Svar & lösningar till tentamen i TSBB32 Linjära system, 2022-06-03

Fråga	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a)			X				X		
b)	X			X					
c)		X				X			
d)					X			X	

→ Se kommentar om uppg. 9 sist i dokumentet.

(1) • $y(t) = x(5t) \Rightarrow y_n(t) = x_n(5t)$ $(\star)$

Låt $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(t) = a \cdot x_1(5t) + b \cdot x_2(5t) \overset{(\star)}{=} a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

$\Rightarrow$ Systemet är linjärt

• Låt $\tilde{x}(t) = x(t-T)$ $(\bullet)$

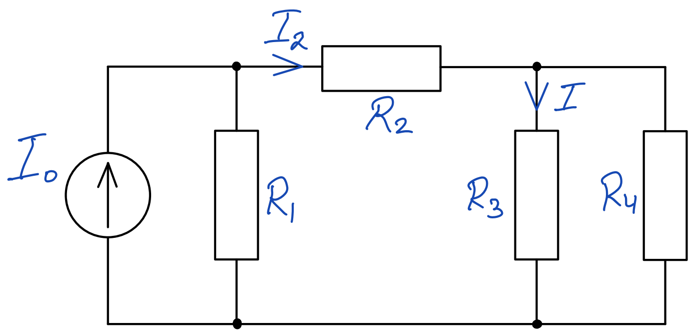
$\Rightarrow \tilde{y}(t) = \tilde{x}(5t) \overset{(\bullet)}{=} x(5t-T) = x(5(t-\frac{T}{5})) = y(t-\frac{T}{5})$

$\neq y(t-T) \Rightarrow$ Systemet är tidsvariabelt

Dvs. linjärt & tidsvariabelt system $\Rightarrow$ Alternativ b

---

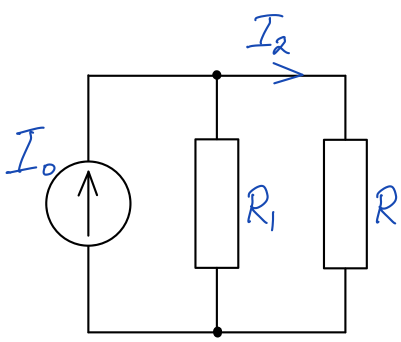
(2) (Detta är en av de förberedande uppgifterna inför TRP-lektion 1)



Strömdelning:

$I = I_2 \cdot \frac{R_4}{R_3+R_4} = \frac{3}{4} I_2$

$I_2 = ?$



Strömdelning: $I_2 = I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1+R}$

där $R = R_2 + R_3 // R_4 = R_2 + \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3+R_4} = 2\,\Omega$

$\Rightarrow I = \frac{3}{4} \cdot 12 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4}{4+2} = 6 \text{ mA}$

$\Rightarrow$ Alternativ c

③ $\mathcal{L}_I\left\{ \frac{d^2 y_{zi}(t)}{dt^2} + 2\frac{dy_{zi}(t)}{dt} + 4y_{zi}(t)\right\} = 0 \quad \overset{\text{Formels. Tab 4:10}}{\Longrightarrow}$

$$\Rightarrow \left[s^2 Y_{zi}(s) - s\cdot \underbrace{y(0-)}_{=3} - \underbrace{y'(0-)}_{=-3}\right] + 2\left[s\,Y_{zi}(s) - \underbrace{y(0-)}_{=3}\right] + 4Y_{zi}(s) = 0$$

$$\Rightarrow \big(\underbrace{s^2+2s+4}_{=(s+1)^2+3}\big)Y_{zi}(s) = 3s+3 \quad \Rightarrow \quad Y_{zi}(s) = 3\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+(\sqrt{3})^2}$$

För konvergensområde $Re\{s\} > -1$ erhålls $y_{zi}(t) = (\ldots)\cdot u(t)$ enligt de givna svarsalternativen. Tabell 5:20 ger då $y_{zi}(t)$ enligt alternativ a

---

④ $$X(t) = \frac{4}{4t^2+1} = \frac{1}{t^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \overset{\text{Formels. Tab. 3:16}}{\Longrightarrow} \quad X(\omega) = 2\pi\cdot e^{-\frac{|\omega|}{2}}$$

Idealt LP-filter $\Rightarrow$ $Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega); & |\omega| \le \omega_p = 3 \text{ rad/s} \\ 0; & |\omega| > 3 \text{ rad/s}\end{cases}$

Parsevals formel, formels. sid. 5

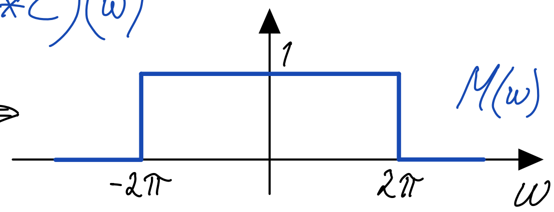
$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-3}^{3} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^3 (2\pi)^2\cdot e^{-\frac{\omega}{2}\cdot 2}\,d\omega = 4\pi\int_0^3 e^{-\omega}d\omega = 4\pi\left[\frac{e^{-\omega}}{-1}\right]_0^3 =$$

$$= 4\pi(1-e^{-3}) \approx 4\pi\cdot 0{,}95 \Rightarrow \text{Alternativ b}$$

5 $\quad s(t) = m(t)\cdot c(t) \;\Rightarrow\; S(\omega) = \frac{1}{2\pi}\big(M * C\big)(\omega)$

