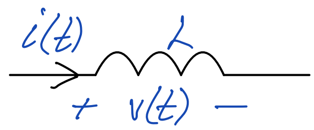
Svar & lösningar till tentamen i TSBB32 Linjära system, 2023-06-02

	Del 1				Del 2				
Fråga	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a)							X	X	
b)	X				X				
c)		X		X					
d)			X			X			X

1

Motivera antingen genom att motbevisa de tre felaktiga påståendena eller genom att bevisa det korrekta påståendet:

Påstående b:



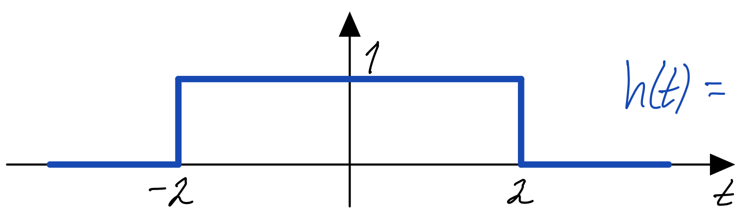
$i(t) = I_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha) \overset{\text{Komplex repr.}}{\Longleftrightarrow} I = I_0 \cdot e^{j\alpha}$

$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow V = j\omega_0 L \cdot I \overset{j = e^{j\frac{\pi}{2}}}{=} \omega_0 L I_0 \cdot e^{j(\alpha + \frac{\pi}{2})} = V_0 \cdot e^{j\varphi}$

$\Rightarrow v(t) = \omega_0 L I_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow$ Påstående b är korrekt.

2

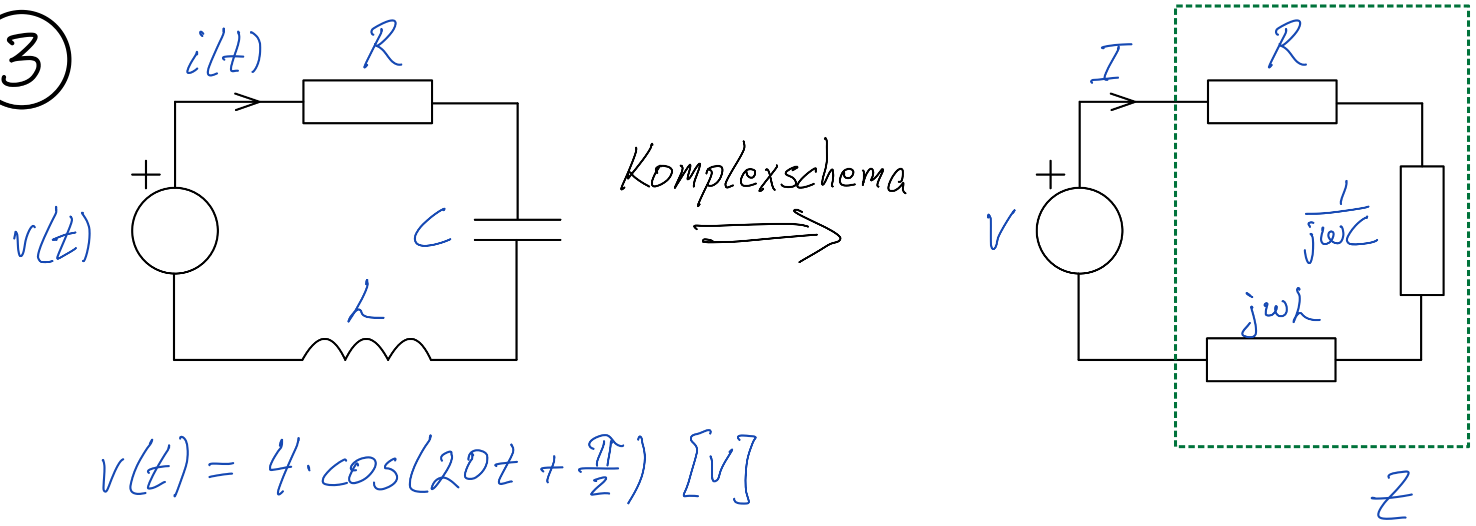


$h(t) = u(t+2) - u(t-2)$

- $h(t) \neq 0$ för $t < 0$ $\Rightarrow$ Systemet är icke-kausalt.
- $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt = \int_{-2}^{2} 1\,dt = 4 < \infty$ $\Rightarrow$ Systemet är stabilt

$\Rightarrow$ Alternativ c

3



$$v(t) = 4\cdot\cos\left(20t+\tfrac{\pi}{2}\right)\ [V]$$

$\Rightarrow V = 4\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$ [V]. Ohms lag $\Rightarrow I = \frac{V}{Z}$

där $Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} =$ / $R = 4\,\Omega,\ L = \frac{1}{4}\,H,\ C = 50\cdot 10^{-3}\,F,\ \omega = 20$ rad/s /

