

# TSBB32 – Föreläsning 17: Videosammanfattningar

Under de tre kommande föreläsningarna används laplacetransformen som matematiskt "verktyg" vid analys av tidskontinuerliga signaler och (i synnerhet) LTI-system.

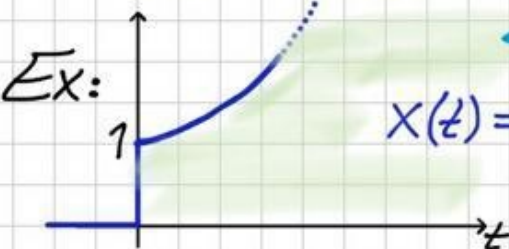
De tre inledande videorna nedan är från en inledande transformteoridel en annan av mina kurser.

## Laplacetransformanalys av signaler

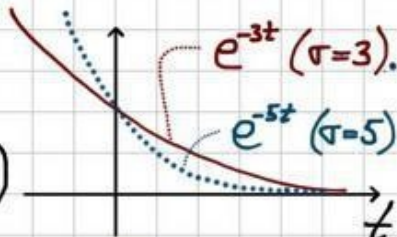
### Härledning av laplacetransformen

Laplacetransformen från Fouriertransformen

Låt  $x(t) = 0$  för  $t < 0$  &  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

Ex:   $x(t) = e^{2t}u(t) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} \nexists$   
(enligt grunddef.)

Låt  $\tilde{x}(t) = x(t) \cdot e^{-\sigma t}$ , där  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  
sådan att  $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(t)| dt < \infty \quad \forall \sigma > \sigma_0$  ( $\sigma_0 \geq 0$  här)

  $e^{-3t}$  ( $\sigma=3$ ),  $e^{-5t}$  ( $\sigma=5$ )

$x(t) = e^{2t}u(t) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} \nexists$   
 $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-2t} = u(t) \Rightarrow \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} \exists$  för  $\sigma=2$   
 $\tilde{x}(t) = x(t)e^{-3t} = e^{-t}u(t) \Rightarrow \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} \exists$  för  $\sigma=3$   
 $\therefore \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} \exists$  för  $\sigma > \sigma_0 = 2!$

Del 1

Härledning av den enkelsidiga laplacetransformen utgående från Fouriertransformen.

Fokus:

- \* Signalen  $x(t)$  är här inte absolutintegrerbar, vilket innebär att den inte har någon Fouriertransform  $X(\omega)$ .
- \* Betrakta i stället signalen  $\tilde{x}(t) = x(t) \cdot e^{-\sigma t}$ .  
Om  $\sigma$  väljs tillräckligt stort,  $\sigma > \sigma_0$ , så blir  $\tilde{x}(t)$  absolutintegrerbar och för dessa  $\sigma$  så existerar Fouriertransformen till  $\tilde{x}(t)$ .

# Laplace transformen från Fouriertransformen

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{F}\{\tilde{x}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt = \left/ \begin{array}{l} \tilde{x}(t) = x(t) e^{-\sigma t} \\ x(t) = 0 \text{ för } t < 0 \end{array} \right/ = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \left/ \boxed{s = \sigma + j\omega} \right/ \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \underline{X(s)} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Jämför med} \\ X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \end{array} \right) \end{aligned}$$

## Den enkelsidiga Laplace transformen

till  $x(t)$  (där  $x(t) = 0$  för  $t < 0$ ):

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$X_I(s) =$

Existensvillkor,  $|X(s)| < \infty$

## Konvergensområde:

$$\sigma = \text{Re}\{s\} > \sigma_0$$

s-planet,  
 $\sigma$ :



Från 3:31 – Central slutsats i den övre halvan av bilden ovan:

Laplace transformen av  $x(t)$  är ekvivalent med Fourier transformen av  $\tilde{x}(t)$ !

Från 5:45 – Definition av den enkelsidiga Laplace transformen av/till  $x(t)$ .

Från 7:07 – Laplace transformens konvergensområde, dvs. de  $s$ -värden för vilka transformen är definierad.

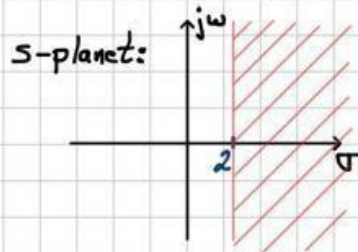
OBS: För att en Laplace transform ska vara fullständigt specificerad, så måste även dess konvergensområde anges!

