

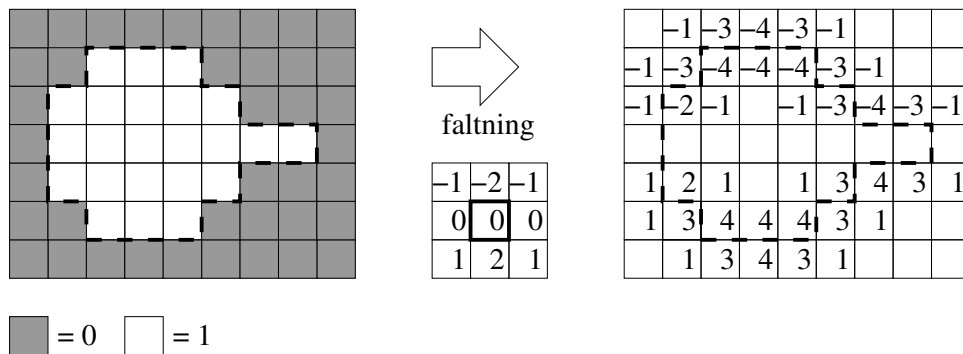
Lösning till tentamen i Medicinska Bilder, TSBB31, 2020-10-26

Maria Magnusson (maria.magnusson@liu.se)

DEL 1: Grundläggande 2D signalbehandling

Uppgift 1 (3p)

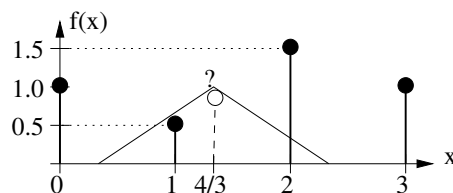
a)



b) Derivering i y-led, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$.

Uppgift 2 (7p)

a) Se figur nedan.



Interpolationsfunktionen förflyttas till det okända värdets position, $x = 4/3$.

Där multipliceras samplen med interpolationsfunktionens höjd.

$$f(4/3) = 0.5 \cdot \Lambda(1/3) + 1.5 \cdot \Lambda(2/3) = 0.5 \cdot 2/3 + 1.5 \cdot 1/3 = 5/6.$$

På liknande sätt erhålls

$$f(5/3) = 0.5 \cdot \Lambda(2/3) + 1.5 \cdot \Lambda(1/3) = 0.5 \cdot 1/3 + 1.5 \cdot 2/3 = 7/6.$$

b)

Efter uppsampling

c)

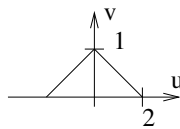
$$H_1(u, v) = \text{sinc}^2(u) \cdot \text{sinc}^2(v).$$

$$H_2(u, v) = \text{sinc}^2(2u) \cdot \text{sinc}^2(2v).$$

Vid nedsampling måste man även utföra lågpasstrerering, annars riskerar man att få vinkningsdistorsion. $h_2(x, y)$ är bredare än $h_1(x, y)$. Skalningsteoremet säger att då gäller att $H_2(u, v)$ är smalare än $H_1(u, v)$. (Man ser det även på funktionerna, $\text{sinc}^2(2u)$ är smalare än $\text{sinc}^2(u)$.) Eftersom $H_2(u, v)$ är smalare än $H_1(u, v)$ ger den mer lågpasstrerering.

Uppgift 3 (5p)

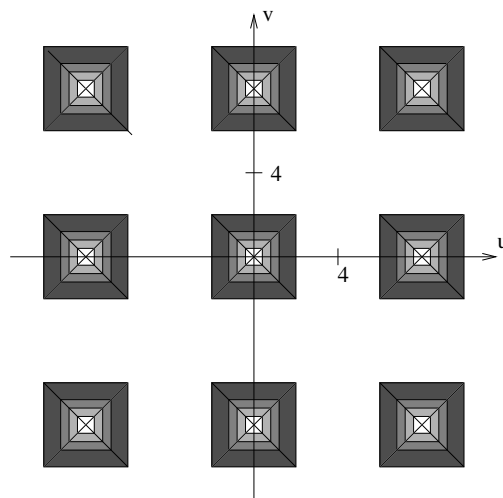
a) $\Lambda\left(\frac{u}{2}\right)$



b) $A(u, v) = \Lambda\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \Lambda\left(\frac{v}{2}\right)$. Dess bredd är $d = 4$.

