

Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2014-10-30

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se),
Hans Knutsson, Mats Andersson

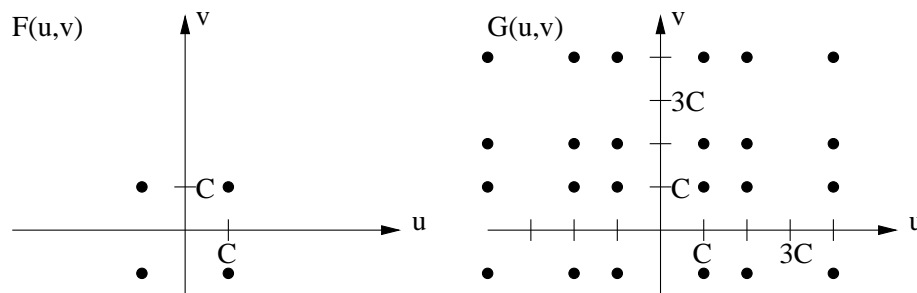
DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

Uppgift 1 (2p)

- a) $F(u, v) = F^*(-u, -v)$
 b) $\text{Re}[F(u, v)]$ är jämn och $\text{Im}[F(u, v)]$ är udda.

Uppgift 2 (4p)

- a) Då sampelavståndet är $\Delta = 1/(3C)$ kommer fouriertransformen att upprepa sig på $u = n \cdot 3C$, n heltal och $v = m \cdot 3C$, m heltal. Detta ger:



- b) Om $\Delta = 1/(2C)$ upprepar fouriertransformen sig på $u = n \cdot 2C$, $v = m \cdot 2C$. Detta ger precis vinkningsdistorsion. Följdaktligen gäller $\Delta < 1/(2C)$.

c)

$$f(x, y) = 2 \sin(2\pi \cdot 10x) \cdot 2 \sin(2\pi \cdot 10y) = g(x) \cdot h(y)$$

$$G(u) = j[\delta(u + 10) - \delta(u - 10)]$$

$$H(v) = j[\delta(v + 10) - \delta(v - 10)]$$

$$F(u, v) = G(u) \cdot H(v) =$$

$$- \delta(u + 10, v + 10) + \delta(u - 10, v + 10)$$

$$+ \delta(u + 10, v - 10) - \delta(u - 10, v - 10)$$

Detta ger att $A = -1$, $B = 1$, $C = 10$.

Uppgift 3 (4p)

		8	8	8	8		
		8	8	8	8		
		8	8	8	8		
		8	8	8	8		

f(x,y)

		1	1			-1	-1
		3	3			-3	-3
		4	4			-4	-4
		4	4			-4	-4
		3	3			-3	-3
		1	1			-1	-1

gx(x,y)

		-1	-3	-4	-4	-3	-1
		-1	-3	-4	-4	-3	-1
		1	3	4	4	3	1
		1	3	4	4	3	1

gy(x,y)

		A	B	4	4	B	A
		B	C	4	4	C	B
		4	4			4	4
		4	4			4	4
		B	C	4	4	C	B
		A	B	4	4	B	A

f2(x,y)

$$A = \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{10}$$

$$C = 3\sqrt{2}$$

$g_x(x, y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ är derivatan i x-riktningen,

$g_y(x, y) \approx \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ är derivatan i y-riktningen,

$f_2(x, y) \approx \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}$ är absolutbeloppet av gradienten.

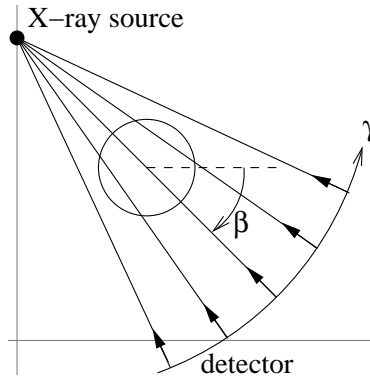
Uppgift 4 (3p)

- Det gäller att $S_{\text{patError}} = F_{\text{ouError}}$. Teoremet heter Parsevals teorem. (Den kontinuerliga varianten står i formelsamlingen.)
- De låga spatiella frekvenserna får lägst fel.
Motivering: Sinc-interpolation är den teoretiskt bästa metoden. Fouriertransformen av en sinc är en rektangel. Den behandlar alla frekvenser upp till bandgränsen lika. Praktiska interpolationskärnor har en Fouriertransform som överensstämmer mer eller mindre bra med rektangeln. De låga frekvenserna överensstämmer bra. Ju högre frekvens, ju sämre överensstämmelse.
Även enklare motiveringar än den ovan godtas som svar.
- Bicubisk interpolation ger lägst fel.

Uppgift 5 (2p)

- En punkt i objektbilden ger en sinuskurva i projektionsbilden (sinogrammet). P3 ger den horisontella linjen. P2 ger den låga bågen. P1 ger den höga bågen.
- Projektion-återprojektion är ekvivalent med faltning med en "vulkan", $v(x, y) = 1/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. De tre punkterna i D) kommer att ersättas av tre vulkaner. Hela bilden kommer att upplevas som suddigare.