# Laplaceformexempel

Laplaceformexempel  $x(t) = e^{2t}u(t)$

$$\begin{aligned} \underline{X(s)} &= \mathcal{L}_T\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(2-s)t} dt \\ &= \left[ \frac{e^{(2-s)t}}{2-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2-s} \left( \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(2-s)t} - \underbrace{e^{(2-s) \cdot 0}}_{=1} \right) \\ &= \left. \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(2-s)t} \right|_{s=\sigma+j\omega} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(2-\sigma)t} \cdot \underbrace{e^{-j\omega t}}_{|e^{-j\omega t}|=1 \forall t} \\ &= 0 \text{ om } 2-\sigma < 0 \Rightarrow \underline{\sigma > 2} \\ &= \frac{0-1}{2-s} = \underline{\underline{\frac{1}{s-2}}} \end{aligned}$$

Konvergensområde:  $\text{Re}\{s\} > 2$



Ett räkneexempel (Exempel 1) som visar hur man beräknar laplacetransformen av en signal  $x(t) = e^{2t}u(t)$ , som inte är fouriertransformerbar (eftersom den inte är absolutintegrerbar).

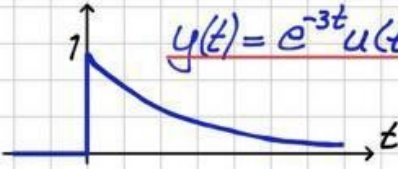
Laplaceformens konvergensområde  $\sigma = \text{Re}\{s\} > 2$  uppkommer här som krav för att integralen ska konvergera.

Konsekvensen blir att  $|X(s)| < \infty$  i konvergensområdet.

# Laplace transform exempel 2 och 3

## Laplace transformen, exempel 2

$y(t) = e^{-3t} u(t)$



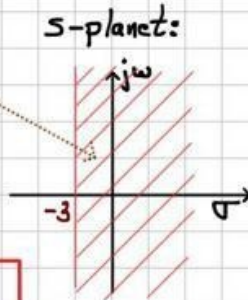
$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^{\infty} y(t) e^{-st} dt$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(3+s)t} dt = \left[ \frac{e^{-(3+s)t}}{-(3+s)} \right]_0^{\infty} = \frac{\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(3+s)t} - e^0}{-(3+s)}$$

$Re\{3+s\} > 0$

$$= \frac{0 - 1}{-(3+s)} = \frac{1}{s+3}$$

Konvergensområde:  $Re\{s\} > -3$



$j\omega$ -axeln ligger i konv. området  $\Rightarrow Y(\omega)$

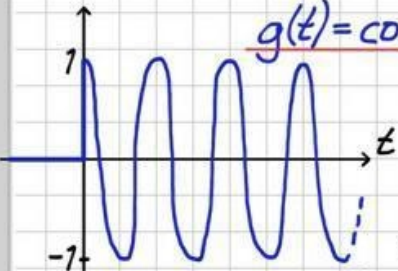
(dvs.  $\int_0^{\infty} |y(t)| dt < \infty$ )  $\Rightarrow Y(\omega) = Y(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+3}$

Här visas ytterligare två exempel på beräkning av enkelsidig laplace transform:

\* Exempel 2, (från 0:00): Laplace transformen av  $y(t) = e^{-3t} u(t)$

## Laplace transformen, exempel 3

$g(t) = \cos(\omega_0 t) u(t)$



$G(s) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-st} dt =$

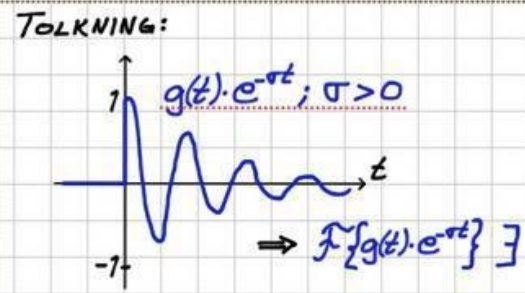
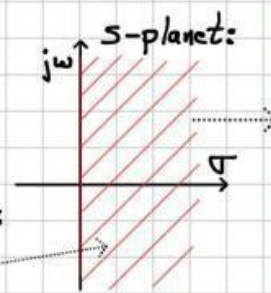
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (e^{-(s-j\omega_0)t} + e^{-(s+j\omega_0)t}) dt$$

$Re\{s-j\omega_0\} = Re\{s\} = \sigma > 0$      $Re\{s+j\omega_0\} = \sigma > 0$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)} + \frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2} \left( \frac{0 - e^0}{-(s-j\omega_0)} + \frac{0 - e^0}{-(s+j\omega_0)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{s+j\omega_0} \right)$$

$$= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

Konvergensområde:  
 $Re\{s\} = \sigma > 0$



$$\mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

$$G(\omega) = \nu p \{G(s)\}_{s=j\omega} + \frac{\pi}{2} ( )$$

$$= \nu p \left\{ \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right\} + \frac{\pi}{2} (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

\* Exempel 3, (från 4:48): Laplace transformen av  $g(t) = \cos(\omega_0 t) u(t)$ .

Från 10:00 beskriver jag hur  $\cos(\omega_0 t)$  har en fouriertransform men inte en laplace transform.