

# Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2015-10-29

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se),  
Anders Eklund

## DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

### Uppgift 1 (6p)

a)

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} /4 * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} /4 * \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} /4 * \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} /4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} /16 * \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 4 \\ \hline 6 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} /16 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ \hline 6 & 24 & 36 & 24 & 6 \\ \hline 4 & 16 & 24 & 16 & 4 \\ \hline 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} /256$$

b)  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} /4 \Rightarrow f_A(x, y) = (\delta(x + 1) + 2\delta(x) + \delta(x - 1)) /4 \cdot \delta(y).$

Tabell ger

$$F_A(u, v) = (e^{j2\pi u} + 2 + e^{-j2\pi u}) /4 \cdot 1 = (2 + 2 \cos(2\pi u)) /4 = \cos^2(\pi u)$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} /4 \Rightarrow f_B(x, y) = (\delta(y + 1) + 2\delta(y) + \delta(y - 1)) /4 \cdot \delta(x).$$

Tabell ger

$$F_A(u, v) = (e^{j2\pi v} + 2 + e^{-j2\pi v}) /4 \cdot 1 = (2 + 2 \cos(2\pi v)) /4 = \cos^2(\pi v)$$

Faltning i spatialdomänen motsvarar multiplikation i fourierdomänen, dvs

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_A(x, y) * f_A(x, y) * f_B(x, y) * f_B(x, y) \Rightarrow \\ F(u, v) &= F_A(u, v) \cdot F_A(u, v) \cdot F_B(u, v) \cdot F_B(u, v) \Rightarrow
 \end{aligned}$$

Svar:  $F(u, v) = \cos^4(\pi u) \cdot \cos^4(\pi v).$

c) På samma sätt som tidigare blir

$$E(u, v) = \cos^2(\pi u) \cdot \cos^2(\pi v) \text{ och } G(u, v) = \cos^8(\pi u) \cdot \cos^8(\pi v).$$

Formlerna ger att  $A \Leftrightarrow e$ ,  $B \Leftrightarrow f$ ,  $C \Leftrightarrow g$ .

Man kan också motivera detta med att  $e$  är ett lågpassfilter,  $f = e * e$  är därmed ett ännu kraftigare lågpassfilter och  $g = e * e * e * e$  är det kraftigaste lågpassfiltret, dvs  $g$  dämpar höga frekvenser bäst. I plottarna ser man att  $C$  dämpar höga frekvenser bäst.

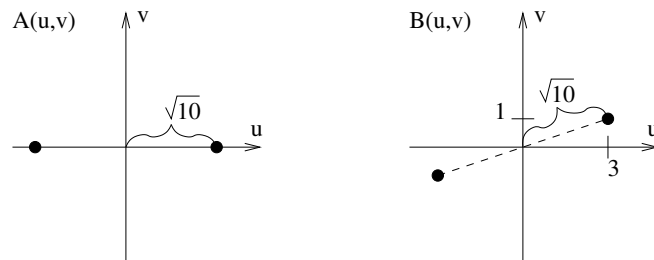
**Uppgift 2** (3p) Först beräknar vi fouriertransformen av  $a(x, y)$ ,