Uppgift 6 (2p) Pilarna i figuren visar hur fanbeam återprojektion sker, från de rampfiltrerade projektiionsvärdena tillbaka mot röntgenkällans position.



Uppgift 7 (2p) Omskrivning av de givna formlerna ger

$$\begin{aligned}\gamma &= \arcsin(\rho/D), \\ \beta &= \theta - \gamma.\end{aligned}$$

Punkten $(\rho, \theta) = (100, \pi/4)$ transformeras till

$$\begin{aligned}\gamma &= \arcsin(\rho/D) = \arcsin(100/600) = \arcsin(1/6) \approx 0.1674 \\ \beta &= \theta - \gamma = \pi/4 - \arcsin(1/6) \approx 0.6180\end{aligned}$$

För $\gamma = 0.1674$ är punkten 0.167 närmare än $0.167 + \Delta\gamma = 0.169$.

För $\beta = 0.6180$ är punkten 0.61 längre bort än $0.61 + \Delta\beta = 0.62$.

Välj alltså $f(0.167, 0.61 + \Delta\beta) = 4 = p(100, \pi/4)$.

Uppgift 8 (2p) En MTF-kurva har alltid värdet 1 för frekvensen $u = 0$. (Detta ser man också i formelsamlingen.) Därmed går kurvorna C och D bort.

- Svar: B. Fina detaljer i en ryggkota innehåller höga frekvenser. B ger högre frekvensinnehåll än A.
- Svar: A. A dämpar brus bättre än B.

Uppgift 9 (3p)

a)

$$\begin{aligned}f(x, y) &= e^{-\pi((3x)^2+(3y)^2)} = e^{-\pi(3x)^2} \cdot e^{-\pi(3y)^2} \\ F(u, v) &= \frac{1}{3}e^{-\pi(u/3)^2} \cdot \frac{1}{3}e^{-\pi(v/3)^2} = \frac{1}{9}e^{-\pi((u/3)^2+(v/3)^2)}\end{aligned}$$

b)

$$p(r, \theta) = \frac{1}{3}e^{-\pi(3r)^2}$$

$$P(R, \theta) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}e^{-\pi(R/3)^2}$$

$$P(R, 0) = P(R, \pi/4) = \frac{1}{9}e^{-\pi(R/3)^2}$$

c) Antag först att $\theta = 0$:

$$F(R \cos \theta, R \sin \theta) = F(R, 0) = \frac{1}{9}e^{-\pi((R/3)^2+(0)^2)} = \frac{1}{9}e^{-\pi(R/3)^2} = P(R, 0)$$

Antag sedan att $\theta = \pi/4$:

$$F(R \cos \theta, R \sin \theta) = F(R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2}) =$$

$$= \frac{1}{9}e^{-\pi((R/3\sqrt{2})^2+(R/3\sqrt{2})^2)} = \frac{1}{9}e^{-\pi(R/3)^2} = P(R, \pi/4)$$

Uppgift 10 Här följer ett onödigt långt svar:

En stillastående gamma-kamera mäter en projektion av aktivitetsfunktionen inne i kroppen. En sådan projektionsbild kan man titta på och analysera, men precis som då det gäller vanliga röntgenbilder så är informationen överlagrad. Tex så blir hjärtats främre vägg överlagrad på hjärtats bakre vägg. Om man låter gammakameran rotera, så kan man mäta upp projektioner från många olika vinklar. Dessa skickas sedan till en rekonstruktionsalgoritm (ungefär som för CT) och resultatet blir snittbilder, eller en hel volym, där informationen inte är överlagrad. Detta är SPECT.

Uppgift 11 (2p)

	1	1	1		
	1	1	1		
	1	1	1		
	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1
	1	1	1	1	1

a(x,y)

1	2	3	2	1		
2	4	6	4	2		
3	6	9	6	3		
3	6	9	7	5	2	1
3	6	9	8	7	4	2
3	6	9	9	9	6	3
2	4	6	6	6	4	2
1	2	3	3	3	2	1

b(x,y)

		1				
		1				
		1				
		1	1	1		

c(x,y)

Uppgift 12 (2p)

CT-projektioner mäter objektets attenuering. Om man utnyttjar dessa i rekonstruktionsalgoritmen för SPECT-bilder kan man få en bättre, sannare SPECT-bild.

Uppgift 13 (2p) Gamma-fotonerna emitteras i alla riktningar. Kollimatorerna behövs för att exkludera fotoner som kommer från fel riktning. Då parallell-projektionen med vinkeln θ mäts kommer kollimatorerna att stoppa alla andra vinklar. SPECT-detektorerna snurrar runt patienten och mäter olika vinklar.

