

# Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2017-10-19

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se), Anders Eklund

## DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

### Uppgift 1 (4p)

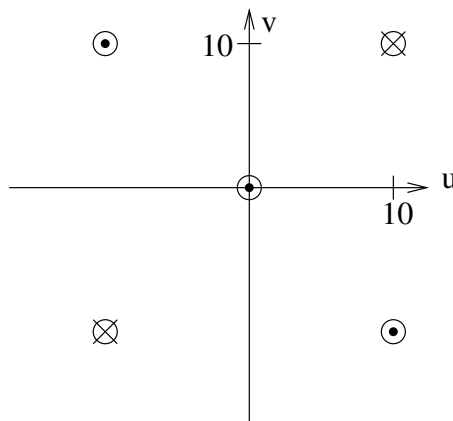
- a)  $f(x, y) = 30 \cdot \Pi(x/40, y/20) = 30 \cdot \Pi(x/40) \cdot \Pi(y/20)$ .  
2D-teorem för separabel funktion, 1D-teoremen för linjäritet och skalning, samt att  $\mathcal{F}[\Pi(t)] = \text{sinc}(f)$  ger

$$\begin{aligned} F(u, v) &= 30 \cdot 40\text{sinc}(40u) \cdot 20\text{sinc}(20v) \\ &= 24000 \cdot \text{sinc}(40u)\text{sinc}(20v) \end{aligned}$$

- b) 2D-teoremen för separabel funktion, 1D-teoremen för linjäritet, samt att  $\mathcal{F}[\sin(2\pi f_0 t)] = j(\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0))/2$  och  $\mathcal{F}[1] = \delta(u, v)$  ger

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \delta(u, v) + j(\delta(u + 10) - \delta(u - 10)) \cdot j(\delta(v + 10) - \delta(v - 10)) \\ &= \delta(u, v) - \delta(u + 10, v + 10) + \delta(u + 10, v - 10) \\ &\quad + \delta(u - 10, v + 10) - \delta(u - 10, v - 10). \end{aligned}$$

- c)  $G(u, v)$  från b) är skissad nedan.



**Uppgift 2 (2p)**

$$\Delta \approx D_x * D_x + D_y * D_y =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -8 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Uppgift 3 (5p)**

a) Ansätt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/6 & & \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 \\ & 1/6 & \end{bmatrix}}_{=f(x,y)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/6 & & \\ 1/6 & & \\ & 1/6 & \end{bmatrix}}_{=g(x,y)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}}_{=h(x,y)}$$

då är

$$g(x, y) = \left( \frac{1}{6} \delta(y + \Delta) + \frac{1}{6} \delta(y) + \frac{1}{6} \delta(y - \Delta) \right) \cdot \delta(x)$$

$$G(u, v) = \left( \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot e^{+j2\pi\Delta v} + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot e^{-j2\pi\Delta v} \right) \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3} \cos(2\pi\Delta v) + \frac{1}{6}$$

På samma sätt erhålls

$$H(u, v) = \frac{1}{3} \cos(2\pi\Delta u) + \frac{1}{6}$$

vilket ger

$$F(u, v) = \frac{1}{3} \cos(2\pi\Delta u) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos(2\pi\Delta v)$$

b)

$$F[k, l] = \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} f[n, m] e^{-j2\pi(nk/N+ml/M)}$$

$$= \frac{1}{6} e^{-j2\pi(-1k/N+0l/M)} + \frac{1}{6} e^{-j2\pi(1k/N+0l/M)} + \frac{1}{3} e^{-j2\pi(0k/N+0l/M)}$$

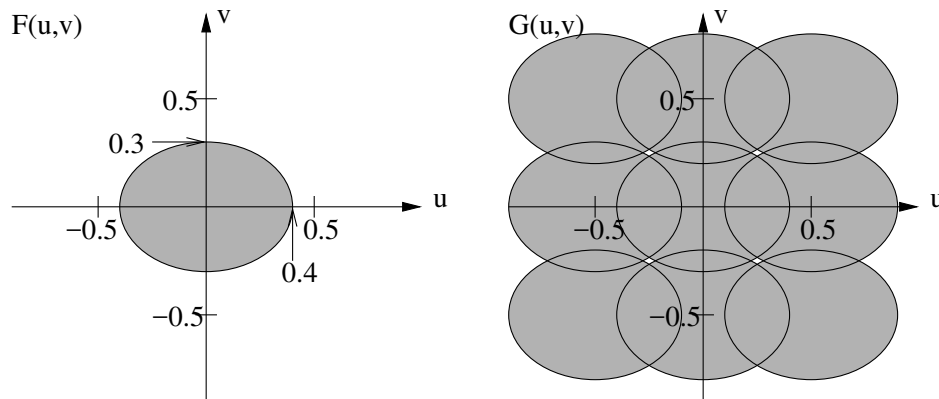
$$+ \frac{1}{6} e^{-j2\pi(0k/N-1l/M)} + \frac{1}{6} e^{-j2\pi(0k/N+1l/M)}$$