$$a(x, y) = \cos(\sqrt{10} \cdot 2\pi x)$$

$$\mathcal{F}_y[a(x, y)] = \delta(v) \cdot \cos(\sqrt{10} \cdot 2\pi x)$$

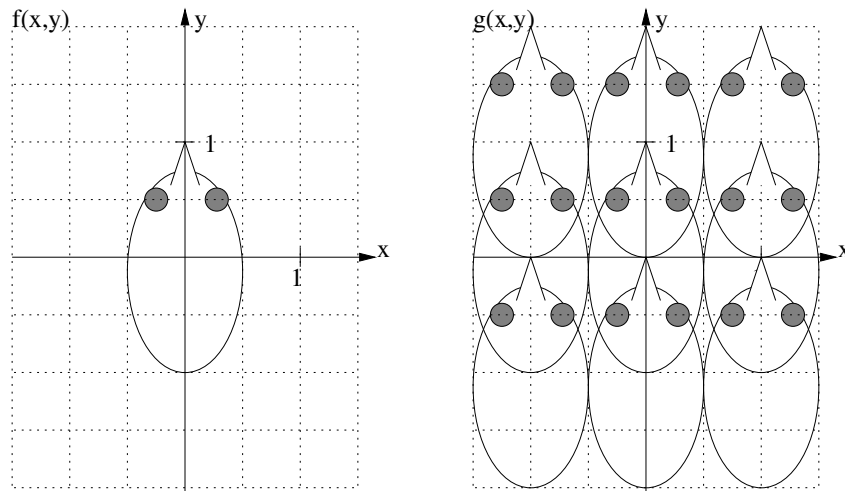
$$\begin{aligned} A(u, v) &= \mathcal{F}_x \mathcal{F}_y[a(x, y)] = \delta(v) \cdot [0.5 \cdot \delta(u - \sqrt{10}) + 0.5 \cdot \delta(u + \sqrt{10})] \\ &= 0.5 \cdot \delta(u - \sqrt{10}, v) + 0.5 \cdot \delta(u + \sqrt{10}, v) \end{aligned}$$

$A(u, v)$  innehåller alltså två stycken dirac-pulser. Rotationsteoremet ger att rotation en vinkel  $\alpha$  i spatialdomänen ger samma rotation  $\alpha$  i fourierdomänen. Följaktligen kan  $A(u, v)$  och  $B(u, v) = \mathcal{F}_2[b(x, y)]$  skissas som:



I skissen syns det att  $B(u, v) = 0.5 \cdot \delta(u - 3, v - 1) + 0.5 \cdot \delta(u + 3, v + 1)$ .

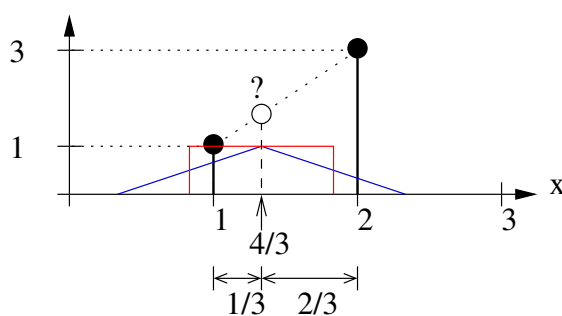
**Uppgift 3** (4p)



- a) Funktionen  $g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[G(u, v)]$  är skissad i figuren ovan till höger.
- b) För sampelavståndet i u-led gäller att  $\Delta \leq 1$  och för sampelavståndet i v-led gäller att  $\Delta \leq 0.5$ .

#### Uppgift 4 (3p)

- a) Se figuren nedan. De aktuella interpolationsfunktionerna är inritade i rött och blått i figuren och har förflyttats till det okända värdets position,  $x = 4/3$ . Sedan multipliceras samplen med interpolationsfunktionens höjd.



$$\text{nearest neighbor : } ? = 1 \cdot \Pi(1/3) + 3 \cdot \Pi(2/3) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 1$$

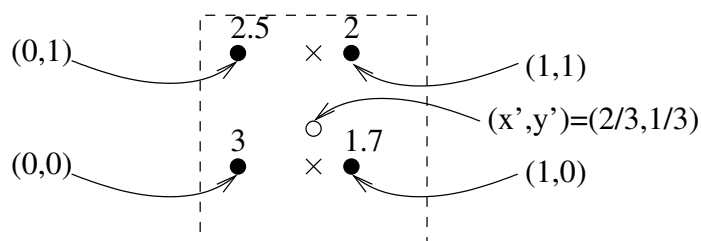
$$\text{linear interpolation : } ? = 1 \cdot \Lambda(1/3) + 3 \cdot \Lambda(2/3) = 1 \cdot 2/3 + 3 \cdot 1/3 = 5/3$$

Närmsta granne interpolation kan också erhållas genom att notera att  $f(1) = 1$  är den närmsta grannen.

Linjär interpolation också erhållas grafiskt genom att dra en rät linje mellan  $f(1) = 1$  och  $f(2) = 3$ . Då ser man att  $f(4/3) = 5/3$ .

