

# Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2018-10-24

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se)

## DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

### Uppgift 1 (6p)

- a och E: E LP-filtrerar mycket och ger en mycket suddig bild.
- b och A: A LP-filtrerar lite och ger en lite suddig bild.
- c och D: D ger ingen påverkan vid faltning.
- d och C: C deriverar i y-led, och följdaktligen ser man att det finns stora positiva eller negativa värden vid kanter i y-led i bilden.
- e och B: B deriverar i x-led, och följdaktligen ser man att det finns stora positiva eller negativa värden vid kanter i x-led i bilden.
- f och F: F beräknar andraderivatan i x-led, dvs krökningar i x-led. Vid en kant i originalbilden (från svart till vitt) är det först en positiv krökning och sen en negativ. Detta syns i f.

### Uppgift 2 (2p)

$$F = B * B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} /8 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} /8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -12 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} /8^2$$

### Uppgift 3 (4p)

a)

$$\begin{aligned} f(x, y) &= [-\delta(x + \Delta) - \delta(x - \Delta)] \cdot \delta(y) + [4\delta(y) - \delta(y + \Delta) - \delta(y - \Delta)] \cdot \delta(x) \\ F(u, v) &= [-e^{+j2\pi\Delta u} - e^{-j2\pi\Delta u}] \cdot 1 + [4 - e^{+j2\pi\Delta v} - e^{-j2\pi\Delta v}] \cdot 1 \\ &= -2 \cos(2\pi\Delta u) + 4 - 2 \cos(2\pi\Delta v) \end{aligned}$$

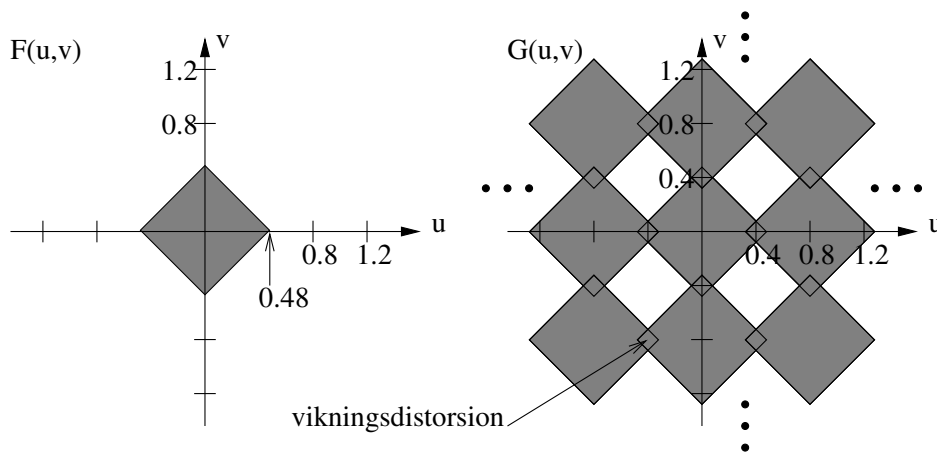
b)

$$\begin{aligned}
 F[k, l] &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} f[n, m] e^{-j2\pi(nk/N + ml/M)} \\
 &= -1 \cdot e^{-j2\pi(-1k/N + 0l/M)} - 1 \cdot e^{-j2\pi(1k/N + 0l/M)} + 4 \cdot e^{-j2\pi(0k/N + 0l/M)} \\
 &\quad - 1 \cdot e^{-j2\pi(0k/N - 1l/M)} + -1 \cdot e^{-j2\pi(0k/N + 1l/M)} \\
 &= -e^{j2\pi k/N} - e^{-j2\pi k/N} + 4 - e^{j2\pi l/M} - e^{-j2\pi l/M}
 \end{aligned}$$

vilket resulterar i

$$F[k, l] = -2 \cos(2\pi k/N) + 4 - 2 \cos(2\pi l/M)$$

#### Uppgift 4 (3p)



a) Formelsamlingen ger att fouriertransformen av  $g(x, y)$  blir

$$G(u, v) = F(u, v) * \left( 0.8 \sum_n \delta(u - 0.8 \cdot n) \cdot 0.8 \sum_m \delta(v - 0.8 \cdot m) \right),$$

dvs upprepningarna av  $F(u, v)$  ligger på avståndet  $1/\Delta = 0.8$  i båda riktningarna. Därmed blir skissen enligt figuren ovan. De tre punkterna på fyra olika ställen indikerar att upprepningarna fortsätter bort mot oändligheten. Ja, det blev vigningsdistorstion på flera ställen. Pilen pekar på ett ställe.

