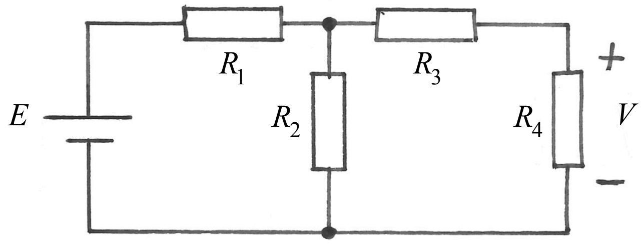
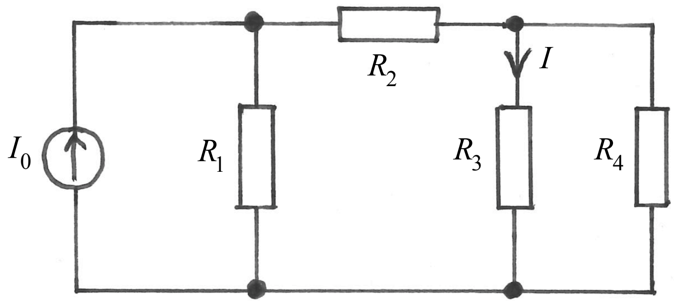
Lektionsuppgifter i Elektriska kretsar – TSBB32 Linjära system

1. Beräkna den spänning V som ligger över resistansen R_4 i nedanstående elektriska krets, där $E = 21\,\text{V}$, $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$ och $R_4 = 3\,\Omega$.
   (*Tips: Här använder du serie- och parallellkoppling samt spänningsdelning.*)



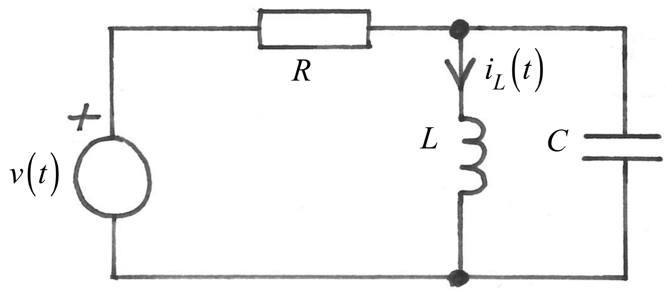
2. Beräkna strömmen I genom resistanden R_3 i nedanstående elektriska krets, där $I_0 = 12$ mA, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 1{,}25\,\Omega$, $R_3 = 1\,\Omega$ och $R_4 = 3\,\Omega$.
   (*Tips: Här använder du serie- och parallellkoppling samt strömdelning.*)

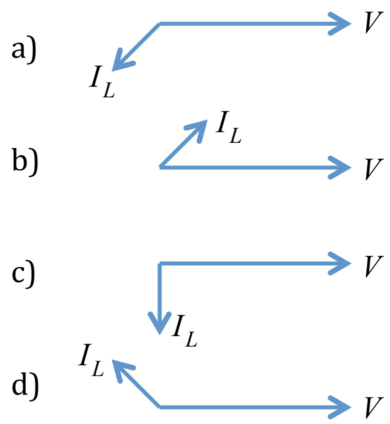


3. Vilket förhållande mellan visardiagrammen för spänningskällan $v(t)$ och strömmen $i_L(t)$ gäller nedan? $v(t) = \hat{V}\cos\left(2\cdot 10^4 t\right)$ Volt, $L = 10$ mH, $C = 1\ \mu$F.

   Anm: *Visardiagrammet för en sinusformad signal $x(t) = \hat{X}\cos(\omega t + \alpha)$ är en grafisk beskrivning av signalens komplexvärda beskrivning $X = \hat{X}\cdot e^{j\alpha}$, dvs. en pil med längd $\hat{X}$ ritad i vinkeln α mot en horisontell linje (den positiva reella axeln i det komplexa talplanet).*
   I_L-pilen är egentligen mycket kortare, så här menas den principiella riktningen.

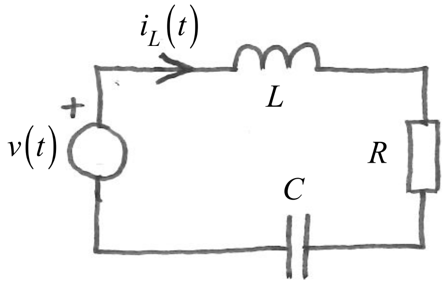
   Tips: *Du behöver bara utföra utföra ett par mindre beräkningar.*





4. Beräkna strömmen $i(t)$ i kretsen nedan när den matas med den sinusformade spänningskällan $v(t) = 25\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right)$ [V].

