

# Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2019-10-23

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se), Anders Eklund

## DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

### Uppgift 1 (4p)

A: Faltning med

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	<b>1</b>	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

/15

Detta är ett stort medelvärdesbildande filter som ger en suddig bild. Skalfaktorn 15 är för liten och därmed blir bilden ljusare än originalbilden.

B: Faltning med

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	<b>1</b>	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

/25

Detta är ett stort medelvärdesbildande filter som ger en suddig bild. Skalfaktorn 25 är korrekt och därmed bevaras gråskalan i bilden.

C: Faltning med

0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

Detta är ett högpasfilter. Sådana är symmetriska och dess summa är 0. Filtet ger höga positiva eller negativa värden där det är snabba förändringar i originalbilden.

### D: Addition (+)

Addition av högfrequensinformation på originalbilden ger en skarpare bild.

### Uppgift 2 (5p)

a) Detta är en separabel funktion. Då gäller

$$G(u, v) = \mathcal{F}_2[g(x, y) = g_1(x) \cdot g_2(y)] = \mathcal{F}_1[g_1(x)] \cdot \mathcal{F}_1[g_2(y)] = G_1(u) \cdot G_2(v).$$

Formelsamlingen ger

$$\mathcal{F}_1 \left[ \Pi \left( \frac{x - 16}{20} \right) \right] = e^{-j2\pi 16u} 20 \operatorname{sinc}(20u),$$
$$\mathcal{F}_2 \left[ \Pi \left( \frac{y - 27}{10} \right) \right] = e^{-j2\pi 27v} 10 \operatorname{sinc}(10v).$$

Detta ger svaret

$$G(u, v) = e^{-j2\pi 16u} e^{-j2\pi 27v} 200 \operatorname{sinc}(20u) \operatorname{sinc}(10v).$$

- b)
- *Translationsteoremet* säger att absolutvärdet av Fourier-transformen inte förändras vid translation. Speciellt blir det ingen translation i Fourier-domänen. Detta gäller för a), b), d) och e).
  - *Skalningsteoremet* säger att om objektet blir bredare, så blir dess fouriertransform smalare. Detta gäller för d) och f).
  - Följdaktligen är det korrekta svaret d).

### Uppgift 3 (6p)

a) Se figur. Antag att  $f$  har storleken  $N \times N$ . Då får även  $F$  storleken  $N \times N$ .  $H$  måste ha storleken  $N \times N$  eftersom  $F$  och  $H$  ska multipliceras elementvis. Eftersom  $H$  måste ha storleken  $N \times N$  måste även  $h$  ha det. Därför måste faltningsskärnan nollpaddas upp till storleken  $N \times N$ .

b) **cirkulär** faltning

c) Vid **linjär** faltning antar man vanligtvis att värden utanför bilden är 0. Dessa nollor kommer in och påverkar faltningsresultatet. Vid lågpasfiltrering erhålls då en mörkare ram runt bilden.  
(Vid **cirkulär** faltning kommer dels bildens höger- och vänstersida att påverka varandra och dels kommer bildens över- och underkant att påverka varandra.)

d) Se formelsamlingen, symmetrisk DFT, 2D:

$$F[k, l] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} f[n, m] \cdot e^{-j2\pi(nk/N + ml/M)}$$

Då är:

$$F[0, 0] = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} f[n, m] = 1234 = \text{Svar1.}$$

Se formelsamlingen, Parseval's formel 2D diskret:

$$\sum_n \sum_m f(n, m)g^*(n, m) = \frac{1}{NM} \sum_k \sum_l F(k, l)G^*(k, l).$$

Då  $f$  är reell och  $f = g$  erhålls:

$$\sum_n \sum_m f^2(n, m) = \frac{1}{NM} \sum_k \sum_l |F(k, l)|^2.$$

Då är:

$$\sum_k \sum_l |F(k, l)|^2 = (NM) \sum_n \sum_m f^2(n, m) = 256^2 \cdot 2345 = 153681920 = \text{Svar2.}$$

## DEL 2: Röntgen och CT

### Uppgift 4 (2p)

Svar: 4.

Vid filtrerade återprojektionsmetoden, rampfiltreras projektioner och återprojiceras. Vid återprojektion smetas de rampfiltrerade projektionsvärdena över bildplanet i korrekt vinkel. I figuren till höger syns spår av återprojektioner i form av linjer i fyra olika vinklar  $-45^\circ$ ,  $0^\circ$ ,  $45^\circ$  och  $90^\circ$ .