$m(t) = 2\cdot \mathrm{sinc}_N(2t)$ Formels. Tab. 3:13 $\Longrightarrow$



$c(t) = \sin(3\pi t)$ Formels. Tab. 3:23 $\Rightarrow$ $C(\omega) = j\pi\big(\delta(\omega+3\pi) - \delta(\omega-3\pi)\big)$

$$\Rightarrow \underline{S(\omega)} = \frac{1}{2\cancel{\pi}}\cdot j\cancel{\pi}\Big(M(\omega) * \delta(\omega+3\pi) - M(\omega) * \delta(\omega-3\pi)\Big)$$

$$= \Big/ M(\omega) * \delta(\omega \pm 3\pi) = \int_{-\infty}^{\infty} M(\omega-\lambda)\,\delta(\lambda \pm 3\pi)\,d\lambda = M(\omega-\lambda)\Big|_{\lambda = \mp 3\pi} \Big/$$

$$= \underline{j\frac{1}{2}\Big(M(\omega+3\pi) - M(\omega-3\pi)\Big)} \;\Longrightarrow\; \text{Alternativ } d$$

---

6 $\quad \mathcal{L}_{II}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 37\,y(t)\right\} = \mathcal{L}_{II}\left\{2\frac{dx(t)}{dt}\right\}$

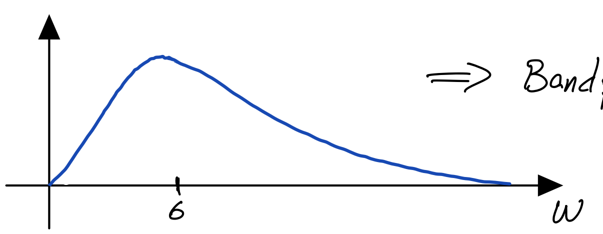
Formels. Tab. 4:10 $\Rightarrow$ $\underbrace{(s^2+2s+37)}_{=(s+1)^2+36}\,Y_{zs}(s) = 2s\,X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{2s}{(s+1)^2+6^2}$$

Antag stabilt system $\Rightarrow$ Konv.omr. $\mathrm{Re}\{s\} > -1 \Rightarrow H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$

- (Enkel-)nollställe i $s=0$ $\Rightarrow$ $|H(\omega=0)| = 0$
- Fler poler än nollställen $\Rightarrow$ $\lim_{\omega\to\infty} |H(\omega)| = 0$
- Pol i $s = -1+j6$ $\Rightarrow$ $|H(\omega)|$ bör ha ett lokalt max nära $\omega = 6$ rad/s.

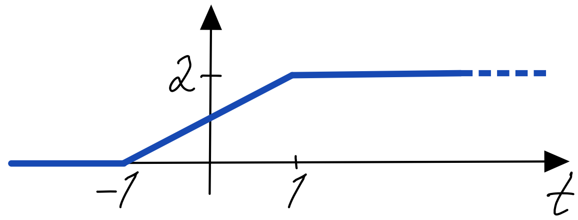
Dvs. $|H(\omega)|$ har följande principutseende:



$\Longrightarrow$ Bandpassfilter $\Longrightarrow$ Alternativ c

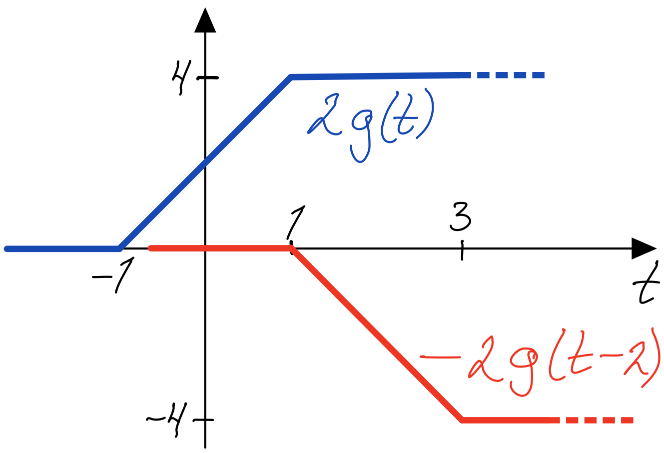
7 Om $x(t) = u(t)$

$\Rightarrow$ $y(t) = g(t)$ enligt uppgift:

