

# TSBB32 – Föreläsning 12: Videosammanfattningar

Innan du börjar titta på den första videorna om fouriertransformen, så är det lämpligt att du först repeterar faltning och fourierserier från VT1.

Fouriertransformen är en utvidgning från fourierserien, så för att förstå fouriertransformen är det särskilt viktigt att du har god förståelse för fourierserien.

## Repetition av faltning

REPETITION: LTI-SYSTEM & FALTNING

LTI-SYSTEM

$x(t) \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

Antag energifritt system  $\Rightarrow y_{zi}(t) = 0 \Rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$

$x(t) = \sum_n a_n x_n(t) \xrightarrow{\text{linjärt}} y(t) = \sum_n a_n y_n(t)$

$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\text{LTI}} y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$

$k(t) < \infty \forall t$   
 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$

$\delta(t) \xrightarrow{\text{TI}} h(t)$   
 $\delta(t-\tau) \xrightarrow{\text{TI}} h(t-\tau)$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau$   
 $= (X * h)(t) = X(t) * h(t)$

Fouriertransform från fourierserie exempel – Tolkning

Kort repetition av faltning för beräkning av utsignalen från ett LTI-system.

# Repetition av fourierserier

FOURIERSERIER - REPETITION

En fysikalisk  $T_0$ -periodisk signal.

$$x_{T_0}(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n) ; \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \text{ [rad/s]}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} ; D_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_{T_0}(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_n = 2|D_n| \\ \theta_n = \arg D_n \end{cases} ; D_{n \geq 1} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}$$

$$D_{-n} = D_n^*$$

LTI

$$x_{T_0}(t) \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow y_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot \mathcal{H}\{e^{jn\omega_0 t}\}$$

Linjärt  $(\sum_n a_n \cdot y_n(t))$

$$= \sum_n a_n \cdot x_n(t) \Rightarrow y_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t} ; \tilde{D}_n = D_n \cdot H_{n,\omega_0}$$

$$H_{n,\omega_0} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau$$

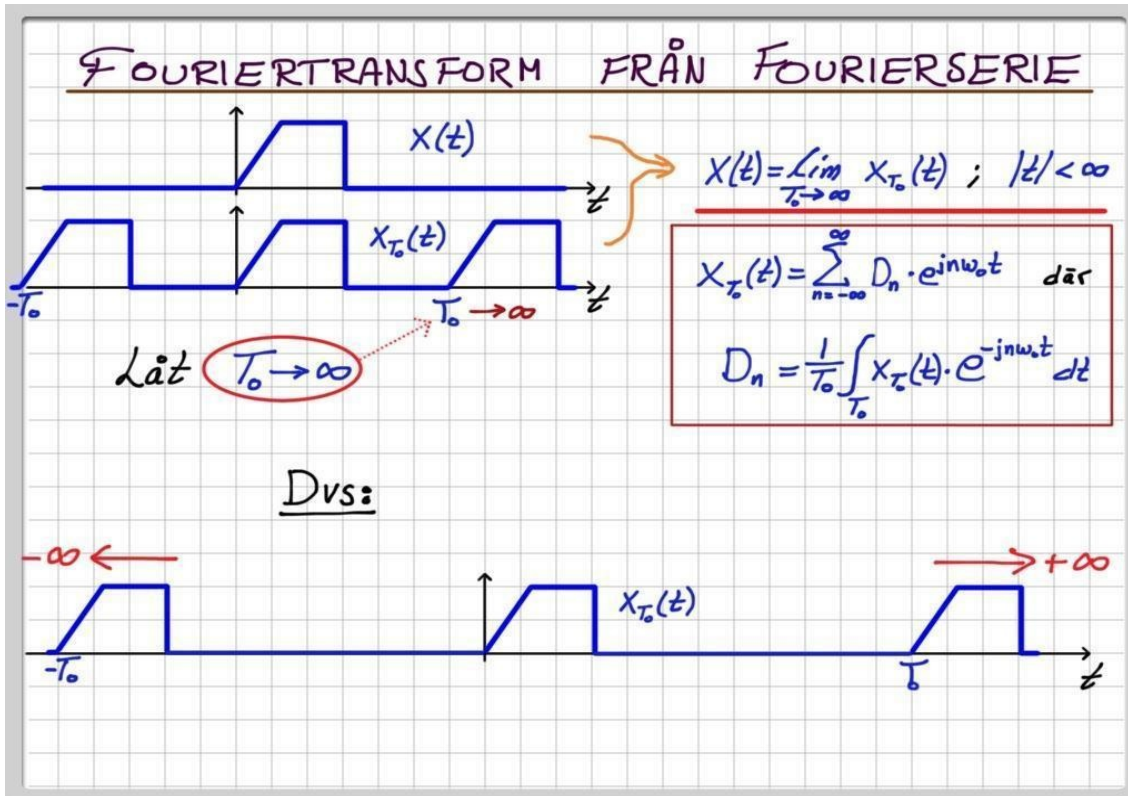
$\tau$  (inte t)