**Svar:** För närmsta granne interpolation blir värdet 1 och för linjär interpolation blir värdet  $5/3 \approx 1.67$ .

- b) Se figur nedan. Den närmsta grannen till  $(2/3, 1/3)$  är  $(1, 0)$ , där värdet är 1.7.



Den tvådimensionella interpolationskärnan  $\Lambda(x) \cdot \Lambda(y)$  sträcker sig ut till den streckade kvadraten. Här väljer vi dock att utföra den bilinjära interpolationen först 1D i x-led och sedan 1D i y-led.

Interpolationsfunktionen placeras först horisontellt i punkten  $(2/3, 0)$ .

Interpolationsresultatet blir

$$3 \cdot \Lambda(2/3) + 1.7 \cdot \Lambda(1/3) = 3 \cdot (1/3) + 1.7 \cdot (2/3) = 2.13.$$

Interpolationsfunktionen placeras sen horisontellt i punkten  $(2/3, 1)$ .

Interpolationsresultatet blir

$$2.5 \cdot \Lambda(2/3) + 2 \cdot \Lambda(1/3) = 2.5 \cdot (1/3) + 2 \cdot (2/3) = 2.17.$$

Interpolationsfunktionen placeras sen vertikalt i punkten  $(2/3, 1/3)$ .

Interpolationsresultatet blir

$$2.13 \cdot \Lambda(1/3) + 2.17 \cdot \Lambda(2/3) = 2.13 \cdot (2/3) + 2.17 \cdot (1/3) = 2.14.$$

**Svar:** För närmsta granne interpolation blir värdet 1.7 och för linjär interpolation blir värdet 2.14.

## DEL 2: Röntgen och CT

### Uppgift 5 (2p)

- $I_0$  är inkommande strålningsintensitet och  $I$  är utgående strålningsintensitet. Dessa mäts av CT-scannern.
- Projektionerna  $\int_L \mu(x, y) dl$  erhålles genom att beräkna  $\ln(I_0/I)$ .
- Projektionerna  $\int_L \mu(x, y) dl$  skickas sedan till rekonstruktionsalgoritmen.

### Uppgift 6 (2p)

Vad händer med bildkvaliteten om vi ökar till  $N_\phi = \pi \cdot N_r$ ?

**Svar:** Bildkvaliteten blir marginellt bättre.

Vad händer med bildkvaliteten om vi minskar till  $N_\phi = (\pi/4) \cdot N_r$ ?

**Svar:** Bildkvaliteten blir lite sämre, "streaks" börjar synas.

### Uppgift 7 (2p)

Feldkamp-algoritmen är en approximativ rekonstruktionsalgoritm av typen filtererad återprojektion (filtered backprojection). Indata är konstråle-projektioner (conebeam projections) av ett objekt och utdata är en rekonstruerad volym av detta objekt.

### Uppgift 8 (2p)

Ben- och muskelvävnad dämpar röntgenstrålar. Lägre energier dämpas mer än högre energier. Ben dämpar röntgenstrålningen effektivare än muskelvävnad gör. Därför motsvarar "curve 1" attenueringen för muskelvävnad och "curve 2" attenueringen för benvävnad.

### Uppgift 9 (4p)

a)  $f(x, y) = 3\Pi(x/2) \cdot \Pi(y)$  ger att  $F(u, v) = 6\text{sinc}(2u) \cdot \text{sinc}(v)$ .

b)  $p(r, 0) = 3\Pi(r/2)$  och  $p(r, \pi/2) = 6\Pi(r)$ .

c)  $P(R, 0) = 6\text{sinc}(2R)$  och  $P(R, \pi/2) = 6\text{sinc}(R)$ .

d)  $\theta = 0$ :

$$\text{HL} = F(R \cos 0, R \sin 0) = F(R, 0) = 6\text{sinc}(2R) \cdot \text{sinc}(0) = 6\text{sinc}(2R)$$

$$\text{VL} = P(R, 0) = 6\text{sinc}(2R)$$

Det gäller alltså att  $\text{HL}=\text{VL}$ , dvs  $F(R \cos 0, R \sin 0) = P(R, 0)$ , V.S.V.