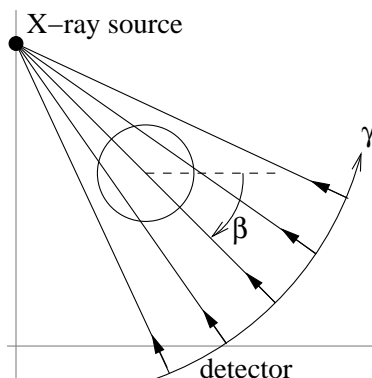
c) $f_{s_{min}} = 4$.

d)



DEL 2: Röntgen och CT

Uppgift 4 (2p) Pilarna i figuren visar hur fanbeam återprojektion sker, från de rampfiltrerade projektiionsvärdena tillbaka mot röntgenkällans position.



Uppgift 5 (2p)

- a) En punkt i objektbilden ger en sinuskurva i projektionsbilden (sinogrammet). Musse kan ses som en kombination av tre olika stora "punkter".
- Musses huvud ger den tjocka "korven".
 - Musses lilla öra ger den smala sinuskurvan.
 - Musses stora öra ger den tjock sinuskurvan.
- b) Projektion-återprojektion är ekvivalent med faltning med en "vulkan",

$$v(x, y) = 1/r, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

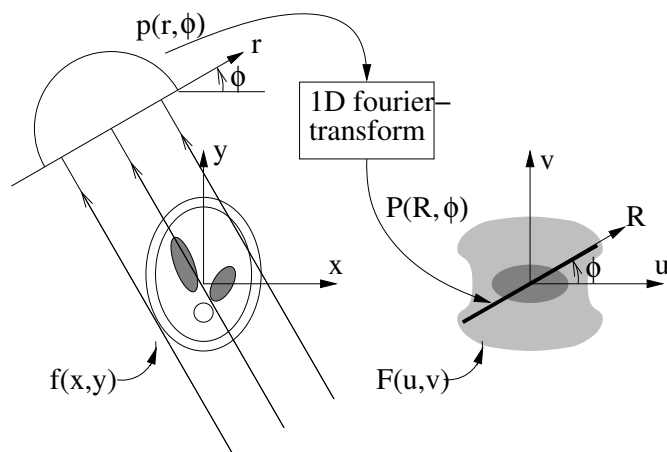
Musse kommer att faltas med en "vulkan" och bli suddigare.

Uppgift 6 (3p) Här följer ett onödigt långt svar:

- En **röntgenkälla** ger normalt inte ifrån sig en enda frekvens ν (eller monoenergi $E = h\nu$), utan ett helt **spektrum** av olika frekvenser. **Dämpningen** μ för de olika vävnaderna i kroppen är **beroende av frekvensen** och vanligtvis minskar dämpningen för ökande frekvens. Formen på det spektrum som går in i kroppen skiljer sig därmed från formen på det spektrum som lämnar kroppen, med en förskjutning mot högre frekvenser. Spektret har relativt sett blivit "hårdare", vilket förklarar benämningen "beam hardening".
- Den övre kurvan visar ett linjärt förhållande mellan μ -längd och längd. Detta erhålls om röntgenkällan endast ger en **mono-energi** och μ gäller för denna energi och **vatten**. Den undre kurvan visar det **verkliga förhållandet** mellan uppmätt projektiionsvärde och olika tjocklekar ("längd") på en **vattenfantom**. Det som korrigeras är de **uppmätta projektiionsvärdena**.

- Bildkvaliteten skulle bli **“perfekt”** om det objekt som man tomograferar bara innehåller **vatten**. Bildkvaliteten blir **“ganska bra”** om det objekt som man tomograferar bara innehåller **mjukdelar** eftersom dessa har en dämpning som liknar vatten någorlunda. Bildkvaliteten blir **“inte så bra”** om det objekt som man tomograferar även innehåller **benvävnad** eftersom det inte liknar vatten-dämpningen.