Kort repetition av fourierserier och utsignalen från stabila LTI-system för periodisk insignal.  
 Vid 4:27 glömde jag att nämna sambandet  $C_0 = D_0$  (=signalens medelvärde).

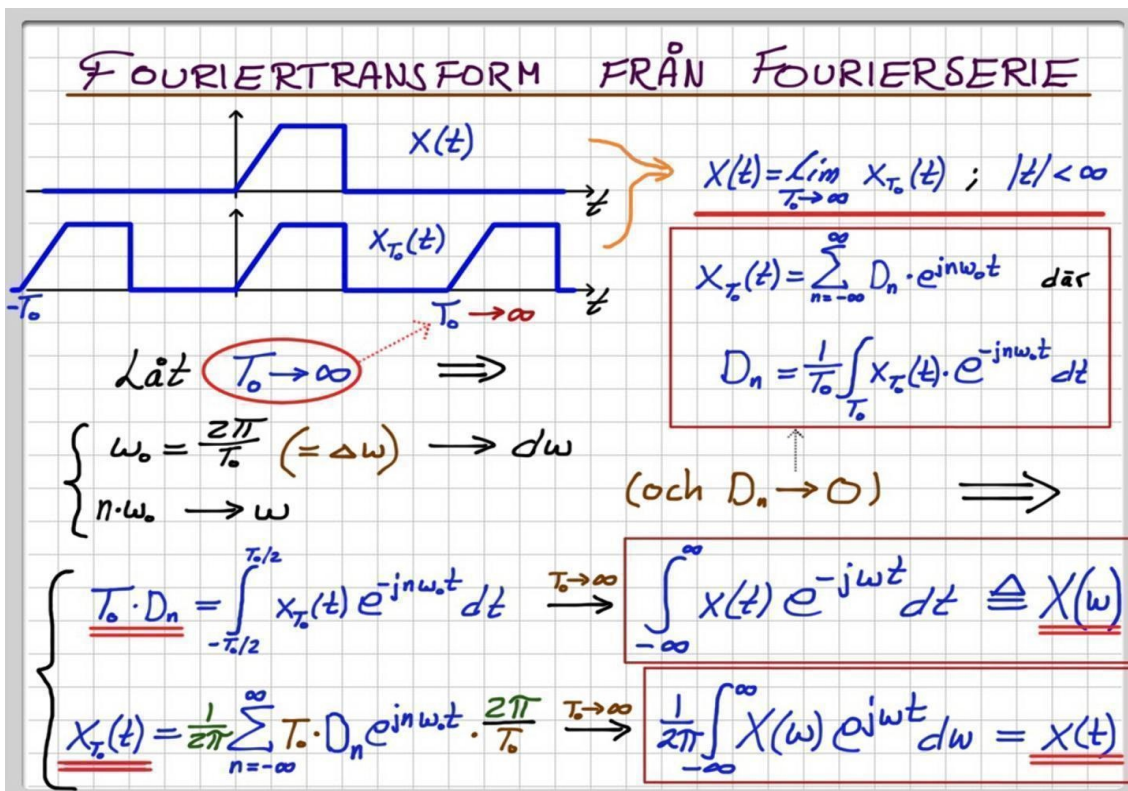
Här betecknar jag utsignalens komplexa fouriersseriekoefficienter med  $\tilde{D}_n$  i stället för  $\hat{D}_n$ , som vi främst använder i kursen, men det har ingen särskild betydelse.