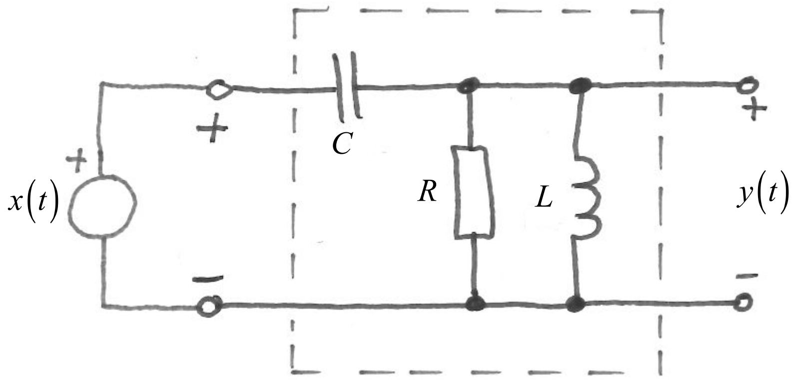
I kretsen är $L = \frac{1}{5}$ H, $R = 20\ \Omega$ och $C = 1$ mF.

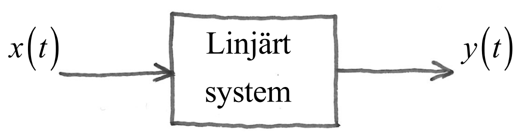


5. Den elektriska kretsen nedan matas med en spänning $x(t) = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$ [V],

där $C = \frac{1}{5}$ F, $R = 5\ \Omega$ och $L = \frac{1}{10}$ H. Den spänningen kan t.ex. tänkas ha uppstått genom att en spänningskälla $x(t)$ kopplats in, som i figuren.

Den elektriska kretsen utgör ett linjärt system med insignal $x(t)$ och utsignal $y(t)$, där $y(t)$ är spänningen över induktansen *L*.





a) Beräkna utsignalens motsvarande komplexa spänning *Y*, som funktion av insignalens komplexa spänning *X* och vinkelfrekvens ω.

b) Beräkna spänningen $y(t)$ då spänningen $x(t)$ har vinkelfrekvens $\omega = 10$ rad/s.

Svar

1. $V = \frac{9}{5}$ volt

2. $I = 6$ mA

3. Visardiagram a)

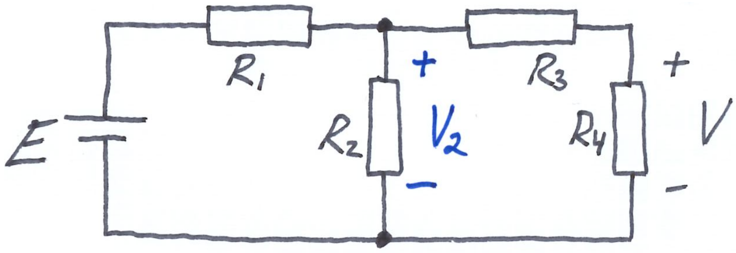
4. $i(t) = \frac{5}{\sqrt{65}} \cos\left(200t - \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{7}{4}\right) \approx 0{,}62\cos(200t - 1{,}8)$ [A]
   (svara helst exakt)

5. a) $Y = X \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - 50 - j\omega}$

   b) $y(t) = \frac{30}{\sqrt{26}} \cos\left(10t + \frac{\pi}{3} + \arctan\frac{1}{5}\right) \approx 5{,}9\cos(10t + 1{,}2)$ [V]
   (svara helst exakt)

Lösningar

1.

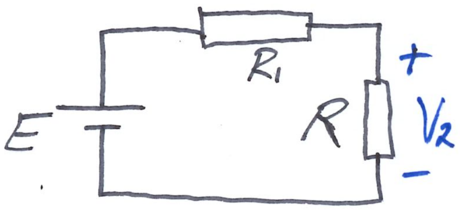


Inför spänningen V_2 över R_2.

