Svar & lösningar till tentamen i TSBB32 Linjära system, 2022-08-18

Fråga	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a)					X		X		
b)		X							X
c)	X		X			X		X	
d)				X					

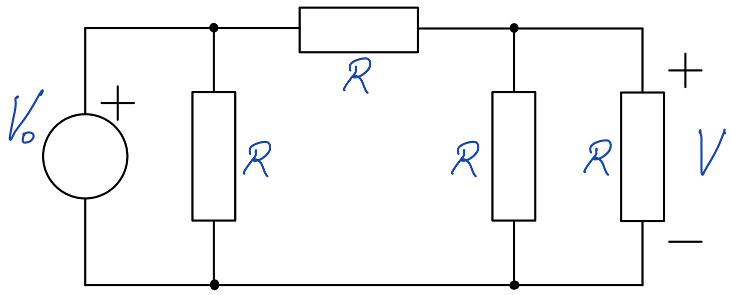
1

- $y(t) = x(5t)$ $\Rightarrow$ T.ex. $y(2) = x(10)$, dvs. utsignalen vid en viss tidpunkt (alla tider $t>0$) beror på ett framtida värde hos insignalen $\Rightarrow$ Systemet är icke-kausalt.

- $y(t) = x(5t)$ $\Rightarrow$ $|y(t)|_{max} = |x(t)|_{max}$ $\Rightarrow$ En begränsad insignal för alla t ger upphov till en begränsad utsignal för alla t $\Rightarrow$ Systemet är stabilt

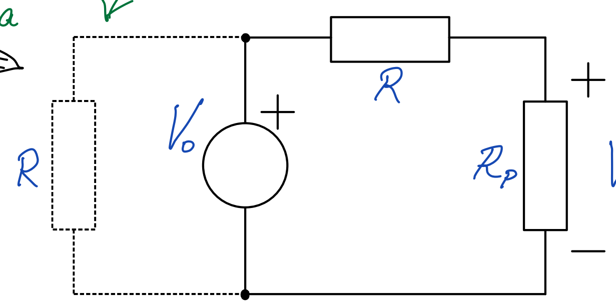
Icke-kausalt & stabilt system $\Rightarrow$ Alternativ c

2



Omforma

Påverkar inte V.



$$R_p = R /\!/ R = \frac{R \cdot R}{R+R} = \frac{R}{2} = 2\,\Omega \qquad \begin{pmatrix} V_0 = 12 \text{ volt} \\ R = 4\,\Omega \end{pmatrix}$$

Spänningsdelning:

$$V = V_0 \cdot \frac{R_p}{R+R_p} = 12 \cdot \frac{2}{4+2} = 4 \text{ volt} \quad \Rightarrow \text{Alternativ } b$$

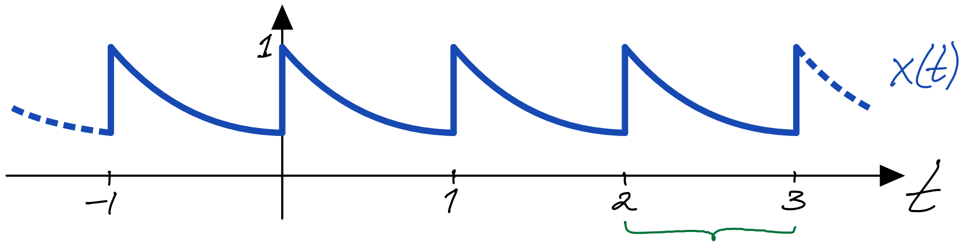
(3) För ett stabilt LTI-system gäller att systemfunktionen har minst lika många poler som nollställen.
Systemfunktionen $H(s) = \frac{s^2}{s+2}$ i påstående c) har doch färre poler (1st) än nollställen (2st), dvs. påstående c är *inte* korrekt.

(Anm: Eftersom systemet är kausalt, så är konvergensområdet för $H(s)$ till höger om polen i $s=-2$, dvs. $j\omega$-axeln verkar ligga i konvergensområdet. Doch ligger inte oändligheten i konvergensområdet, så därför ingår inte *hela* $j\omega$-axeln. I ~~detta~~ fall är systemet marginellt stabilt.)

