

Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2013-11-01

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se),
Hans Knutsson, Mats Andersson, Gustaf Johansson

DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

Uppgift 1 (2p)

- Filtret medelvärdesbildar i 11×11 -omgivningar. (Medelvärdesbildning är ekvivalent med lågpasfiltrering.) Därför blir bilden suddig.
- Bilden blir fortfarande suddig, men mycket ljusare än tidigare.

Uppgift 2 (2p)

- Efter **linjär faltning** erhålls en mörk ram runt bilden på grund av att värden utanför bilden kommer att påverka resultatet. Det är vanligt att dessa värden antas vara 0 vilket vanligen representerar svart.

Vid **cirkulär faltning** betraktar man bilden som upprepad eller cirkulär, dvs överkanten sitter ihop med underkanten och högerkanten sitter ihop med vänsterkanten. Därmed kommer de kanter som sitter ihop att påverka varandra. T ex blir överkanten mörkare och underkanten ljusare efter cirkulär faltning.

Uppgift 3 (2p) Utför

$$g(x, y) = \text{DFT}_2^{-1}[\text{DFT}_2[f(x, y)] \cdot \text{DFT}_2[h(x, y)]],$$

där $g(x, y)$ noterar den cirkulärfaltade resultatbilden, $f(x, y)$ noterar Foppa, $h(x, y)$ noterar faltningskärnan paddad med nollor till samma storlek som Foppa, DFT_2 noterar 2D DFT och DFT_2^{-1} noterar 2D invers DFT.

Uppgift 4 (5p)

- Insättning i formel ger

$$\begin{aligned} F_{DFT}[k, l] &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} f[n, m] \cdot e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)} \\ &= -4 + e^{-j2\pi k/N} + e^{j2\pi k/N} + e^{-j2\pi l/M} + e^{j2\pi l/M} \\ &= -4 + 2 \cos(2\pi k/N) + 2 \cos(2\pi l/M) \end{aligned}$$

b) Tabell ger

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \mathcal{F}_2 [-4\delta(u)\delta(v) + \delta(u-1)\delta(v) + \delta(u+1)\delta(v) \\ &\quad + \delta(u)\delta(v-1) + \delta(u)\delta(v+1)] \\ &= -4 + e^{-j2\pi u} \cdot 1 + e^{j2\pi u} \cdot 1 + 1 \cdot e^{-j2\pi v} + 1 \cdot e^{j2\pi v} \\ &= -4 + 2\cos(2\pi u) + 2\cos(2\pi v) \end{aligned}$$

c) $F_{DFT}[k, l] = F(k/N, l/M)$

d)

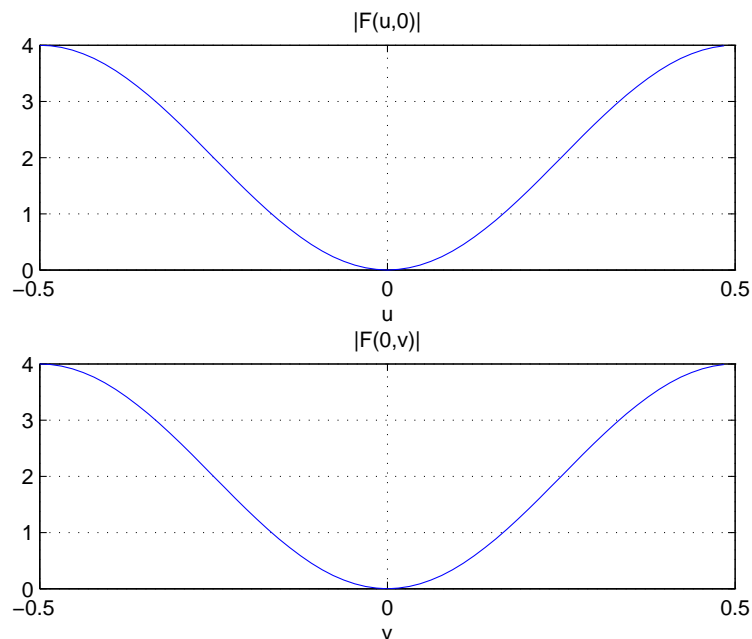
$$L(u, v) = \mathcal{F}_2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] = -4\pi^2 (u^2 + v^2)$$

Ett trigonometriskt samband ger att

$$\begin{aligned} F(u, v) &= -4 + 2\cos(2\pi u) + 2\cos(2\pi v) = -4\sin^2(\pi u) - 4\sin^2(\pi v) \\ &= -4\pi^2 \left(\frac{\sin^2(\pi u)}{\pi^2} + \frac{\sin^2(\pi v)}{\pi^2} \right). \end{aligned}$$