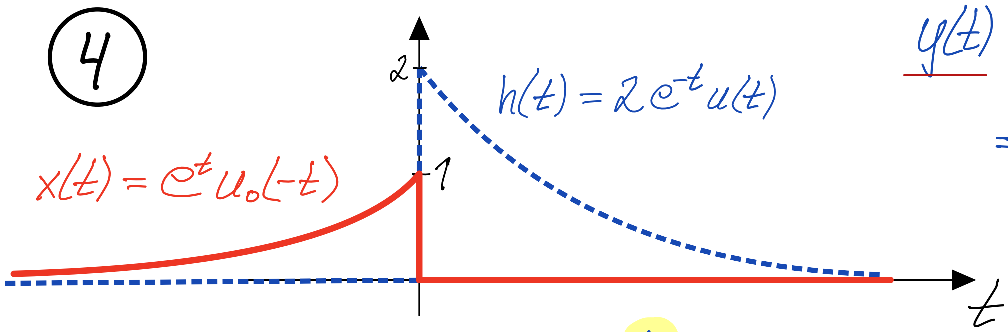
$$= 4 + j\left(\frac{20}{4} - \frac{10^3}{20\cdot 50}\right) = 4(1+j) = 4\sqrt{2}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{V}{Z} = \frac{4\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}}{4\sqrt{2}\cdot e^{j\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \quad \left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\left(20t+\frac{\pi}{4}\right)$ [A] $\Rightarrow$ Alternativ d

---

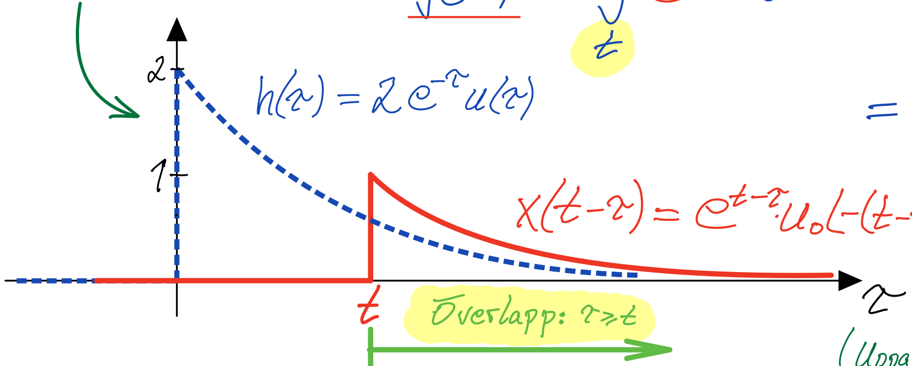
4



$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

$t \geq 0 \Rightarrow$

$$y(t) = \int_{t}^{\infty} e^{t-\tau}\cdot 2e^{-\tau}\,d\tau = 2e^{t}\left[\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right]_{t}^{\infty} = -e^{t}\left(0 - e^{-2t}\right) = e^{-t}$$

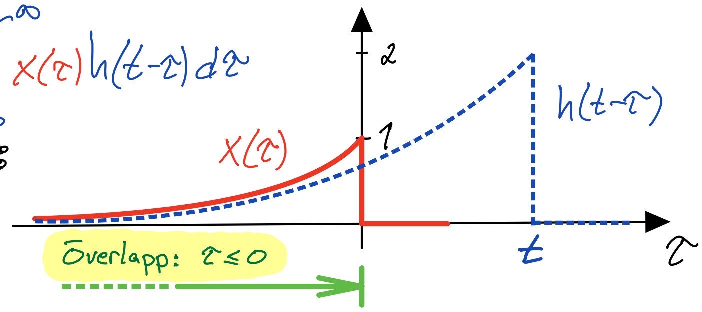


$\Rightarrow$ Alternativ c

(Uppgiften är en del av Lektionsuppgift 2.2a av Lasses uppgifter)

Alternativ lösning – beräkna $y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$

för $t \geq 0$ $\Rightarrow$ Se grafen till höger:



$$\Rightarrow \quad y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau} \cdot 2 e^{-(t-\tau)}\, d\tau =$$

$$= 2e^{-t} \int_{-\infty}^{0} e^{2\tau} d\tau = 2e^{-t} \left[\frac{e^{2\tau}}{2} \right]_{-\infty}^{0} = e^{-t}(e^{0} - 0) = e^{-t}$$

$\Rightarrow$ Alternativ c

---

5. Som jag nämnde vid tentaronden, så behövs ingen motivering av svaret på denna uppgift.
Motiveringen/beviset skulle bli för lång(t) för bara 2 poäng.
Påstående b är korrekt – se kursmaterialet.

6.
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Laplacetransformera differentialekvationen!
(Vi får bara fouriertransformera den om systemet är stabilt)

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_{II}\left\{ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4y(t) \right\} = \mathcal{L}_{II}\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\}$$

$$\Rightarrow \quad (s^2 - 4) Y_{zs}(s) = s \cdot X(s) \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^2 - 4}$$

$\Rightarrow$ $H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ om $j\omega$-axeln ingår i konvergensområdet för $H(s)$, dvs. om systemet är stabilt.