$$= \frac{1}{6} e^{j\frac{2\pi}{N}k} + \frac{1}{6} e^{-j\frac{2\pi}{N}k} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{j\frac{2\pi}{M}l} + \frac{1}{6} e^{-j\frac{2\pi}{M}l} \Rightarrow$$

$$F(k, l) = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{M}l\right)$$

c)  $k = u\Delta N$  och  $l = v\Delta M$ .

#### Uppgift 4 (3p)

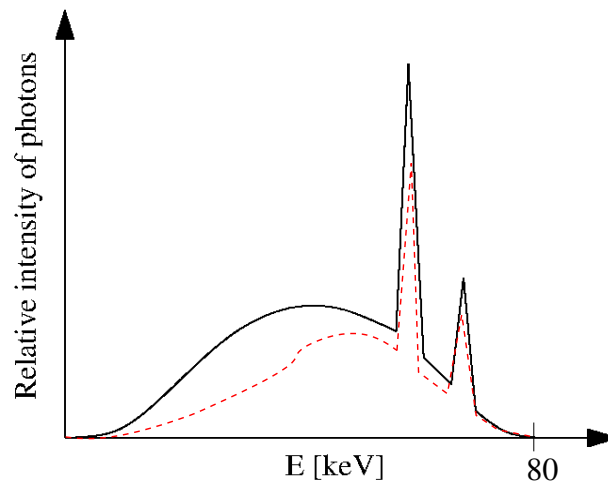


Vid sampelavstånden  $\Delta_x < 1/0.8 = 1.25$  och  $\Delta_y < 1/0.6 \approx 1.6667$  undviks vinkningsdistorsion.

## DEL 2: Röntgen och CT

**Uppgift 5 (2p)** Rebinning innebär att *fanbeam*-projektionerna *interpoleras* till parallella projektioner (ett *sinogram*).

**Uppgift 6 (2p)** 20keV dämpas mer än 40 och 60keV, ty låga energier dämpas mer än höga. Det spektrum som gäller efter det att det färdats genom människokroppen har förändrats ungefär så som visas i figuren i den röda streckade kurvan, se figur nedan. Fenomenet kallas beam-hardening.



### Uppgift 7 (3p)

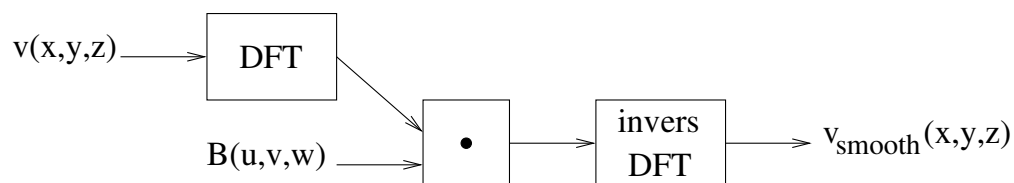
- En projektion  $p(r, \theta)$ , med vinkeln  $\theta$ , tas av ett objekt  $f(x, y)$ .
- Låt den en-dimensionella fouriertransformen av projektionen noteras  $P(R, \theta) = \mathcal{F}_r[p(r, \theta)]$ .
- Låt den två-dimensionella fouriertransformen av objektet noteras  $F(u, v) = \mathcal{F}_2[f(x, y)]$ .
- Då gäller att  $P(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$ .