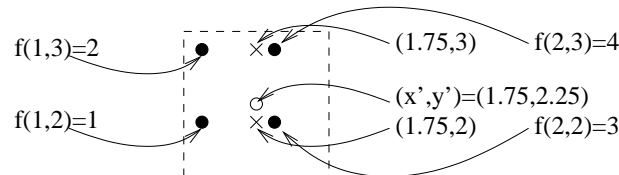
$F(u, v)$ och $L(u, v)$ är alltså lika varandra för små värden på (u, v) .

e) $|F(u, 0)|$ och $|F(0, v)|$ visas i plotten nedan. Filtret multiplicerar låga frekvenser med ett värde nära 0 och höga frekvenser med ett större värde. Filtret låter alltså *höga frekvenser passera*, det är ett *högpasfilter*. Det räcker med att skissa filtret i det nämnda intervallet eftersom fouriertransformen upprepar sig - filtret är ju samplat.



Uppgift 5 (3p)

- a) Den närmaste grannen till $(1.75, 2.25)$ är $(2, 2)$. Välj därför $f(2, 2) = 3$.
Svar: $f(1.75, 2.25) = 3$.
- b) Se figur nedan.



Den tvådimensionella interpolationskärnan $\Lambda(x) \cdot \Lambda(y)$ sträcker sig ut till den streckade kvadraten. Här väljer vi att utföra den bilinjära interpolationen först 1D i x-led och sedan 1D i y-led.

Interpolationsfunktionen $\Lambda(\)$ placeras först horisontellt i punkten $(1.75, 3)$. Avståndet till $(1, 3)$ är 0.75 , $\Lambda(0.75) = 0.25$ interagerar med $f(1, 3)$. Avståndet till $(2, 3)$ är 0.25 , $\Lambda(0.25) = 0.75$ interagerar med $f(2, 3)$. Sedan placeras $\Lambda(\)$ i punkten $(1.75, 2)$ och interagerar med $f(1, 2)$ och $f(2, 2)$.

Till sist placeras $\Lambda(\)$ vertikalt i punkten $(1.75, 2.75)$.

Avståndet till $(1.75, 2)$ är 0.25 , $\Lambda(0.25) = 0.75$ interagerar med $f(1.75, 2)$.

Avståndet till $(1.75, 3)$ är 0.75 , $\Lambda(0.75) = 0.25$ interagerar med $f(1.75, 3)$.

Beräkningarna blir

$$\begin{aligned} f(1.75, 3) &= f(1, 3) \cdot 0.25 + f(2, 3) \cdot 0.75 = 2 \cdot 0.25 + 4 \cdot 0.75 = 3.5, \\ f(1.75, 2) &= f(1, 2) \cdot 0.25 + f(2, 2) \cdot 0.75 = 1 \cdot 0.25 + 3 \cdot 0.75 = 2.5, \\ f(1.75, 2.25) &= f(1.75, 2) \cdot 0.75 + f(1.75, 3) \cdot 0.25 \\ &= 2.5 \cdot 0.75 + 3.5 \cdot 0.25 = 2.75 \end{aligned}$$

Svar: $f(1.75, 2.25) = 2.75$.

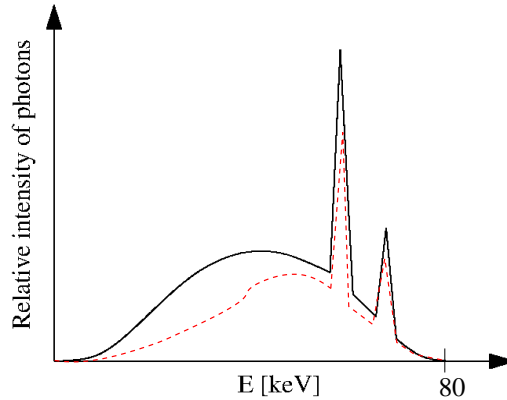
- c) Egentligen är det 16 st värden som påverkar interpolationsresultatet då $h(x)$ används istället för $\Lambda(x)$, men eftersom de flesta funktionsvärdena är 0 blir beräkningarna liknande som de i b)-uppgiften. Det gäller att $h(0.25) = 0.8672$ och $h(0.75) = 0.2266$. Detta ger

$$\begin{aligned} f(1.75, 3) &= f(1, 3) \cdot 0.2266 + f(2, 3) \cdot 0.8672 = 2 \cdot 0.2266 + 4 \cdot 0.8672 = 3.9, \\ f(1.75, 2) &= f(1, 2) \cdot 0.2266 + f(2, 2) \cdot 0.8672 = 1 \cdot 0.2266 + 3 \cdot 0.8672 = 2.8, \\ f(1.75, 2.25) &= f(1.75, 2) \cdot 0.8672 + f(1.75, 3) \cdot 0.2266 \\ &= 2.8 \cdot 0.8672 + 3.9 \cdot 0.2266 = 3.3 \end{aligned}$$