$H(s)$ har poler där $s^2 - 4 = 0$, dvs. i $s = -2$ och $s = 2$.
Systemet är kausalt, enligt uppgiften. $\Rightarrow$

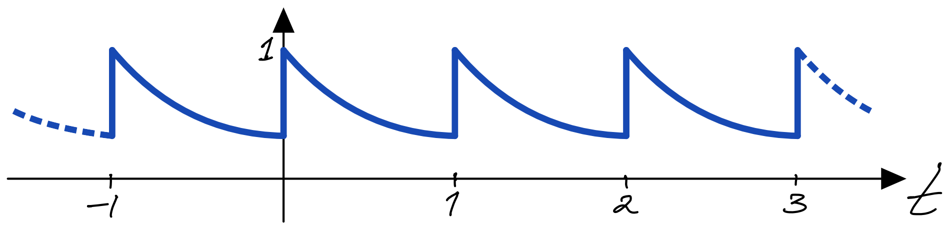
$\Rightarrow$ Konvergensområdet är högersidigt; $Re\{s\} > 2$

$\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ingår inte i konvergensområdet

$\Rightarrow$ $H(\omega)$ existerar inte $\Rightarrow$ Alternativ d

7

(Uppgiften är inledningen av lektionsuppgift 2.5a i Lasses extra uppgifter)



$$x(t)=\begin{cases} e^{-t}; & 0\le t<1 \\ x(t+1); & \forall t \end{cases}$$

Periodtid, enligt figur: $T_0 = 1$ sek.

Signalens komplexa fourierseriekoefficienter är

$$\underline{D_n} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \Big/ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi \text{ rad/s} \Big/ = \frac{1}{1}\int_0^1 e^{-t}\cdot e^{-jn2\pi t}\,dt = \int_0^1 e^{-(1+j2\pi n)t}\,dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(1+j2\pi n)t}}{-(1+j2\pi n)}\right]_0^1 = \frac{e^{-1}\cdot e^{-j2\pi n} - e^0}{-(1+j2\pi n)} = \Big/ e^{-j2\pi n} = (e^{j2\pi})^n = 1^n = 1 \Big/ = \underline{\frac{1-e^{-1}}{1+j2\pi n}}$$

$\Rightarrow$ Alternativ a

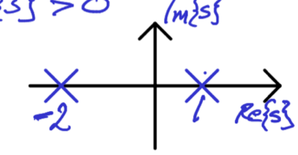
8

$$g(t) = (u*h)(t) \Rightarrow \underline{G(s)} = U(s)\cdot H(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{3}{2-s-s^2}$$

$$= \frac{-3}{s(s+2)(s-1)} = \big/\text{P.B.U.}\big/ = \underline{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s-1}}$$

Konvergensområde för de tre termerna?

- $\frac{1}{s}$: kommer från $\mathcal{L}\{u(t)\}$, som har konv.omr. $Re\{s\}>0$
- $\frac{1}{s+2}$ & $\frac{1}{s-1}$ kommer från $H(s) = \frac{-3}{(s+2)(s-1)}$;



Stabilt system, enligt uppgift $\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konv.omr. för $H(s)$

$\Rightarrow$ Konvergensområdet är $-2<Re\{s\}<1$

$\Rightarrow$ Termerna $\frac{1}{s+2}$ & $\frac{1}{s-1}$ har konv.omr. $Re\{s\}>-2$ resp. $Re\{s\}<1$

Formelsaml. Tab 5:3, 5:11 resp. 5:14 $\Rightarrow$

$\underline{g(t) = \frac{3}{2}u(t) - \frac{1}{2}e^{-2t}u(t) + e^{t}u(-t)}$ $\Rightarrow$ Alternativ a

(9)

$H(s)$ har $\begin{cases} \text{nivåkonstant } K \\ \text{två nollställen i } s = \pm j3 \\ \text{två poler i } s = -2 \pm j \end{cases}$

$\Rightarrow H(s) = K \cdot \dfrac{s^2 + 3^2}{(s+2)^2 + 1^2} = \dfrac{K(s^2+9)}{s^2+4s+5}$. Kausalt system enligt uppgift

$\Rightarrow$ Konv.området för $H(s)$ är $\mathrm{Re}\{s\} > -2$

$\Rightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konv.området för $H(s)$ $\Rightarrow$ Stabilt system (dvs. $H(\omega)$ $\exists$)

För insignalen $x(t) = \cos(t)$ (med vinkelfr. $\omega = 1$ rad/s)

till detta stabila system erhålls utsignalen $y(t) = |H(1)| \cdot \cos(t + \varphi)$,

där, enligt uppgift, $|H(1)| = 2$.

$$|H(\omega=1)| = |H(s=j)| = \left| \frac{K \cdot (j^2+9)}{j^2 + j4 + 5} \right| \overset{j^2=-1}{=} \left| \frac{8K}{4+j4} \right| = \left| \frac{2K}{1+j} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} |K| \overset{\text{Enligt uppgift}}{=} 2$$

$\Rightarrow |K| = \sqrt{2}$ (K är vanligen positiv) $\Rightarrow$ Alternativ d