I PET produceras 2 fotoner i 180° :s riktning samtidigt. Detta ger riktningen direkt, så kollimatorer behövs inte för denna uppgift.

Nämnas bör dock att kollimatorerna behövs också för att ta hand om scatter, både i SPECT och PET.

Uppgift 14 (2p)

- a) OS-EM konvergerar mycket snabbare än ML-EM.
- b) Endast en delmängd av projektionerna används för uppdatering i varje sub-iterationssteg. Grupperingen av projektioner i varje sub-iterationssteg sker symmetriskt. (De projektioner som grupperas ihop ska skilja sig mycket åt. T ex är det bra att gruppera ihop $[0^\circ, 60^\circ, 120^\circ]$, men inte bra att gruppera ihop $[0^\circ, 1^\circ, 2^\circ]$.)

Uppgift 15 (4p)

- a) De pixlar som fick negativa värden på raden innan slumpas om.
- b) `pnoiseim = im + 10.*randn(100,100);`
- c) Ex 1) Används för att statistiskt karaktärisera fördelningen av fotoner räknat per ytenhet av en röntgenbildförstärkare.
Ex2) Används för att karaktärisera det antal fotoner som produceras av ett radioaktivt spårämne i nukleärmedicin.
- d) Ex1) Används för att karaktärisera elektroniskt kretsbrus.
Ex2) Används för att karaktärisera termiskt sensorbrus.

Uppgift 16 (2p) Amplituden på signalen som kristallerna i ultraljudsproben detekterar minskar kraftigt för ekon djupare ner i vävnaden. Detta kompenseras med en tidstyrd analog förstärkning innan A/D omvandlingen.

Med TGC så påverkas RF-signalen (och kontrasten i bilden) bara av skillnader i akustisk impedans hos olika vävnads typer. Om vi inte använde TGC skulle vi få ett beroende av både den akustiska impedansen och djupet i vävnaden.

Den höga förstärkningen för djupt liggande vävnad gör att SNR minskar för djupt liggande vävnad.

Uppgift 17 (2p) Enligt samplingsteoremet så är den högsta frekvens som kan åter-skapas från en bandbegränsad signal $f_s/2$, dvs halva samplingsfrekvensen. Denna frekvens kallas Nyquistfrekvensen.

När vi använder en diskret Fourier transform kommer spektrum att upprepa sig med en period om 2π och frekvenserna i plotten av spektrum ligger i intervallet $[-\pi, \pi]$ med origo i mitten.

Frekvensen π motsvarar här den fysiska frekvensen $f_s/2 = 12\text{MHz}$. Vidare så ser vi från plotten av spektrum att vi har maximal amplitud på avståndet $1/6$ från origo till $\pm\pi$. Detta motsvarar RF-pulsens frekvens. Vi bör alltså välja ett kvadraturfilter med centerfrekvens $u_0 = \pi/6$ och RF-pulsens fysiska frekvens blir på samma sätt $1/6$ av Nyquist frekvensen $f_0 = 12/6 = 2\text{MHz}$.

Uppgift 18 (2p) Vi observerar först att ultraljudspulsen passerar det fettrika området två gånger. Tiden det tar att passera fett ansamlingen blir då

$$t_f = \frac{2D}{v_f} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-3} [\text{m}]}{1450 [\text{m/s}]}$$

Att tillryggalägga samma sträcka i vanlig vävnad tar

$$t_0 = \frac{2D}{v_0} = \frac{2 \cdot 15 \cdot 10^{-3} [\text{m}]}{1500 [\text{m/s}]}$$

Tidsskillnaden blir

$$\Delta t = t_f - t_0 = 2D \left(\frac{v_0 - v_f}{v_0 v_f} \right) = 2 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \left(\frac{1500 - 1450}{1500 \cdot 1450} \right) = 0.7 \cdot 10^{-6} [\text{s}]$$

På denna tid hinner en ultraljudspuls i vanlig vävnad tillryggalägga sträckan

$$s = \Delta t v_0 = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{m} = 1\text{mm}$$

Eftersom ultraljudspulsen går både fram och tillbaka så blir den resulterande förskjutningen i bilden $s/2 = 0.5 \text{mm}$ dvs ungefär 6% relativt fettvävnades tjocklek.

Svar: $d = 0.5 \text{mm}$

Uppgift 19 (2p) Svar: 1-Rätt 2-Fel 3-Rätt 4-Fel

Uppgift 20 (2p)

a) Ca 0.04 till 0.1 sekunder.

b) I en voxel blir fasvinkeln för vätekärnornas spinn med tiden mer och mer olika och då blir summan av magnetiseringen i voxeln mindre och mindre.

Uppgift 21 (2p) Med diffusion menas att en mängd partiklar (inom MR, vattenmolekyler) rör sig individuellt på ett slumpmässigt sätt och på så vis sprider ut sig i rummet (vävnaden). Anisotrop diffusion innebär att spridningen går med olika hastighet i olika riktningar.