Spänningsdelning av V_2 ger sökt spänning V:

$$V = V_2 \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} = V_2 \cdot \frac{3}{2+3} = \frac{3}{5} V_2 \qquad (1)$$

$V_2 = ?$ Förenkla kretsen:



R_2 är parallellkopplad med en seriekoppling av R_3 och R_4

$$\Rightarrow R = R_2 // (R_3+R_4) = \frac{R_2(R_3+R_4)}{R_2+(R_3+R_4)} = \frac{1\cdot(2+3)}{1+(2+3)} = \frac{5}{6}\,\Omega$$

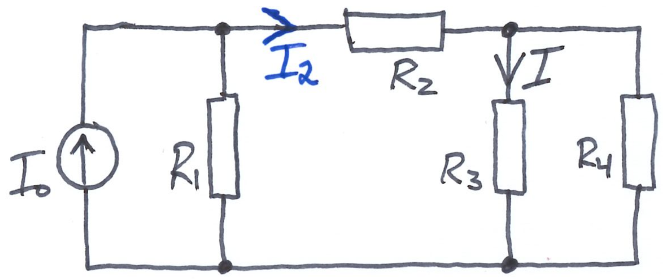
Spänningen V_2 över R_2 ligger även över R.

Spänningsdelning av E ger då

$$V_2 = E \cdot \frac{R}{R_1+R} = 21 \cdot \frac{5/6}{5+5/6} = 21 \cdot \frac{5}{35} = 3\,V \qquad (2)$$

$$(2) \text{ i } (1) \Rightarrow \underline{\underline{V}} = \frac{3}{5} \cdot 3 = \underline{\underline{\frac{9}{5} \text{ Volt}}}$$

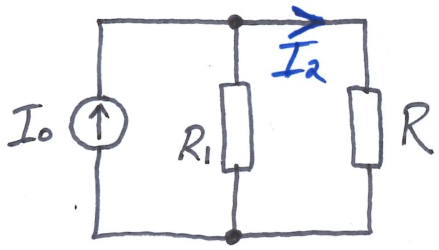
2.



Inför strömmen I_2 genom R_2.

Strömdelning av I_2 (genom R_3 och R_4) ger sökt ström I: $I = I_2 \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} = I_2 \cdot \frac{3}{1+3} = \frac{3}{4} I_2$ ①

$I_2 = ?$ Förenkla kretsen:



R är ekvivalent med R_2 i serie med parallellkopplingen av R_3 & R_4,

dvs. $R = R_2 + R_3 // R_4 = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$

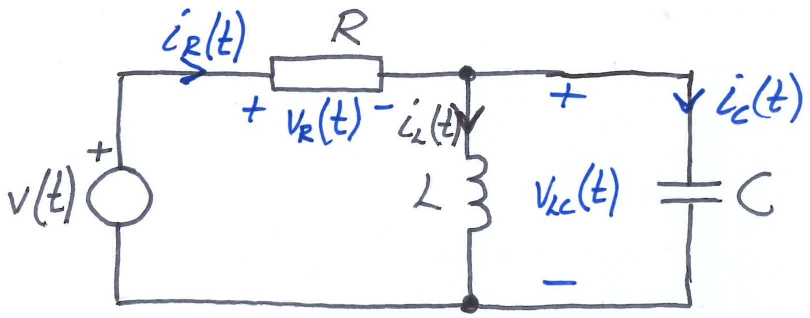
$= 1{,}25 + \frac{1 \cdot 3}{1+3} = 2\ \Omega$

Strömmen I_2 genom R_2 går även genom R.
Strömdelning av I_0 ger då

$$I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R} = 12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4}{4+2} = 8 \cdot 10^{-3}\ \text{A} \quad ②$$

② i ① $\Rightarrow \underline{I} = \frac{3}{4} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \underline{\underline{= 6\ \text{mA}}}$

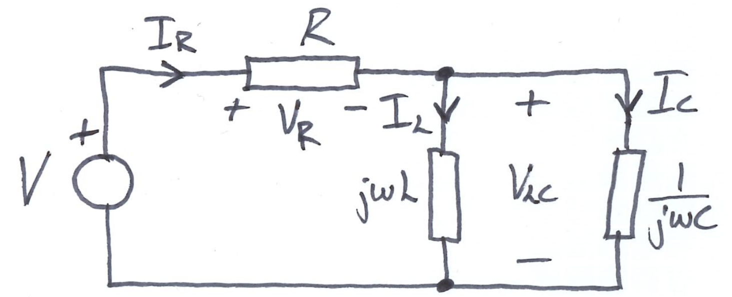
3.