$\theta = \pi/2$ :

$$\text{HL} = F(R \cos \pi/2, R \sin \pi/2) = F(0, R) = 6\text{sinc}(0) \cdot \text{sinc}(R) = 6\text{sinc}(R)$$

$$\text{VL} = P(R, \pi/2) = 6\text{sinc}(R)$$

Det gäller alltså att  $\text{HL}=\text{VL}$ , dvs  $F(R \cos \pi/2, R \sin \pi/2) = P(R, \pi/2)$ , V.S.V.

## DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

### Uppgift 10 (2p)

$$Z = 5 + 40 + 30 + 10 = 85,$$

$$X_{pos} = X/Z = (1 \cdot 5 + 0 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 1 \cdot 10)/85 = 75/85 \approx 0.8824,$$

$$Y_{pos} = Y/Z = (\sqrt{3} \cdot 5 + 0 \cdot 40 + 0 \cdot 30 - \sqrt{3} \cdot 10)/85 = -5\sqrt{3}/85 \approx -0.1019$$

Svar: Gammafotonens position  $(X_{pos}, Y_{pos})=(0.8824 \text{ mm}, -0.1019 \text{ mm})$ .

### Uppgift 11 (2p)

```
VENTVOL = fftshift(fftn(ifftshift(ventvol)));
```

```
VENTVOLBF = VENTVOL .* BUTTFILT;
```

```
ventvolBF = ifftshift(ifftn(fftshift(VENTVOLBF)));
```

Det gäller att `ventvolBF` är den Butterworth-filtrerade SPECT-volymen.

### Uppgift 12 (2p)

CT-projektioner mäter objektets attenuering. Om man utnyttjar dessa i rekonstruktionsalgoritmen för SPECT-bilder kan man få en bättre, sannare SPECT-bild.

### Uppgift 13 (2p)

SPECT-detektorerna snurrar runt patienten och mäter parallell-projektioner. En enda riktning mäts per tidsintervall. Kollimatorerna behövs för att bara mäta fotoner som kommer från rätt riktning och sortera bort de fotoner som kommer från fel riktning.

## DEL 4: Viktiga mätvärden och dess beräkning

### Uppgift 14 (2p)

Brusets energi är lika med variansen  $\sigma_N^2 = \mu_N$ . Brusets medelamplitud blir då lika med  $\sigma_N = \sqrt{\mu_N}$ . Då gäller:

$$SNR_a = \frac{\text{signalamplitud}}{\text{brusamplitud}} = \mu_N / \sqrt{\mu_N} = \sqrt{\mu_N}.$$

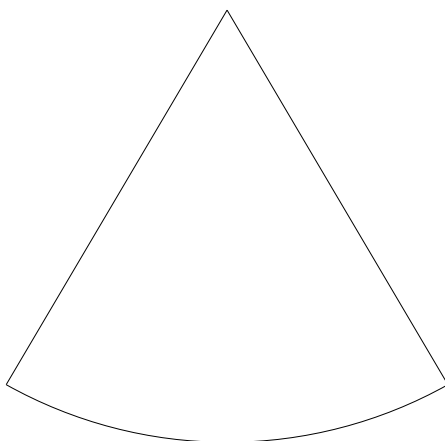
Alltså, ju mer radioaktivt material vi sprutar in i patienten, desto större blir signalamplituden  $\mu_N$  och desto bättre blir  $SNR_a$ , ty det är proportionellt mot  $\sqrt{\mu_N}$ . (Givetvis ska man inte tillföra patienten så mycket radioaktivitet att det blir dåligt för hälsan.)