### Uppgift 8 (3p)

- En CT-bild är en *rekonstruerad bild*,  $\mu(x, y)$ . Varje pixel visar röntgendämpningen i enheten [1/cm], [1/m] eller [HU].
- En röntgenbild är en *projektionsbild*, dvs linjeintegraler av  $\mu(x, y)$ ,  $\int_L \mu(x, y) dl$ , alternativt  $I_0 \exp(\int_L \mu(x, y) dl)$ , där  $I_0$  är den inkommande röntgenintensiteten.  
 $\int_L \mu(x, y) dl$  är enhetslös ty [1/cm]·[cm] = [1].
- En SPECT-bild är en *rekonstruerad bild*,  $A(x, y)$ . Varje pixel visar aktiviteten, dvs antal emitterade gamma-fotoner.
- En gammakamerabild är en *projektionsbild*, dvs linjeintegraler av  $A(x, y)$ ,  $\int_L A(x, y) dl$ . Enheten kan t ex vara antal gammafotoner gånger en längdenhet.

## DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

### Uppgift 9 (2p)

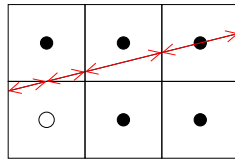


### Uppgift 10 (2p)

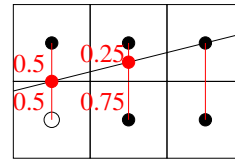
- $f^0(x, y) = 0$  fungerar inte eftersom det leder till att  $f^1(x, y) = 0$ , som gör att  $f^2(x, y) = 0$  osv.
- Då blir  $f_i^{k+1} = f_i^k$  och vi har nått konvergens. (I verkligheten är man nöjd och stannar man innan man har nått perfekt konvergens.)

### Uppgift 11 (3p)

Siddon:



Joseph:



**Siddon:** Summan av längden gånger värdet av alla sträckor =  $1.0308/2 \cdot 0 + 1.0308/2 \cdot 3 + 1.0308 \cdot 3 + 1.0308 \cdot 3 = 7.731$ .

**Joseph:** linjär interpolering ger  $0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 0 = 1.5$ ,  $0.75 \cdot 3 + 0.25 \cdot 3 = 3$ ,  $1 \cdot 3 + 0 \cdot 3 = 3$ .

Summering och kompensation för sned stråle ger  $(1.5 + 3 + 3) \cdot 1.0308 = 7.731$ .

OBS! Resultaten för Siddon och Joseph blir inte alltid lika, som här.

### Uppgift 12 (3p)

**SPECT:** Ett **radioaktivt material** distribueras till patienten. Detta emitterar **fotoner** som detekteras i en detektor med kollimatorer.

**PET:** Ett **radioaktivt material** distribueras till patienten. Detta emitterar **positroner**. Varje positron förenar sig snart med en **elektron**. Deras massor förbrukas och två **fotoner** med energin **511 keV** skapas. De färdas i motsatt riktning och detekteras. För att två fotoner ska betraktas som simultana måste **tidsfönstret** (tidsskillnaden) vara mycket litet, typiskt 2-20ns.

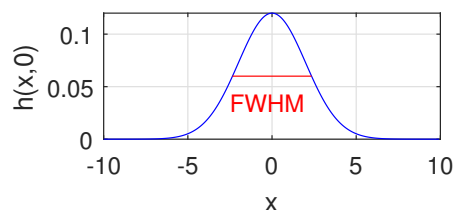
## DEL 4: Viktiga mätvärden och dess beräkning