$v(t) = \hat{V}\cos(\omega t)$, där $\omega = 2\cdot10^4$ rad/s
$L = 10$ mH, $C = 1\ \mu F$

Inför strömmarna $i_R(t)$ och $i_C(t)$ samt spänningarna $v_R(t)$ och $v_{LC}(t)$ enligt figuren ovan, så att strömmerna går in på "+"-sidan för R, L och C.

Motsvarande <u>komplexschema:</u>



I steg för steg nedan ritas visarna ut i ett visardiagram, dvs. för V_{LC}, I_L, I_C, I_R, V_R resp. V:

1) Sätt ut godtychlig riktning/fas för $V_{LC} = \hat{V}_{LC}\, e^{j\alpha}$

2) Rita rimlig $I_L = \dfrac{V_{LC}}{j\omega L} = \dfrac{\hat{V}_{LC}\cdot e^{j\alpha}}{j\,2\cdot10^4\cdot10^{-2}} = /j = e^{j\frac{\pi}{2}}/ = \dfrac{\hat{V}_{LC}}{200}\cdot e^{j(\alpha-\frac{\pi}{2})}$

3) Rita rimlig $I_C = \dfrac{V_{LC}}{1/j\omega C} = j2\cdot10^4\cdot10^{-6}\cdot\hat{V}_{LC}\, e^{j\alpha} \overset{\text{även}}{=} \dfrac{\hat{V}_{LC}}{50}\cdot e^{j(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

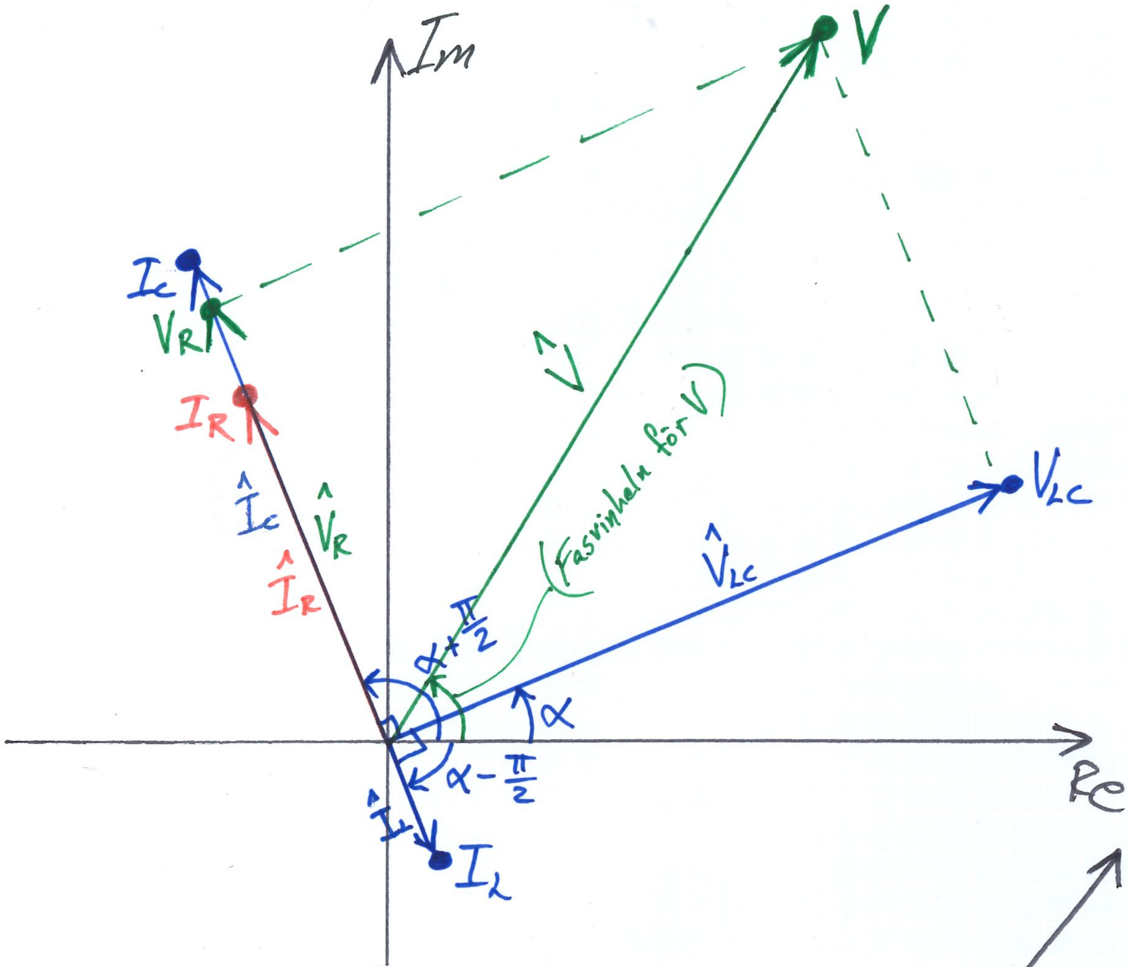
Notera att $\hat{I}_C = \dfrac{\hat{V}_{LC}}{50} = 4\cdot\hat{I}_L$, där $\hat{I}_L = \dfrac{\hat{V}_{LC}}{200}$ samt att strömvisarna därför är mycket kortare än V_{LC}-visaren. Här vises/rites doch bare de principielle rihtningerne, med $\hat{I}_C = 4\,\hat{I}_L$