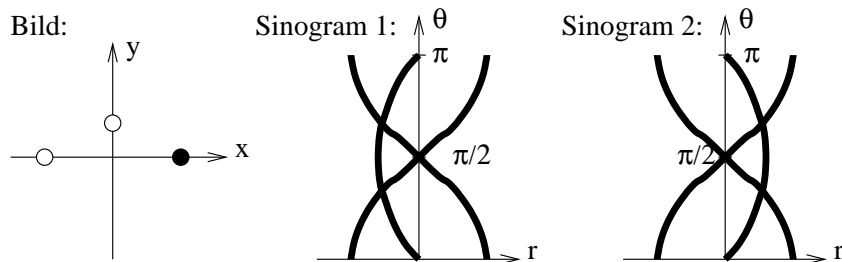
### Uppgift 5 (2p)

När en röntgenstråle färdas genom kroppens mjukdelar dämpas den. Högre frekvens ger **mindre** dämpning.

När en röntgenstråle färdas genom kroppens benstrukturer dämpas den. Högre frekvens ger **mindre** dämpning.

### Uppgift 6 (2p)

Beroende på vilket håll som definieras som positiv vinkel finns två lösningar, se figur.

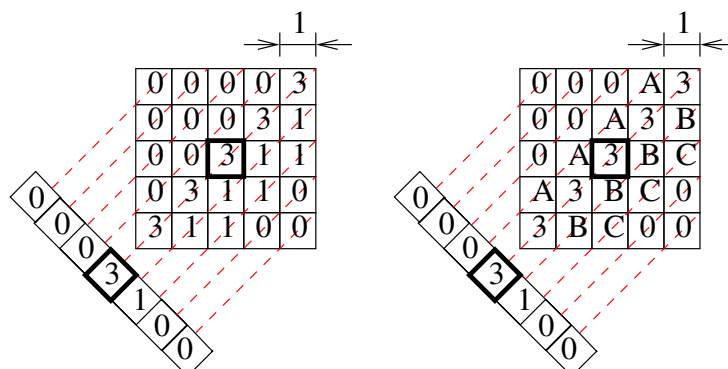


### Uppgift 7 (4p)

$$A = (1 - 1/\sqrt{2}) \cdot 3 \approx 0.879$$

$$B = (1 - 1/\sqrt{2}) \cdot 3 + 1/\sqrt{2} \cdot 1 \approx 1.586$$

$$C = (1 - (\sqrt{2} - 1)) \cdot 1 \approx 0.586$$



## DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

### Uppgift 8 (2p)

Man önskar samla in parallella strålar i rätt riktning från patienten.

- Denna stråle utsätts för inkoherent spridning och är oönskad. Den ger dock inga bildfel eftersom den stoppas av gammakameras kollimator.
- Denna stråle har rätt riktning och är önskad.
- Denna stråle har fel riktning och är oönskad. Den ger dock inga bildfel eftersom den stoppas av gammakameras kollimator.
- Denna stråle utsätts för inkoherent spridning och är oönskad. Den kommer att ge bildfel eftersom den inte stoppas av gammakameras kollimator. (Eventuellt kan de filtreras bort pga lägre energi.)

### Uppgift 9 (2p)

Systemet till vänster har en relativ sensitivitet lika med 1 och systemet till höger har en relativ sensitivitet lika med 3. Fördelen med systemet till höger är att **det tar tillvara 3 gånger fler fotoner**. På så vis kan insamlingstiden sänkas med en faktor 3 med bevarad bildkvalitet.

### Uppgift 10 (2p)

SPECT = Single Photon Emission Computed Tomography

PET = Positron Emission Tomography

### Uppgift 11 (2p)

- 

$$N^- = N_0 \exp \left\{ - \int_{-R}^{s_0} \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\}$$

b) Den totala dämpningen fås genom att kombinera ekvationerna.

$$N_c = N_0 \cdot \frac{N^-}{N_0} \cdot \frac{N^+}{N_0}$$

$$N_c = N_0 \cdot \exp \left\{ - \int_{-R}^{s_0} \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\} \cdot \exp \left\{ - \int_{s_0}^R \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\}$$

$$N_c = N_0 \cdot \exp \left\{ - \int_{-R}^R \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\},$$

där  $N_c$  är antalet dubbelfotoner som når båda detektorerna.