## DEL 5: Ultraljud

### Uppgift 15 (2p)

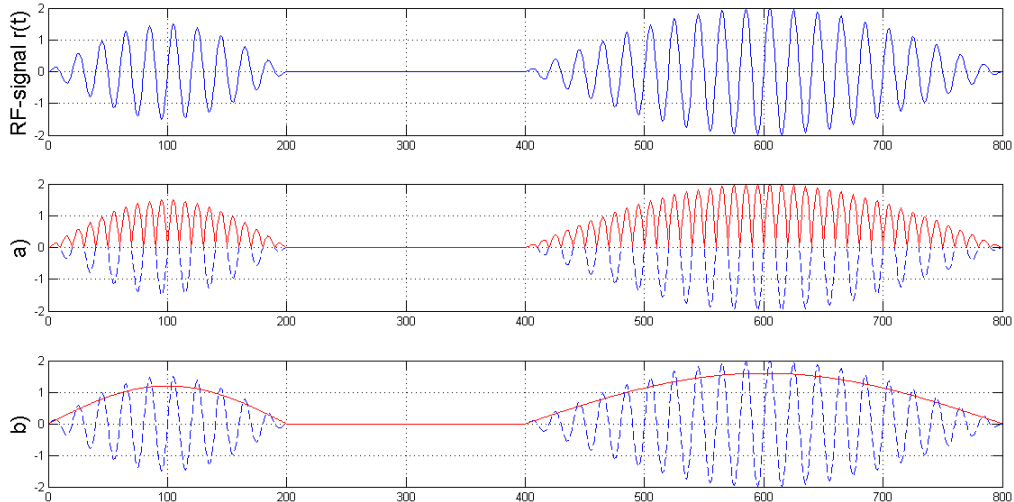
- Vi använder sambandet  $v/f = \lambda$ , vilket ger  $f = v/\lambda$ . För att återge 1 mm:s detaljer bör  $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}[m]$ , minst.  
 $f = 1500/(2 \cdot 10^{-3}) = 750 \cdot 10^3[\text{Hz}] = 0.75[\text{MHz}]$ .
- När frekvensen på en våg ökar så ökar även energiförlusterna på grund av (den akustiska) impedansen i materialet. Konsekvensen blir då att vi får betala ökad upplösning med att vi inte kan se objekt lika långt in i kroppen då vågen absorberas och omvandlas till termisk energi.

### Uppgift 16 (2p)



Ultraljudssignalen sänds ut i fanbeam-format (solfjädersformat). De mottagna signalerna lagras dock i en kartesisk matris. För att bilden ska bli sann och reflektera verkligheten måste den därför samplas om.

**Uppgift 17 (2p)** Se figur. I figur a) syns (i rött) hur signalen ser ut efter absolutbeloppsberäkning. I figur b) syns (i rött) hur signalen ser ut (ungefär) efter lågpasfiltrering.



## DEL 6: MRI

**Uppgift 18 (2p)**

- T1 beskriver relaxationen av spinvektorn i z-led, hur snabbt spinvektorn kommer tillbaka efter en excitering. T1 hör ihop med repetitionstiden, vi måste vänta en viss tid innan nästa excitation.
- T2 beskriver hur spinvektorerna kommer ur fas i x-y-planet, hur lång tid detta tar. T2 hör ihop med ekotiden, vi måste vänta en viss tid för att skapa ett eko, för att få en stark signal.

**Uppgift 19 (4p)** Nedan följer 5 möjliga alternativ. Det räcker om man har nämnt 2 av dessa.

- Spatiell vikning.  $\Rightarrow$  Sampla tätare.
- Rörelseartefakter.  $\Rightarrow$  a) Använd dämpande material för att personen ska ligga still. b) Använd en MR-sekvens som är mer robust mot rörelser eller rörelsekorrigerig efteråt.
- Artefakter från metalliska objekt.  $\Rightarrow$  Se till att försökspersonen inte har metalliska objekt.
- (Geometriska) artefakter från inhomogena magnetfält.  $\Rightarrow$  a) Shimming (gör magnetfältet homogenera medan personen är kvar i magnetkameran). b)

Samla in en "field map" som sedan kan användas för invertera inhomogeniteter.

- Bias-fält (inhomogen bildintensitet).  $\Rightarrow$  Samla in en bias map som sedan kan användas för att homogenisera intensiteten.

**Uppgift 20** (2p) fMRI kan användas för att lokalisera viktiga hjärnfunktioner innan man t.ex. tar bort en hjärntumör.