Uppgift 7 (3p) Se figur. Projektionen $p(r, \theta)$ är genererad för vinkeln θ . Fouriertransform i r -led ger $P(R, \theta)$. Den överensstämmer med en linje med vinkeln θ genom $F(u, v)$, den två-dimensionella fouriertransformen av objektet. Följdaktligen gäller att $P(R, \theta) = F(R \cos \theta, R \sin \theta)$. Ett projektiionsintervall $\theta = 0^\circ - 180^\circ$ räcker. Då blir hela u, v -planet känt.



DEL 3: Gamma-kamera, SPECT och PET

Uppgift 8 (2p)

a)

$$N^- = N_0 \exp \left\{ - \int_{-R}^{s_0} \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\}$$

b) Den totala dämpningen fås genom att kombinera ekvationerna.

$$N_c = N_0 \cdot \frac{N^-}{N_0} \cdot \frac{N^+}{N_0}$$

$$N_c = N_0 \cdot \exp \left\{ - \int_{-R}^{s_0} \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\} \cdot \exp \left\{ - \int_{s_0}^R \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\}$$

$$N_c = N_0 \cdot \exp \left\{ - \int_{-R}^R \mu(x(s'), y(s'); E) ds' \right\},$$

där N_c är antalet dubbelfotoner som når båda detektorerna.

Uppgift 9 (2p) Ett **radioaktivt material** distribueras till patienten. Detta emitterar **positroner**. Varje positron förenar sig snart med en **elektron**. Deras massor förbrukas och två fotoner med energin **511 keV** skapas. De färdas i motsatt riktning och detekteras. För att två fotoner ska betraktas som simultana måste **tidsfönstret** (tidsskillnaden) vara mycket litet, typiskt 2-20ns.

Uppgift 10 (2p) Här följer ett onödigt långt svar:

En stillastående gamma-kamera mäter en projektion av aktivitetsfunktionen inne i kroppen. En sådan projektionsbild kan man titta på och analysera, men precis som då det gäller vanliga röntgenbilder så är informationen överlagrad. T ex så blir hjärtats främre vägg överlagrad på hjärtats bakre vägg. Om man låter gammakameran rotera, så kan man mäta upp projektioner från många olika vinklar. Dessa skickas sedan till en rekonstruktionsalgoritm (ungefär som för CT) och resultatet blir snittbilder, eller en hel volym, där informationen inte är överlagrad. Detta är SPECT.

Uppgift 11 (2p)

- Sätt $N = 9 \times 9 \times 9$.
- Först faltar man **SPECTvol** med en $9 \times 9 \times 9$ kärna fylld med $1/N$. Kalla resultatet: **SPECTm**.
- Därefter kvadrerar man **SPECTvol** och faltar denna med en $9 \times 9 \times 9$ kärna fylld med $1/N$. Kalla resultatet: **SPECT2m**.
- Beräkna **SPECTs** = $\sqrt{\frac{N}{N-1}(\text{SPECT2m} - \text{SPECTm}^2)}$.
- Till sist erhålles **CV** som **SPECTs** dividerat med **SPECTm**.

Uppgift 12 (2p)

$$Z = \sum_{k=1}^K a_k = 10 + 10 + 40 + 30 + 30 = 120,$$

$$X = \sum_{k=1}^K x_k a_k = 10 \cdot 0 + 10 \cdot (-2) + 40 \cdot 0 + 30 \cdot (2) + 30 \cdot 0 = 40,$$

$$Y = \sum_{k=1}^K y_k a_k = 10 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 40 \cdot 0 + 30 \cdot 0 + 30 \cdot (-2) = -40.$$

Gammafotonens position $(x_{pos}, y_{pos}) = \frac{(X,Y)}{Z} = \frac{(40,-40)}{120} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ mm.

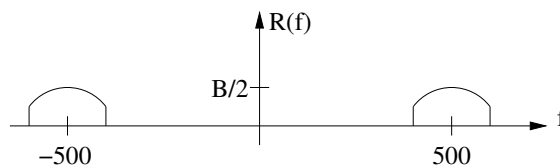
DEL 5: Ultraljud

Uppgift 13 (2p)

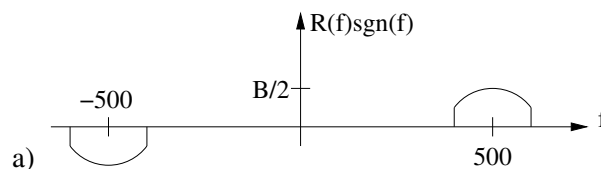
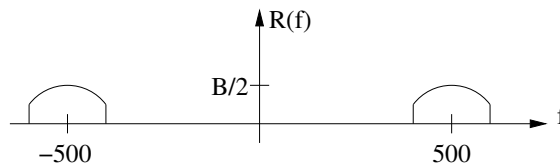
a) Formelsamlingen ger

$$R(f) = G(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - 500) + \frac{1}{2} \delta(f + 500) \right) = \frac{1}{2} G(f - 500) + \frac{1}{2} G(f + 500)$$

b) Skissen av $R(f)$ syns nedan.