### Uppgift 12 (3p)

- Det kan t ex vara den filtrerade återprojektionslösningen eller  $f^0(x, y) = 1$ .
- Då blir även  $f^1(x, y) = 0$ . Detta förutsatt att nämnaren  $\sum_{i'=1}^m A_{ji'} \cdot f_{i'}^k$  kompletteras med ett litet  $\epsilon$ , för att undvika division med 0. Annars blir  $f^1(x, y)$  odefinierad.
- Då blir  $f^{k+1}(x, y) = f^k(x, y)$  och vi har nått konvergens.

## DEL 4: Viktiga mätvärden och dess beräkning

### Uppgift 13 (2p)

- Medelvärde  $\mu_N = 7$  och standardavvikelse  $\sigma_N = \sqrt{7}$ .
- Poissonbrus har alltid positiva värden.

## DEL 5: Ultraljud

### Uppgift 14 (2p)

Formelsamlingen ger

$$X(f) = 0.5\delta(f + 0.5) + 0.5\delta(f - 0.5).$$

Vidare erhålles

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) \cdot G(f) = X(f) \cdot (1 + \text{sgn}(f)) \\ &= 0.5\delta(f + 0.5) + 0.5\delta(f - 0.5) + (-0.5\delta(f + 0.5) + 0.5\delta(f - 0.5)) \\ &= 0.5\delta(f + 0.5) + 0.5\delta(f - 0.5) + j \cdot j (0.5\delta(f + 0.5) - 0.5\delta(f - 0.5)). \end{aligned}$$

Invers fouriertransform ger

$$y(t) = \cos(\pi t) + j \sin(\pi t)$$

$$|y(t)| = \sqrt{\cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t)} = 1.$$

Notera att genom kvadraturfiltreringen erhåller vi en imaginär signal som är fasförskjuten  $\pi/2$  jämfört med originalsignalen.

### Uppgift 15 (2p)

- a) Vi använder det tipsade sambandet  $v = \lambda \cdot f$ , vilket ger  $f = v/\lambda$ . För att återge 3 mm:s detaljer bör  $\lambda = 2 \cdot 3 \cdot 10^{-3} [m]$ , maximalt.  
 $f = 1500/(6 \cdot 10^{-3}) = 250 \cdot 10^3 [Hz] = 0.25 [MHz]$ .
- b) Det gäller att frekvensen för en våg är konstant. Däremot är utbredningshastigheten beroende av materialet enligt  $c = Z/\rho$ . Det är därför oklart om den ökar eller minskar med  $Z$ , eftersom  $\rho$  också inverkar. Våglängden ändras så att ekvationen  $c/f = \lambda$  är uppfylld i det nya materialet.

## DEL 6: MRI

### Uppgift 16 (4p)

- a)
  - Spinnvektorerna i hela objektet orienteras antingen parallellt eller anti-parallellt med det stationära magnetfältet.
  - Frekvensen på denna RF-puls överensstämmer med Larmorfrekvensen,  $127.74 = 42.58 \cdot 3$ . Spinnvektorn kommer då att precessera runt magnetfältets riktning med Larmorfrekvensen. Precessionsvinkeln ökar med tiden och spinnvektorn kommer därmed att röra sig bort från z-axeln och rotera i en spiral ner mot ner mot xy-planet.
- b) Frekvensen på denna RF-puls överensstämmer inte med Larmorfrekvensen. Spinnen kommer att fortsätta vara orienterade i  $B_0$ -fältets riktning och de kommer inte att öka sin precessionsvinkel.
- c) Med en gradient  $G_z$  kommer endast spinnen för den xy-slice inom objektet som har rätt Larmorfrekvens att aktiveras av en elektromagnetisk puls med frekvensen 128.17 MHz.  $128.17 = 42.58 \cdot (3 + 0.001 \cdot z) \Rightarrow z = 10.1 \text{ cm}$ .

### Uppgift 17 (3p)

- a) Man vill inte ha sampelpunkterna längs de sneda linjerna. Man vill ha sampelpunkter på en kartesisk grid. Därefter vill man ta invers 2D DFT.
- b) För att gå direkt från origo ut till vänstra övre hörnet fordras en mycket stark gradient. I en MR-kamera finns begränsningar på hur stora gradienter man kan generera.
- c) En fördel är att insamlingen blir snabbare i c) eftersom man undviker upprepade exciteringar. En nackdel är att kvaliteten på data blir sämre ju längre tiden går från excitationen.

**Uppgift 18 (1p)** Nämn minst en av dessa artefakter: Huvudrörelse, eddy currents eller geometriska distorsioner (susceptibility distortions).