---

(4) Systemfunktionen till lågpassfilter och högpassfilter av butterworthtyp, av ordning N och med 3dB-gränsvinkelfrekvens ω_{3dB} har N poler längs en halvcirkel med radien ω_{3dB} i vänster halvplan.
Högpassfiltret har även N nollställen i origo.
Här är $N=4$ och $\omega_{3dB} = 2\pi \cdot f_{3dB} = / f_{3dB} = 10 \text{ Hz} / = 20\pi$ rad/s
$\Rightarrow$ Pol-nollställediagram d är korrekt.

5



$$x(t) = \begin{cases} e^{-t}; & 0 \leq t < 1 \\ x(t+1); & \forall t \end{cases}$$

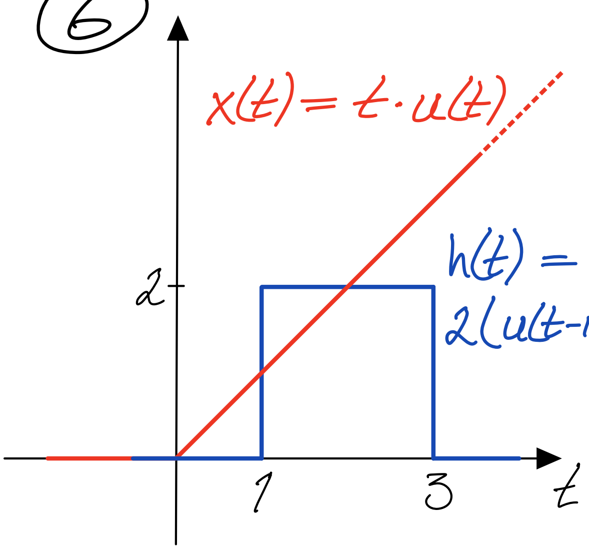
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ rad/s} \Leftarrow T_0 = 1 \text{ sek}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-t}\cdot e^{-jn2\pi t}\,dt = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi n)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(1+j2\pi n)t}}{-(1+j2\pi n)}\right]_0^1 = \frac{e^{-1}\cdot e^{-j2\pi n} - e^0}{-(1+j2\pi n)} = \Big/ e^{-j2\pi n} = (e^{-j2\pi})^n = 1^n = 1 \Big/ = \frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi n}$$

$\Longrightarrow$ Alternativ a

6

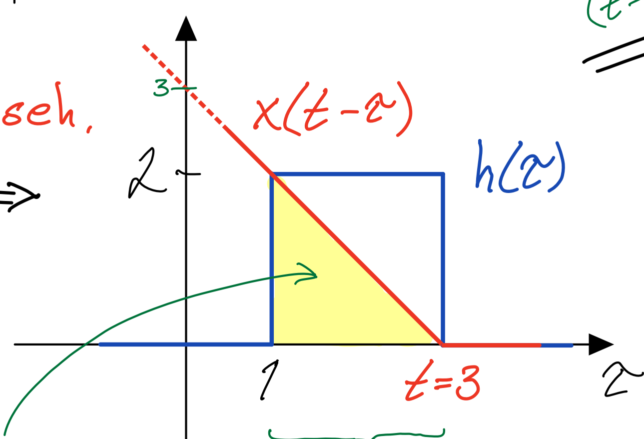


Energifritt LTI-system $\Longrightarrow$

$$y(t) = y_{zs}(t) = (x * h)(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

$t=3$ sek. $\Longrightarrow$



$$\int_1^3 (3-\tau)\,d\tau = \text{den gula arean} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$$

$\underbrace{\qquad}$ Överlapp för $1 \leq \tau \leq 3$ sek

$(t=3) \Longrightarrow$

$$y(3) = \int_1^3 x(3-\tau)\,h(\tau)\,d\tau$$

$$= \int_1^3 (3-\tau)\cdot 2\,d\tau$$

$$= 2\left[3\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_1^3$$

$$= 2\left(9 - \frac{9}{2} - \left(3 - \frac{1}{2}\right)\right) = 4$$

$\Longrightarrow$ Alternativ c

(7) Stabilt LTI-system, $x(t) = 3 + 5\cos(t)$ $\quad \omega_0 = 1$ rad/s

$$\Rightarrow \quad y(t) = 3\,H(0) + 5\,|H(1)|\cos(t + \arg H(1))$$

där
$$H(\omega) = \frac{(j\omega)^3 - \omega^2 + j2\omega + 4}{(3+j\omega)(2+j\omega)^2}$$