### Uppgift 13 (2p)

$$h(0,0) = 0.12.$$

$$h(x,0) = 0.06 \Rightarrow x = \pm 2.3486.$$

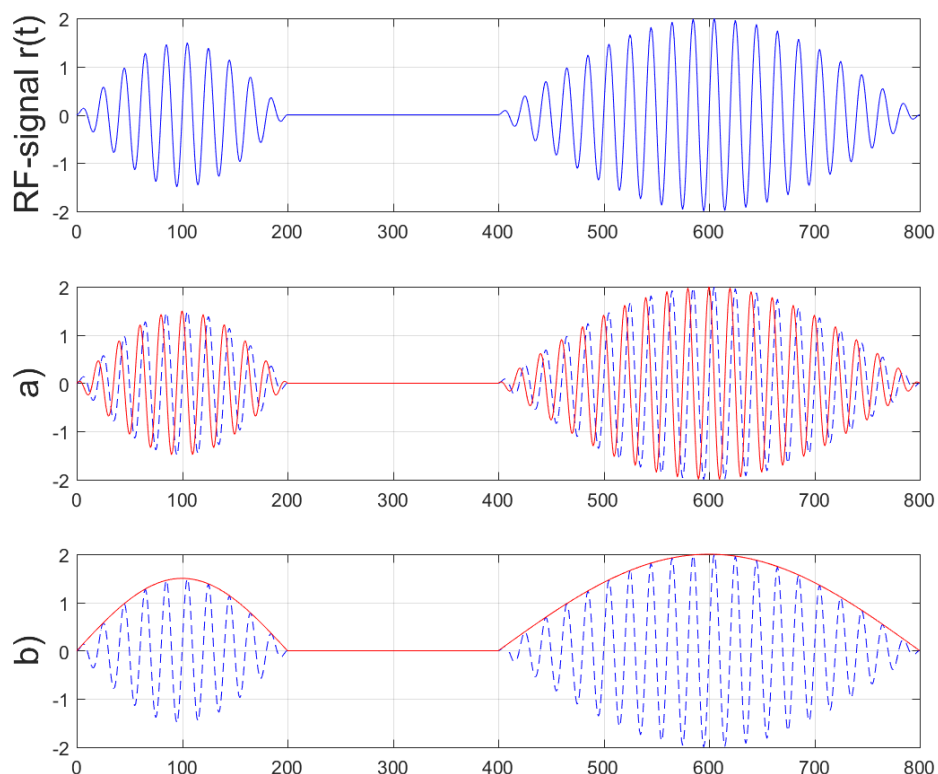
Följdaktligen är  $\text{FWHM} = 4.6972$ .



## DEL 5: Ultraljud

### Uppgift 14 (2p)

- Imaginärdelen av  $q(t)$  visas i figur a).
- Enveloppen  $\tilde{A}(t) = |q(t)|$ , den visas i figur b).



### Uppgift 15 (2p)

3 MHz motsvarar 3 miljoner svängningar per sekund. Periodtiden är  $T = 1/f = 1/(3 \cdot 10^6)$  s. Tiden för utbredningen av fem svängningar är därmed  $5/(3 \cdot 10^6)$  s. Sträckan som vågen kan tillryggalägga på denna tid är  $s = vt = 1500 \cdot 5/(3 \cdot 10^6)$  m. Färdad sträcka, fram-och-tillbaka, motsvarar dubbla tjockleken  $d$  mellan vävnaderna. Vi har då ett krav som kan uttryckas med ekvationen  $2d = s = 1500 \cdot 5/(3 \cdot 10^6)$ , vilket ger den numeriskt approximativa (upp)lösningen:  $s = 1.25$  mm.

## DEL 6: MRI

### Uppgift 16 (2p)

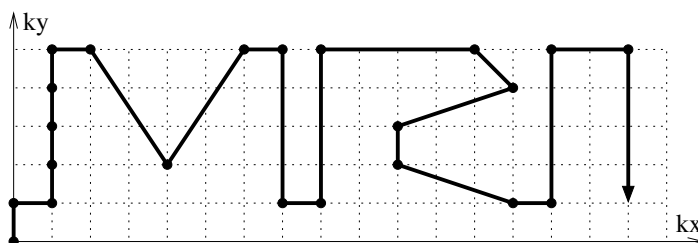
a) Om samplingen startar direkt så får vi ingen kontrast mellan olika vävnadstyper. Vi måste vänta en liten tid för att protonerna ska relaxera olika mycket i olika vävnadstyper, för att ge olika stark signal.

b)

$$k_x(t) = \gamma / (2\pi) \cdot \int_0^t G_x(\tau) d\tau$$

$$k_y(t) = \gamma / (2\pi) \cdot \int_0^t G_y(\tau) d\tau$$

c)



### Uppgift 17 (2p)

a) Sampla tätare i k-rummet, och öka antalet sampel för att komma lika långt ut i k-rummet.

b) Sampla längre ut i k-rummet (högre frekvenser), vilket kräver att vi ökar antalet sampel.

### Uppgift 18 (2p)

Aktiva områden använder mer syre, kroppen överkompenserar blodtillförseln, blodet får en större andel syresatt hemoglobin vilket påverkar MR-signalen.

## DEL X: Cyklotron

### Uppgift 19 (2p)

a) På sjukhus använder man en cyklotron till att producera radionuklider/isotoper för gamma-kamera, SPECT och PET.

b) Då den önskade radionukliden har kort halveringstid.