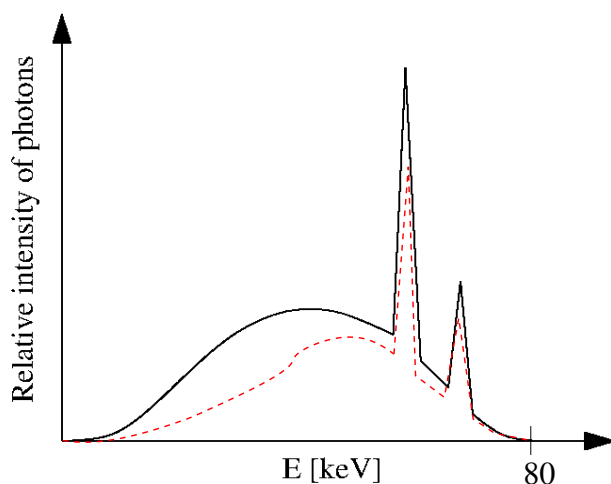
b) I figuren ser man att om upprepningarna skulle ligga på avståndet  $1/\Delta > 0.96$ , så undviks vigningsdistorstion. Detta motsvarar ett samplingsavstånd på  $\Delta < 1/0.96$ .

## DEL 2: Röntgen och CT

### Uppgift 5 (2p)

- Tag fanbeam-projektioner:  $R_\beta(\gamma)$ .
- Utför rebinning till parallell-projektioner:  $p_\theta(r)$ .
- Utför ramp-filtrering.
- Utför återprojektion längs de parallella strålarna.

**Uppgift 6 (2p)** 20keV dämpas mer än 40 och 60keV, ty låga energier dämpas mer än höga. Det spektrum som gäller efter det att det färdats genom människokroppen har förändrats ungefär så som visas i figuren i den röda streckade kurvan, se figur nedan. Fenomenet kallas beam-hardening.



### Uppgift 7 (3p)

a) Notera att  $r = x$ . Betrakta  $-2 < x < 2$ . Då gäller

$$p(r, 0) = p(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\sqrt{1-(x/2)^2}}^{\sqrt{1-(x/2)^2}} 0.9 dy = 0.9 \cdot 2\sqrt{1-(x/2)^2}.$$

$$\text{Svar : } p(r, 0) = \begin{cases} 1.8\sqrt{1-(r/2)^2}, & |r| < 2, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

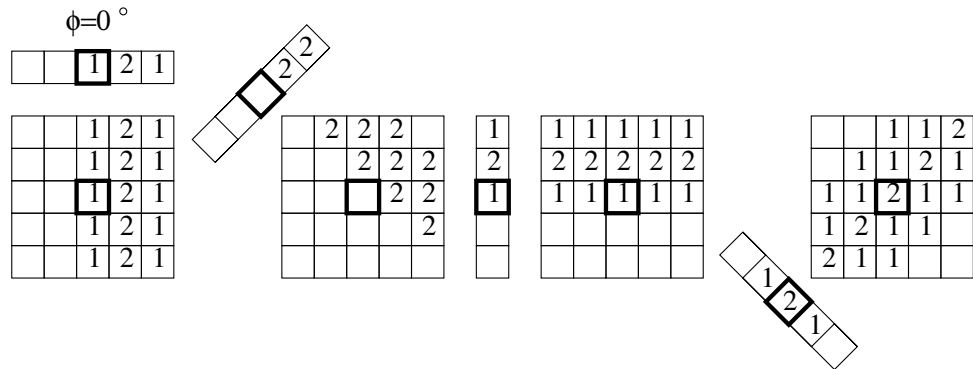
b) Notera att  $r = y$ . Betrakta  $-1 < y < 1$ . Då gäller

$$p(r, \pi/2) = p(y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} 0.9 dx = 0.9 \cdot 4\sqrt{1-y^2}.$$

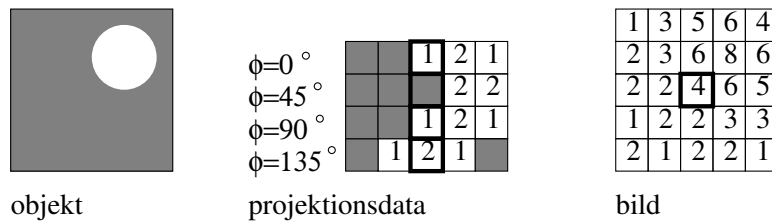
$$\text{Svar : } p(r, \pi/2) = \begin{cases} 3.6\sqrt{1-r^2}, & |r| < 1, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

### Uppgift 8 (3p)

a) Vita tomma rutor nedan indikerar pixel med värde 0.



b)



c) Funktionen ser ut som en vulkan. Man kan ana den i den diskreta bilden i b).

## DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

**Uppgift 9** (2p) CT-bilderna ger information om patientens anatomi.

**Uppgift 10** (2p) Nämn 2 av nedanstående störningar:

- Attenuering. (Fotoner attenueras i patientens kropp på väg mot detektorn.)
- Scatter. (Man klarar inte att sortera bort allt scatter med kollimatoren.)
- Kon-formigt upptag. (SPECT-detektorn har egentligen ett konformigt upptag, dvs inte rörformigt.)