Svar: $f(1.75, 2.25) = 3.3$.

DEL 2: Röntgen och CT

Uppgift 6 (2p)



Det spektrum som gäller efter det att det färdats genom människokroppen har förändrats ungefär så som visas i figuren i den röda streckade kurvan, dvs de låga energierna har dämpats mer än de höga. Fenomenet kallas "beam-hardening".

Uppgift 7 (2p) Luft hamnar på ca 0. Lungor hamnar mellan ca 1 och ca 120. Mjukdelar hamnar mellan ca 120 och ca 150. Ben hamnar på värden $>$ ca 150. Tröskelvärden kan sättas på ca 120.

Uppgift 8 (2p) Rebinning innebär att *fanbeam*-projektionerna *interpoleras* till parallella projektioner (ett *sinogram*).

Uppgift 9 (4p)

a) $f(x, y) = 3 \cdot \Pi(x) \cdot \Pi(y)$ ger att $F(u, v) = 3 \cdot \text{sinc}(u) \cdot \text{sinc}(v)$.

b) $p(r, 0) = 3 \cdot \Pi(r)$ och $p(r, \pi/4) = 3\sqrt{2}\Lambda(\sqrt{2}r)$.

c) $P(R, 0) = 3\text{sinc}(R)$ och $P(R, \pi/4) = 3\text{sinc}^2(R/\sqrt{2})$.

d)

I) $F(R \cos 0, R \sin 0) = F(R, 0) = 3\text{sinc}(R) \cdot \text{sinc}(0) = 3\text{sinc}(R)$.

II) $P(R, 0) = 3\text{sinc}(R)$.

I), II) \Rightarrow Detta ger att $F(R \cos 0, R \sin 0) = P(R, 0)$. V.S.V.

III) $F(R \cos \pi/4, R \sin \pi/4) = F(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}) = 3\text{sinc}(R/\sqrt{2}) \cdot \text{sinc}(R/\sqrt{2}) = 3\text{sinc}^2(R/\sqrt{2})$.

IV) $P(R, \pi/4) = 3\text{sinc}^2(R/\sqrt{2})$

III), IV) \Rightarrow Detta ger att $F(R \cos \pi/4, R \sin \pi/4) = P(R, \pi/4)$. V.S.V.

DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

Uppgift 10 (2p)

$$Z = \sum_{k=1}^K a_k = 5 + 2 + 10 + 5 = 22,$$

$$X = \sum_{k=1}^K x_k a_k = 5 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 8 = 56$$

$$Y = \sum_{k=1}^K y_k a_k = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 56.$$

Gammafotonens position: $(x_{pos}, y_{pos}) = \frac{(X,Y)}{Z} = \frac{(56,56)}{22} \approx (2.55, 2.55)$ cm.

Uppgift 11 (1p) Som synes i föregående uppgift ger en gammafoton signal i de närliggande fotomultiplikatorerna. Positionen för gammafotonen beräknas som ett viktat medelvärde av de registrerade intensiteterna. Följdaktligen är det högre precision på gammafotonens läge än på avståndet mellan fotomultiplikatorerna.

Uppgift 12 (3p)

- Ett **radioaktivt material** distribueras till patienten i båda fallen.
- Detta emitterar gamma-**fotoner** i SPECT-fallet och **positroner** i PET-fallet, där varje positron snart förenar sig med en **elektron**, massorna förbrukas och två **fotoner** med energin **511 keV** skapas.
- I SPECT-fallet detekteras de fotoner som kommer i rätt vinkel, övriga fastnar i en **kollimator**. I PET-fallet färdas de två fotonerna i motsatt riktning och detekteras. För att två fotoner ska betraktas som simultana måste **tidsfönstret** (tidsskillnaden) vara mycket litet, typiskt 2-20ns.