# Fouriertransformen – härledning och ett exempel

## Härledning av fouriertransformen utgående från fourierserien



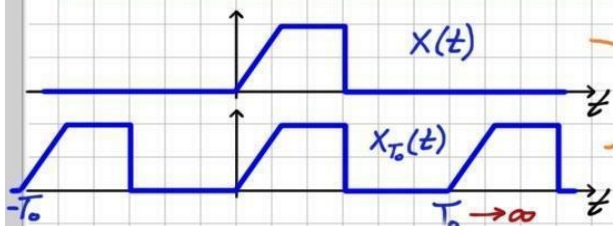
Härledning av fouriertransformen till en icke-periodisk signal  $x(t)$  utgående från den komplexa fourierserien för en motsvarande periodisk signal  $x_{T_0}(t)$ , där man låter periodtiden  $T_0$  gå mot oändligheten.



När periodtiden  $T_0$  går mot oändligheten, så övergår  $T_0 D_n$  till fouriertransformen  $X(\omega)$  till den icke-periodiska signalen  $x(t)$ .

Samtidigt övergår den komplexa fourierserien till den inversa fouriertransformen av  $X(\omega)$ .

# FOURIERTRANSFORM FRÅN FOURIERSERIE



$$X(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t) ; |t| < \infty$$

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \text{ där}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_{T_0}(t) \cdot e^{-jn\omega_0 t} dt$$

## Existensvillkor:

$|X(\omega)| < \infty$  dvs.

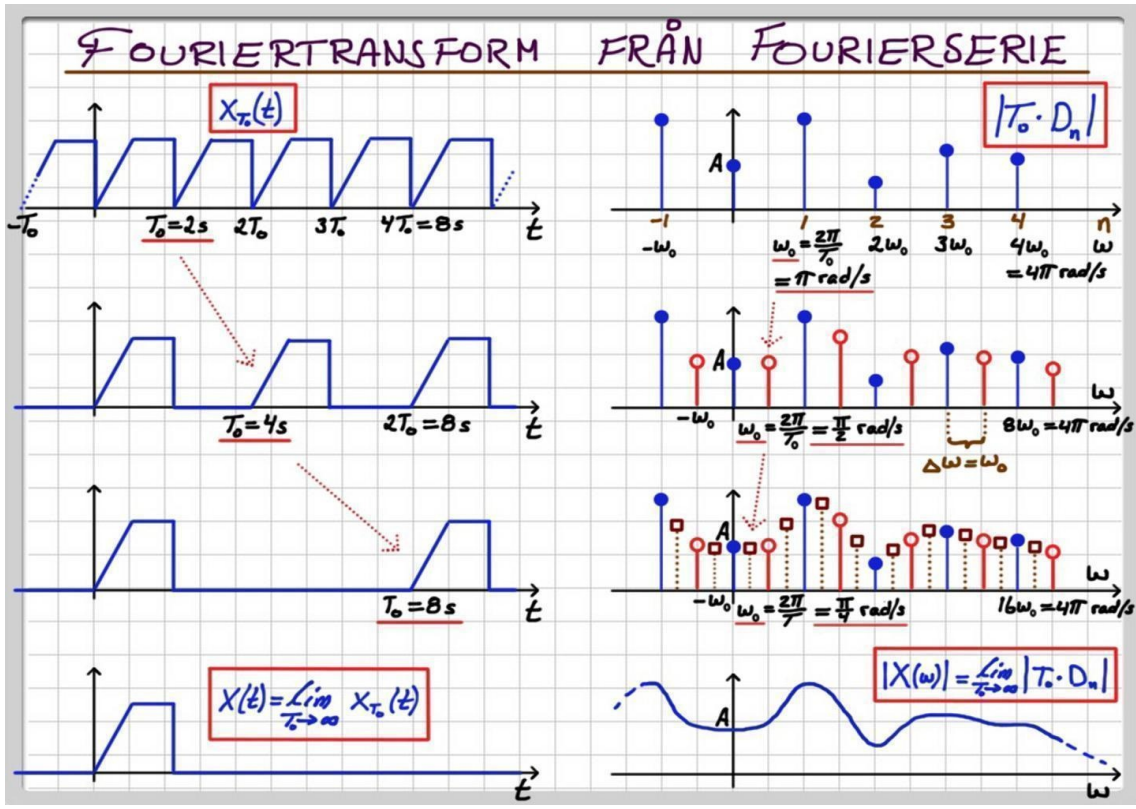
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \triangleq X(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = x(t)$$