**Uppgift 11** (3p) Vid PET förenas en elektron och en positron. Deras massor övergår till energi i formen två fotoner som färdas i motsatt riktning. Formlerna ger att fotonerna har frekvensen:

$$\nu = m \cdot c^2/h = 9.109 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 / (6.6261 \cdot 10^{-34}) = 1.2372 \cdot 10^{20} \text{ [Hz]}$$

Detta motsvarar våglängden:

$$\lambda = c/\nu = 3 \cdot 10^8 / (1.2372 \cdot 10^{20}) = 2.4247 \cdot 10^{-12} \text{ [m]}$$

Enligt figuren är detta gammastrålning.

**Uppgift 12** (2p) Projektionerna  $p(l, \theta)$  av attenueringsfunktionen mäts upp vid en extra "transmission study". En liten radioaktiv källa på 511 keV utanför kroppen sänder gammastrålar med intensiteten  $I_0$  genom kroppen som mäts upp på andra sidan kroppen till  $I(l, \theta)$ .

*Extra, förtydligande information:*

På samma sätt som vid CT används sedan formeln  $p(l, \theta) = -\ln(I(l, \theta)/I_0)$ . Därefter divideras PET-projektionerna med  $p(l, \theta)$  och sedan utförs vanlig filtrerad återprojektion.

**Uppgift 13** (2p) SPECT-detektorerna snurrar runt patienten och mäter parallellprojektioner. En enda riktning mäts per tidsintervall. Kollimatorerna behövs för att bara mäta fotoner som kommer från rätt riktning och sortera bort de fotoner som kommer från fel riktning.

## DEL 4: Viktiga mätvärden och dess beräkning

**Uppgift 14** (2p)

$$m = \frac{1}{25} (2 \cdot 7 + 0 \cdot 7 + 1 \cdot 11) = 1$$
$$s = \sqrt{\frac{25}{24} \left( \left[ \frac{1}{25} (2^2 \cdot 7 + 0^2 \cdot 7 + 1^2 \cdot 11) \right] - 1^2 \right)} = 0.7638$$

## DEL 5: Ultraljud

**Uppgift 15** (2p) Givaren både sänder ut ultraljudspulser och tar emot reflekterade RF-signaler. En ultraljudspuls måste hinna sändas ut innan den reflekteras tillbaka för att de piezoelektriska elementen i sändaren ska kunna ställas om till mottagare. Den svarta området ligger för nära. Där hinns inte "utsändning-omställning-mottagning" med.

**Uppgift 16** (2p) Vi observerar först att ultraljudspulsen passerar det fettrika området två gånger. Tiden det tar att passera fett ansamlingen blir då

$$t_f = \frac{2D}{v_f} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 10^{-3} [\text{m}]}{1450 [\text{m/s}]}$$

Att tillryggalägga samma sträcka i vanlig vävnad tar

$$t_0 = \frac{2D}{v_0} = \frac{2 \cdot 11 \cdot 10^{-3} [\text{m}]}{1500 [\text{m/s}]}$$

Tidsskillnaden blir

$$\Delta t = t_f - t_0 = 2D \left( \frac{v_0 - v_f}{v_0 v_f} \right) = 2 \cdot 11 \cdot 10^{-3} \left( \frac{1500 - 1450}{1500 \cdot 1450} \right) = 0.506 \cdot 10^{-6} [\text{s}]$$

På denna tid hinner en ultraljudspuls i vanlig vävnad tillryggalägga sträckan

$$s = \Delta t v_0 = 0.75 \cdot 10^{-3} \text{m} = 0.76 \text{mm}$$

Eftersom ultraljudspulsen går både fram och tillbaka så blir den resulterande förskjutningen i bilden  $s/2 = 0.38 \text{ mm}$ .  $\Rightarrow$  Svar:  $d = 0.38 \text{ mm}$

## DEL 6: MRI

**Uppgift 17** (2p) RF-pulsens bandbredd och styrkan på gradientfältet i z-riktningen.

**Uppgift 18** (1p) Olika vävnadstyper har olika relaxationstid ( $T_1$ ,  $T_2$ ), vilket innebär att signalen hinner återhämta sig olika mycket på en viss tid beroende på vävnadstyp. Olika vävnader innehåller också olika mängd väte (protoner). Alla dessa ( $T_1$ ,  $T_2$  och antal protoner) bidrar på olika sätt till intensiteten i bilden.

**Uppgift 19** (1p) Man behöver anta att signalen är reell-värd i spatialdomänen.

**Uppgift 20** (2p)

- Antalet sampelpunkter måste ökas. Sampelavståndet i k-rummet måste bli tätare. Man behöver dock INTE sampla längre ut i k-rummet.
- Antalet sampelpunkter måste ökas. Sampelavståndet i k-rummet behöver INTE bli tätare. Man behöver dock sampla längre ut i k-rummet.

**Uppgift 21** (2p) Med hjälp av fMRI kan man individuellt lokalisera var viktiga funktioner sitter i hjärnan, t ex talet. Operationen planeras sedan så man inte skadar dessa områden.