Uppgift 13 (3p)

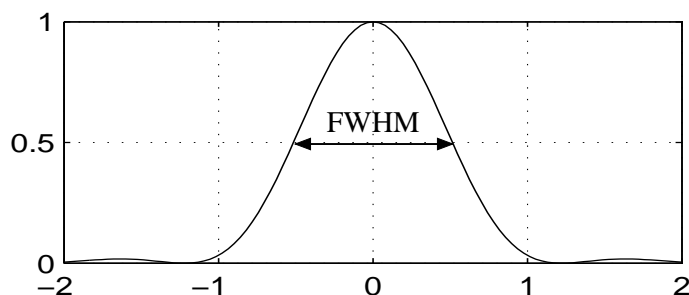
- Röntgenbilder och gammakamerabilder är projektionsbilder.
- CT- och SPECT-bilder är rekonstruerade bilder.
- Enheten för CT-bilder är röntgenattenuering [1/m] eller Hounsfield-enheter [HU].
- En SPECT-bild visar den radioaktiva aktiviteten.
- Enheten för en röntgenbild är röntgenattenuering multiplicerat med längd.
- Enheten för en gammakamerabild är radioaktivitet multiplicerat med längd.

Uppgift 14 (1p) $\sum_{j=1}^m A_{ji} \cdot f_i^k$ är det beräknade projekionsvärdet.

DEL 4: Viktiga begrepp/mätvärden

Uppgift 15 (2p) Formeln är: $MTF = |H(u, v)|/H(0, 0)$. Den säger oss hur systemet påverkar olika frekvenser.

Uppgift 16 (2p) Punktspridningsfunktionen = $h(x, y)$. FWHM är markerat i figuren nedan. FWHM ger det avstånd som två punkter måste vara separerade för att kunna särskiljas.



DEL 5: Ultraljud

Uppgift 17 (4p)

- Mottagens signal kan vara fäsförskjuten. Produkten $\cos(v) \cos(v + a)$ kan bli negativ under delar av perioden för vissa värden på a vilket då kan ge märkliga effekter, men $\cos(v)^2$ är ju en kvadrat av ett reellt tal och kan inte vara negativ.
- Med både en sinus och cosinus kan man skifta fäsen i varje tidpunkt så den passar den inkommande vågen. Metoden blir då inte längre känslig för fäskift hos mottagaren.
- En godkänd förklaring inbegriper att studenten visat kunskap om att de delar av frekvensspektrat som är 0 kan kastas utan förlust eller förvanskning. Och att vid nedsampling är nedsamlingsfaktorn lika med antalet gånger som max-frekvensen delas med. Dvs slänga vart N:e sampel betyder att den nya maxfrekvensen är den gamla delat på N och eventuella nollskilda frekvenskomponenter som finns över den nya maxfrekvensen kommer bidra till att signalen förvanskas (vinkningsdistortion).

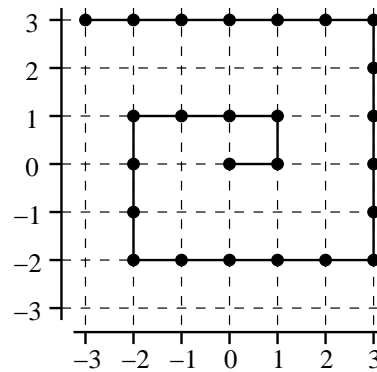
DEL 6: MRI

Uppgift 18 (2p)

- Bilden är suddig eftersom vi inte samplar tillräckligt mycket av de höga frekvenserna i k-space. Lösningen är att sampla längre ut i k-space med ökat samplingsavstånd.
- Vi har fått spatiell vikning (notera att huvudet förutom vinkningsartefakterna är större än i de andra bilderna). Samplingsavståndet i k-space är för stort för att avbilda ett objekt med denna storlek. Lösningen är att minska samplingsavståndet. Om vi vill sampla lika långt ut i k-space som tidigare måste antalet sampel ökas.

Uppgift 19 (6p)

a)



b) Övre halvan av k-space blir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 f_{24} & f_{23} & f_{22} & f_{21} & f_{20} & f_{19} & f_{18} \\
 f_{13}^* & f_{12}^* & f_{11}^* & f_{10}^* & f_9^* & f_8^* & f_{17} \\
 f_{14}^* & f_5 & f_4 & f_3 & f_2 & f_7^* & f_{16} \\
 f_{15}^* & f_6 & f_1^* & f_0 & f_1 & f_6^* & f_{15}
 \end{array}$$

där * betecknar komplexkonjugat.