- $$H(0) = \frac{0+4}{(3+0)(2+0)^2} = \frac{4}{3\cdot 2^2} = \frac{1}{3}$$

- $$H(1) = \frac{\overbrace{j^3}^{=-j} - 1^2 + j2 + 4}{(3+j)(2+j)^2} = \frac{\cancel{3+j}}{\cancel{(3+j)}(2+j)^2}$$

$$= \frac{1}{(2+j)^2} = \frac{1}{3+4j} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{\sqrt{25}=5}\cdot e^{j\arctan(4/3)}}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot e^{-j\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad |H(1)| = \frac{1}{5}, \quad \arg H(1) = -\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underbrace{3\cdot\frac{1}{3}}_{=1} + \underbrace{5\cdot\frac{1}{5}}_{=1}\cos\left(t - \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

$\Rightarrow$ Alternativ a

8 $g(t) = (u * h)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$, där $G(s) = U(s) \cdot H(s)$,

där $U(s) = \frac{1}{s}$ (formels. Tab. 5:3) och $H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)}$

$$H(s): \quad \mathcal{L}_{II}\left\{\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = \mathcal{L}_{II}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\}$$

Formelsamlingens Tab. 4:10 $\Rightarrow$ $(s^2+3s+2)Y_{zs}(s) = s \cdot X(s)$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2+3s+2} = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{\cancel{s}}{(s+1)(s+2)} = /\text{P.B.U.}/ = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

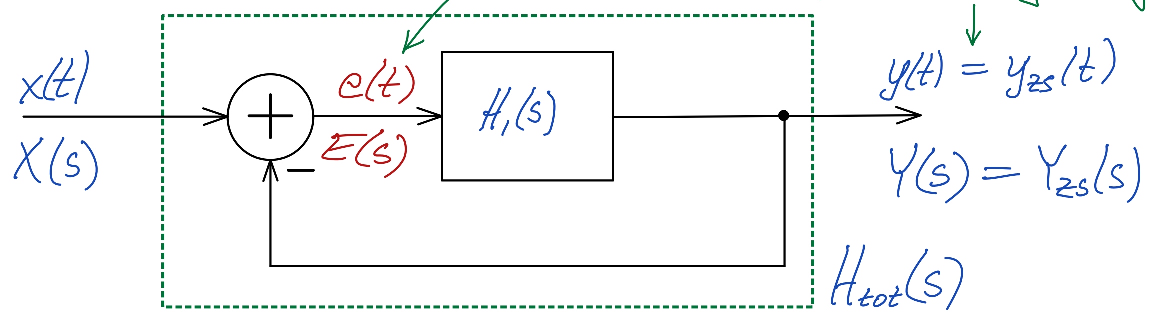
Konv.omr. $Re\{s\} > -1$ resp. $Re\{s\} > -2$
ty kausalt system, dvs. högersidigt konv.omr.

Formels. Tab. 5:11 $\Rightarrow$ $g(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

$\Longrightarrow$ Alternativ C

9 Inför hjälpvariabel $e(t)$

Betrakta energifritt system H_1.



$$Y_{zs}(s) = E(s)\cdot H_1(s) \quad \text{där} \quad E(s) = X(s) - Y_{zs}(s) \quad \Rightarrow$$

$$H_{tot}(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)} = \frac{\frac{K}{s^2+2s}}{1 + \frac{K}{s^2+2s}} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

$\Rightarrow$ Systemfunktionens poler finns där $s^2 + 2s + K = 0$,
dvs. i $s = -1 \pm \sqrt{1-K}$

System H_1 är kausalt $\Rightarrow$ det totala återkopplade systemet är också kausalt $\Rightarrow$ Konvergensområdet för $H_{tot}(s)$ är högersidigt.
Det totala systemet är därför stabilt om $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för $H_{tot}(s)$, dvs. om båda polerna hos $H_{tot}(s)$ ligger i vänstra halvplanet (eftersom konvergensområdet är till höger om den "högraste" polen).

* $K = -3 \Rightarrow$ Polerna finns i $s = -1 \pm \underbrace{\sqrt{1-(-3)}}_{=2}$,
  dvs. i $s = -3$ och $s = 1$ $\Rightarrow$ Systemet är instabilt.

* $K = 2 \Rightarrow$ Polerna finns i $s = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm j$
  $\Rightarrow$ Systemet är stabilt

Följaktligen är alternativ b korrekt.