Videons avslutning – fouriertransformens existensvillkor:  
 Signalen  $x(t)$  är fouriertransformerbar (dvs. den har en fouriertransform  $X(\omega)$ ) om  $x(t)$  är absolutintegrerbar.

## En grafisk tolkning av härledningen (av fouriertransformen från fourierserien)

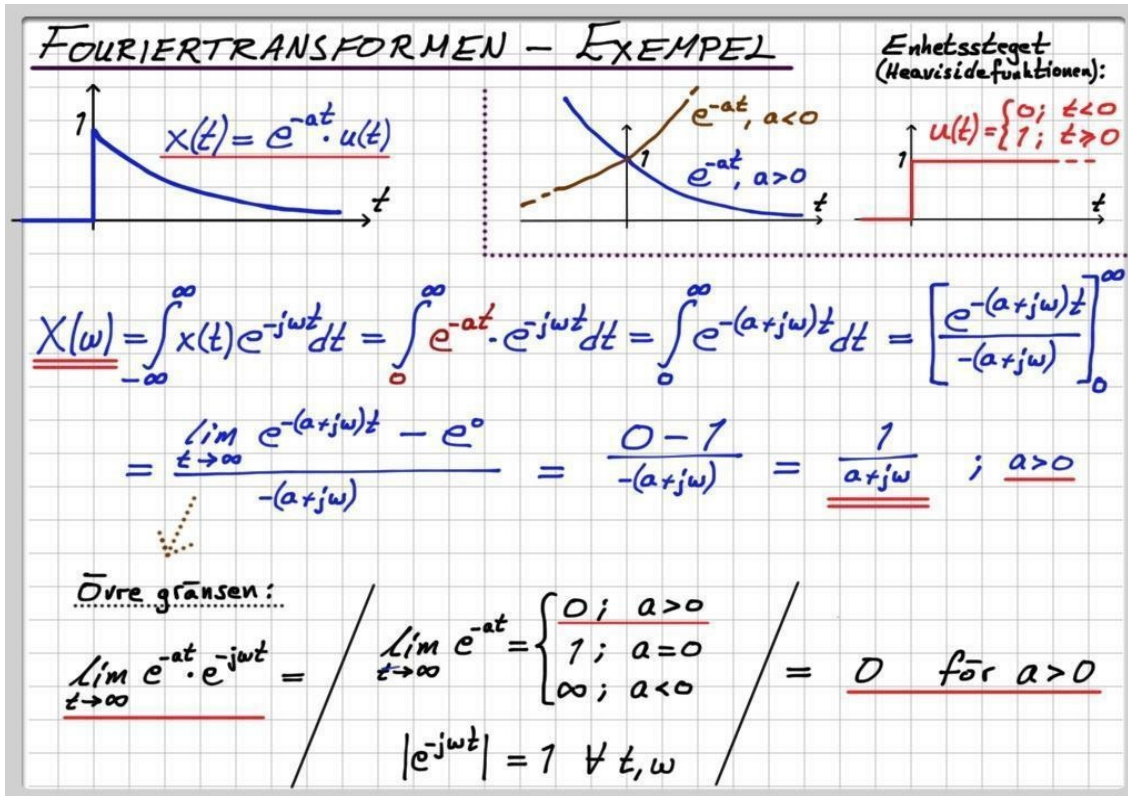


Konsekvens, om  $x_{T_0}(t)$  erhålls genom en periodisering av  $x(t)$ :