Uppgift 14 (2p)



b)

$$Y(f) = G(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - 500) + \frac{1}{2} \delta(f + 500) \right) - j \cdot j \cdot G(f) * \left(\frac{1}{2} \delta(f - 500) - \frac{1}{2} \delta(f + 500) \right)$$

Invers fouriertransform ger:

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) \cdot \cos(1000\pi t) - jg(t) \cdot (-\sin(1000\pi t)) \\ &= g(t) \cdot \cos(1000\pi t) + jg(t) \cdot \sin(1000\pi t) \\ |y(t)| &= |g(t)| \sqrt{\cos^2(1000\pi t) + \sin^2(1000\pi t)} = \{g(t) > 0\} = g(t) \end{aligned}$$

Vi har fått fram den önskade enveloppen $g(t)$!

DEL 5: Viktiga mätvärden och dess beräkning

Uppgift 15 (3p)

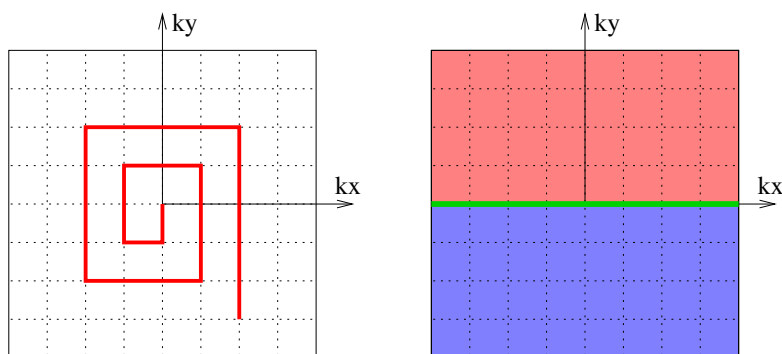
- Poissonbrus dominerar för röntgenbilder.
- Medelvärde = standardavvikelse² för Poissonbrus. För Gaussiskt brus finns inget sådant beroende.
- I grunden gäller modellen med Poissonbrus för röntgenstrålar, men logaritmeringen och rekonstruktionen påverkar bruset. I den rekonstruerade bilden blir bruset större i mitten av objektet.

DEL 6: MRI

Uppgift 16 (2p) Under utsändandet av RF-pulsen låter man magnetfältet variera i den riktning som är vinkelrät mot bildplanet. Eftersom vävnad bara kommer att exciteras där ett visst förhållande råder mellan magnetfältets styrka och RF-pulsens frekvens (Larmor-frekvensen), medför det att bara vävnad nära bildplanet kommer att exciteras. Tjockleken på det exciterade bildplanet bestäms av gradientens storlek och RF-pulsens bandbredd.

Uppgift 17 (5p)

- Avsökningssbanan ges av integralen av G_x och G_y , se figur nedan till vänster.
- Kalla värdena i k-space $F(u, v)$. Att det finns en hermitisk symmetri innebär att $F(u, v) = F^*(-u, -v)$. Det innebär att man bara behöver avsöka (något mer än) halva k-space. Se figur nedan till höger. Avsök det röda området och den gröna linjen. Det blå området erhålls genom att spegla det röda området horisontellt och vertikalt, samt att ta konjugatet.



Uppgift 18 (1p) Den vita hjärnvävnaden är anisotrop. Den innehåller nervfibrer som går i en viss riktning. Så här säger Wikipedia: “Om hjärnan vore ett datornätverk så skulle den grå substansen vara de faktiska datorerna och den vita substansen skulle vara de kablar som band samman datorerna och gjorde det möjligt för dem att kommunicera med varandra.”