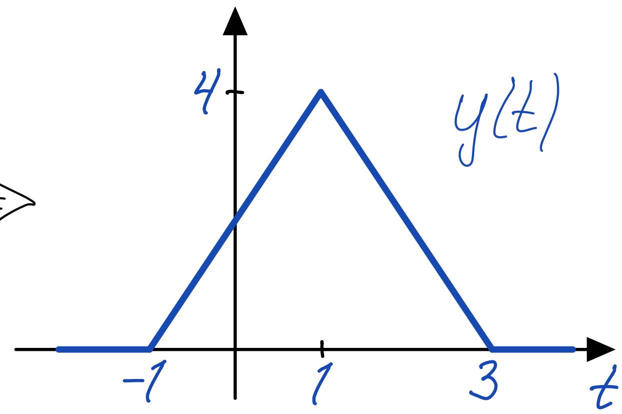


Uppgiften: $x(t) = 2(u(t) - u(t-2)) = 2u(t) - 2u(t-2)$

LTI-system $\Rightarrow$ $y(t) = 2g(t) - 2g(t-2)$



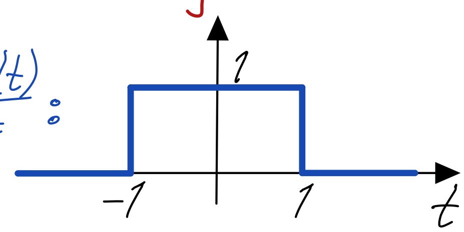
$\Rightarrow$



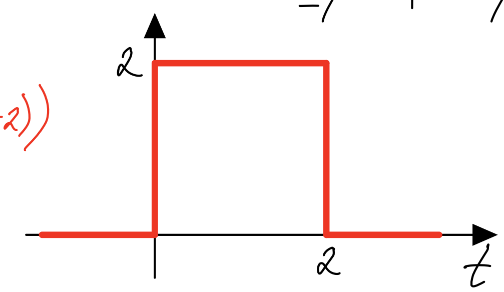
$\Rightarrow$ Alternativ a

Alternativt kan man beräkna utsignalen med faltning:

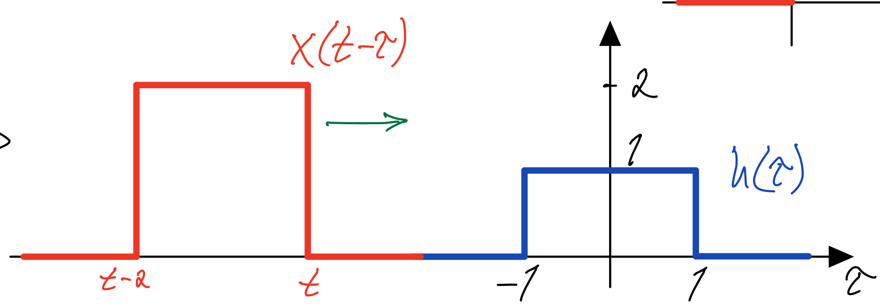
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau, \quad \text{där } h(t) = \frac{dg(t)}{dt}:$$



och $x(t) = 2(u(t) - u(t-2))$



$\Rightarrow$

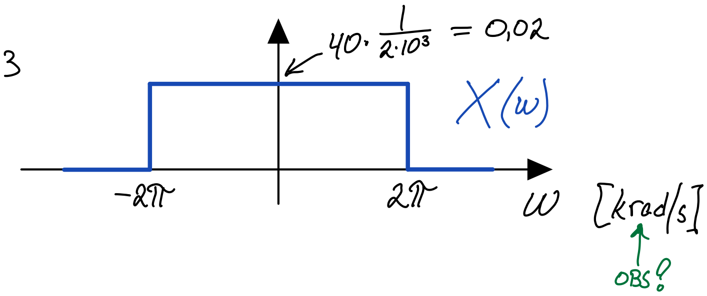


Utgående från utseendet på $x(t-\tau)$ och $h(\tau)$ kan man, utan att utföra några beräkningar, motivera att $y(t)$ ser ut som alternativ a

(8)

Kaskadkopplade system $\Rightarrow$ $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H_B(\omega) \cdot H_{BP}(\omega)$

- $x(t) = 40 \cdot \text{sinc}_N(2 \cdot 10^3 t)$ $\xRightarrow{\text{Tab. 3:13}}$



- Formels. sid. 13, med $N = 1$ och $\omega_p = \omega_{3dB} = \pi$ krad/s

$$\Rightarrow \quad |H_B(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\pi \cdot 10^3}\right)^2}}$$

- $H_{BP}(\omega) = \begin{cases} 1; & \pi < |\omega| < 3\pi \text{ krad/s} \\ 0; & \text{f.ö.} \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad |Y(2\pi \cdot 10^3)| = |X(2\pi \cdot 10^3)| \cdot |H_B(2\pi \cdot 10^3)| \cdot |H_{BP}(2\pi \cdot 10^3)|$$

$$= 0{,}02 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{2\pi \cdot 10^3}{\pi \cdot 10^3}\right)^2}_{=2^2}}} \cdot 1 = \frac{1}{50\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow$ Alternativ d

---

(9)

Jag råkade tyvärr ange fel systemfunktion för återkopplingssystemet H_2, vilket resulterade i en för svår uppgift.

Som jag meddelade alla er som skrev tentan, så får därför alla som tenterade 2 poäng på uppgiften, oavsett om man lämnade in någon lösning eller ej. De som redan erhållit 4 poäng får behålla de poängen.