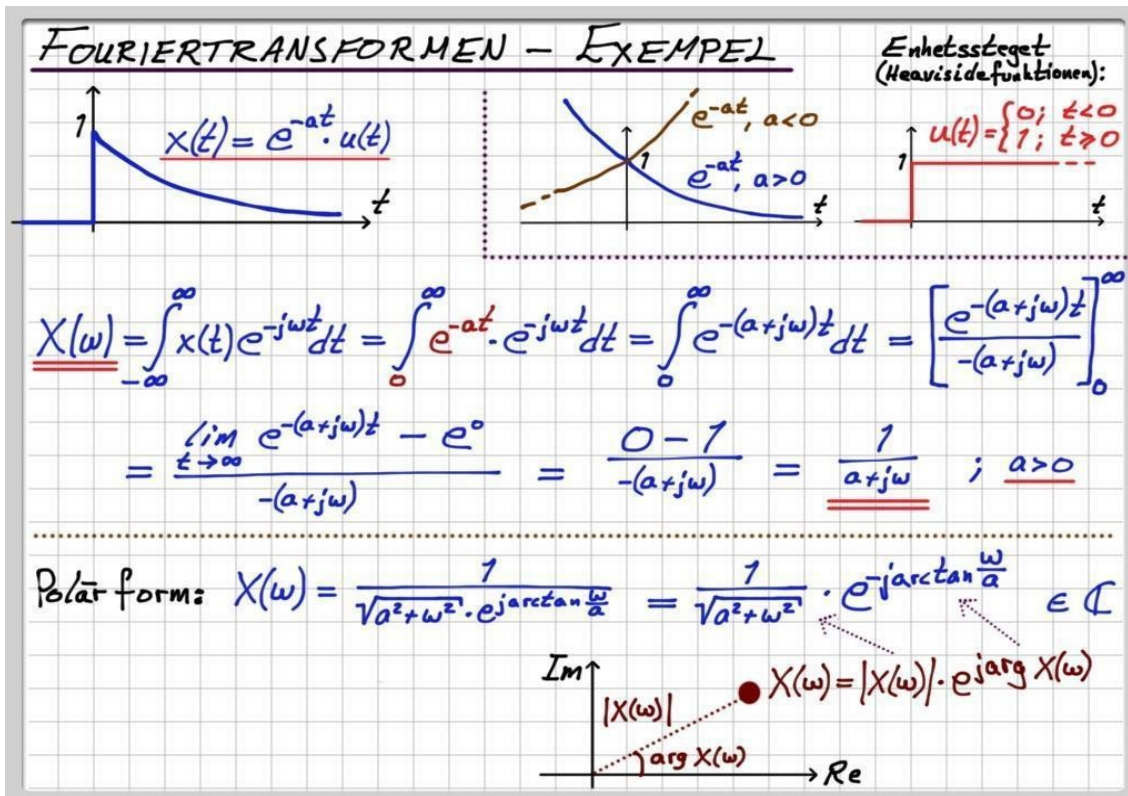
$$D_n = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0} = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$$

Här visas ett illustrerande exempel på hur de normaliserade komplexa fourierseriekoefficienterna för en periodisk signal övergår till fouriertransformen till signalen när periodtiden går mot oändligheten.

