^{-1}]$$