4) Kirchhoffs strömlag $\Rightarrow$ $I_R = I_L + I_C$, vilket i visardiagrammet innebär att visarna för I_L och I_C adderas.

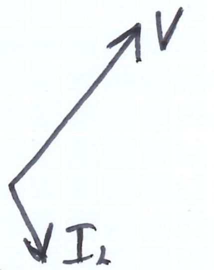
5) $V_R = R\cdot I_R$ $\Rightarrow$ V_R ligger i fas med I_R.

6) Kirchhoffs spänningslag $\Rightarrow$ $V = V_R + V_{LC}$, vilket innebär att visarne för V_R och V_{LC} i viserdiagrammet adderas (som vektoraddition) för att erhålla visaren för V.

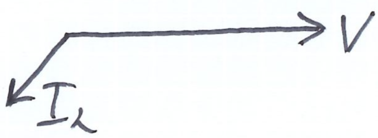
[Se viserdiagrammet på nästa sida]



Förhållandet mellan V och I_L ovan är

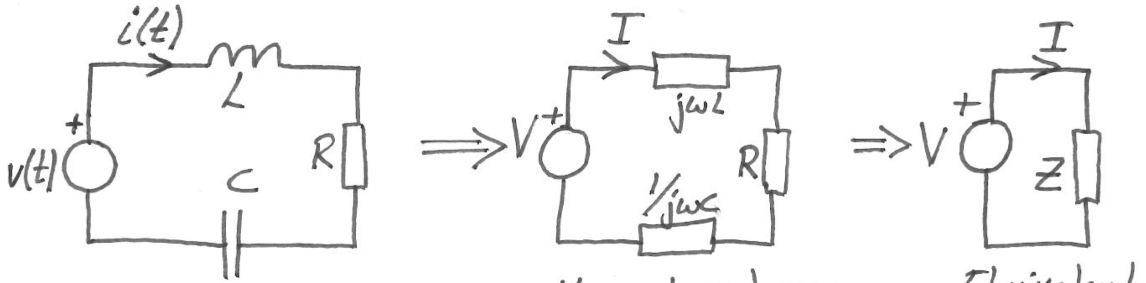


Eftersom $v(t)=\hat{V}\cos(\omega t)$ så är $V=\hat{V}\cdot e^{j0}$,
dvs. fasen är noll, vilket innebär att det korrekta visardiagrammet erhålls genom att vrida alla visare så att V-visaren har fas noll =>



=> Förhållande a) är korrekt!

4.



Komplexschema   Ekvivalent krets

$$i(t) = \hat{I}\cdot\cos(\omega t + \alpha) \Rightarrow I = \hat{I}\,e^{j\alpha}$$

där Ohms lag ger $I = \dfrac{V}{Z}$ i den tredje kretsen

Seriekoppling ger $\underline{\underline{Z}} = j\omega L + R + \dfrac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)$

$$= \Big/ R = 20\,\Omega,\ L = \tfrac{1}{5}\,H,\ C = 10^{-3}F,\ \omega = 200 \text{ rad/s} \Big/ = 20 + j\left(\frac{200}{5} - \frac{1000}{200}\right)$$

$$= 20 + j\,35 = \sqrt{20^2 + 35^2}\cdot e^{j\arctan\frac{35}{20}} = \Big/ 20^2 + 35^2 = 5^2(4^2 + 7^2) \Big/$$

$$= \underline{5\sqrt{65}\cdot e^{j\arctan\frac{7}{4}}\ [\Omega]}$$

$$v(t) = 25\cdot\sin\left(200t + \frac{\pi}{4}\right) = 25\cdot\cos\left(200t + \underbrace{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}}_{= -\frac{\pi}{4}}\right) \text{ volt}$$