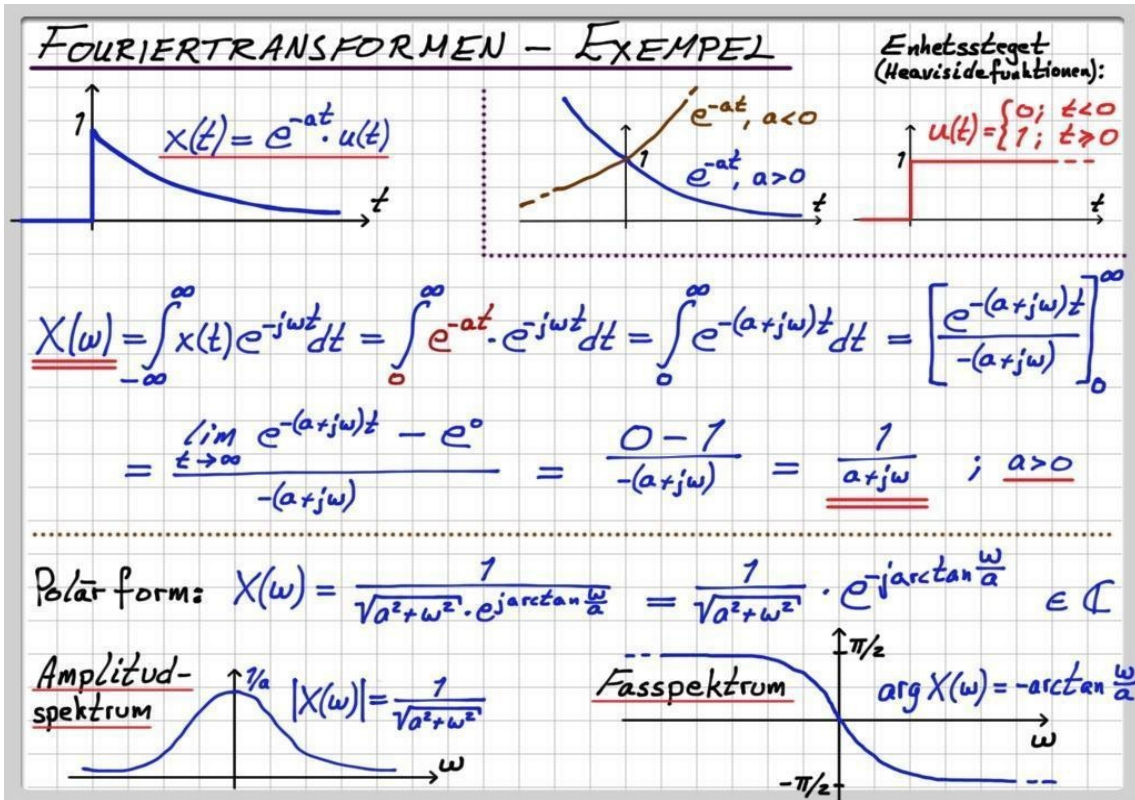
# Beräkningsexempel 1 – fouriertransformen av en exponentialfunktion



Här visas hur beräkningen av fouriertransformen av en högersidig reellvärd tidskontinuerlig exponentialfunktion går till.



Beräkning av signalens amplitudspektrum och fasspektrum, som erhålls från fouriertransformen uttryckt på polär form.



Skissering av signalens amplitudspektrum och fasspektrum – en grafisk beskrivning av fouriertransformen.

## Beräkningsexempel 2 – fouriertransformen av en fyrkantpuls

### FOURIERTRANSFORMEN

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Exempel:  $\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$

$$= u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right)$$

BREDD =  $\tau$

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} = \tau \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

$\text{sinc}_N(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$   
 $\text{sinc}_N(\alpha) = \frac{\sin(\pi \cdot \alpha)}{\pi \cdot \alpha}$

Läs i första hand främst [videobeskrivningen på videons webbsida](#) (som du kommer till när du klickar på videolänken på föreläsningsswebbsidan).

Sinc-funktionen är en mycket viktig funktion, som du ofta kommer att stöta på under resten av kursen, så försök hänga med på resonemanget i videon om sinc:ens egenskaper!