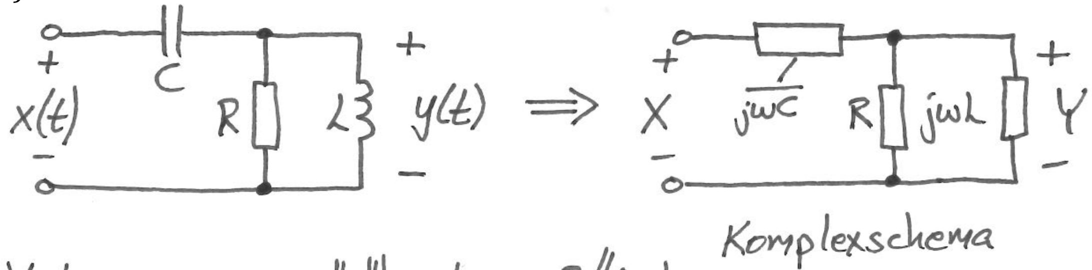
$$\Rightarrow \underline{V = 25\cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \text{ volt}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{Z} = \frac{25\cdot e^{-j\pi/4}}{5\sqrt{65}\cdot e^{j\arctan\frac{7}{4}}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{65}}\cdot e^{j\left(-\frac{\pi}{4} - \arctan\frac{7}{4}\right)} \quad [A]$$

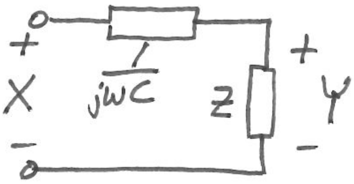
$$\Rightarrow \underline{\underline{i(t) = \frac{5}{\sqrt{65}}\cos\left(200t - \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{7}{4}\right)\ [A]}}$$

5. a)



Y ligger över parallellkopplingen $R /\!/ j\omega L$

$\Rightarrow$ Ekvivalent krets är



$$Z = R /\!/ j\omega L = \frac{R \cdot j\omega L}{R + j\omega L}$$

$$= \Big/ \begin{matrix} R = 5\,\Omega \\ L = \frac{1}{10}\,F \end{matrix} \Big/ = \frac{j\,0{,}5\,\omega}{5 + j\frac{\omega}{10}} = \frac{j5\omega}{50 + j\omega}$$

Spänningsdelning $\Rightarrow$

$$Y = X \cdot \frac{Z}{\frac{1}{j\omega C} + Z} = X \cdot \frac{\frac{j5\omega}{50 + j\omega}}{\frac{5}{j\omega} + \frac{j5\omega}{50 + j\omega}}$$

$$= X \cdot \frac{j\omega \cdot j5\omega}{5(50 + j\omega) + j\omega \cdot j5\omega} = X \cdot \frac{-5\omega^2}{250 - 5\omega^2 + j5\omega} = X \frac{\omega^2}{\omega^2 - 50 - j\omega}$$

Svar: $\underline{\underline{Y = X \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - 50 - j\omega}}}$

b)

$\omega = 10$ rad/s , dvs. $x(t) = 3\cos(10t + \frac{\pi}{3})$ [V]

$$\Rightarrow X = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \text{ [V]}$$

$$\Rightarrow Y = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{10^2}{10^2 - 50 - j10} = 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{10}{5 - j}$$

$$= 3 \cdot e^{j\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5^2 + 1^2}\, e^{j \arctan\frac{-1}{5}}} = \underbrace{\frac{30}{\sqrt{26}}}_{=\hat{Y}} e^{\overbrace{j\left(\frac{\pi}{3} + \arctan\frac{1}{5}\right)}} \text{ [V]}$$

$$= \varphi$$

Dvs, $\underline{y(t)} = \hat{Y}\cos(\omega t + \varphi) = \underline{\underline{\frac{30}{\sqrt{26}} \cdot \cos\left(10t + \frac{\pi}{3} + \arctan\frac{1}{5}\right) \text{ [V]}}}$