

Del 1				
Fråga	1	2	3	4
a)		×	×	
b)				
c)	×			×
d)				

Del 2				
5	6	7	8	9
	×	×	×	
×				×

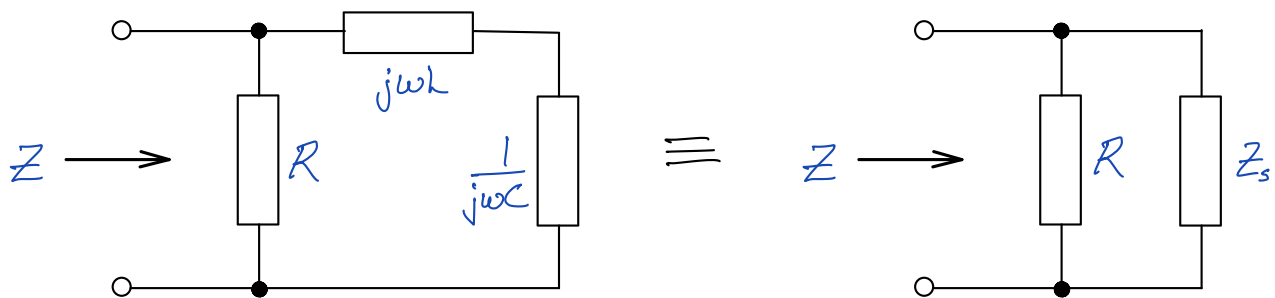
DEL 1:

① Alternativ **c** är felaktigt:

Både $\delta(t-\tau)$ och $\delta(\tau-t)$ har en diracimpuls vid $\tau=t$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} \delta(\tau-t) d\tau \neq \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} \delta(\tau-t) d\tau.$$

② Komplexschema:



$$Z = R // Z_s = \frac{R \cdot Z_s}{R + Z_s}$$

$R=10 \Omega, L=0,5H,$
 $C=0,8 mF, \omega=50 rad/s$

↓

$$\text{där } Z_s = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = j(25 - 25) = 0 \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{Z = 0 \Omega} \Rightarrow \text{Alternativ } \mathbf{a}$$

③ Låt insignalen $x_n(t)$ ge upphov till utsignalen $y_n(t)$
 $\Rightarrow \frac{d^2 y_n(t)}{dt^2} + At \cdot y_n(t) = x_n(t) \quad (\star)$

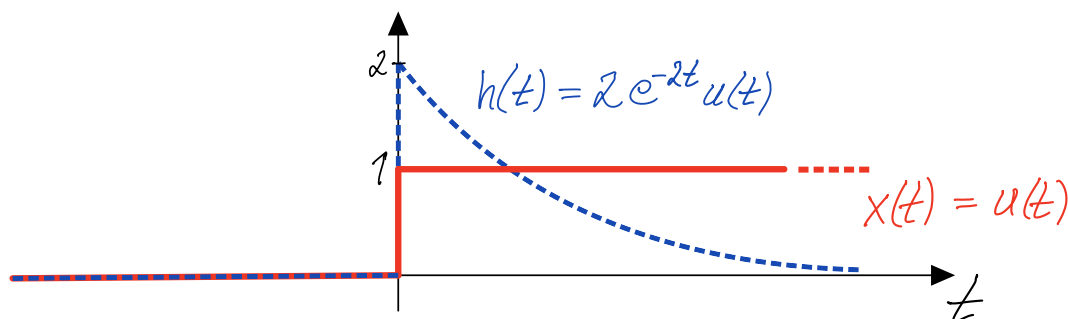
För insignalen $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$; $a, b \in \mathbb{R}$
i differentialekvationens högerled så erhålls

$$\begin{aligned} x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) &\stackrel{(\star)}{=} a \left(\frac{d^2 y_1(t)}{dt^2} + At \cdot y_1(t) \right) + b \left(\frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + At \cdot y_2(t) \right) \\ &= \frac{d^2 (a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t))}{dt^2} + At (a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)) \\ &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + At \cdot y(t), \text{ där } \underline{y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)} \end{aligned}$$

\Rightarrow Systemet är linjärt \Rightarrow Alternativ **Ⓐ**

- Man kan visa att systemet är tidsvariant, vilket beror på att $y(t)$ multipliceras med t i diff.ekvationen.
- Utan ytterligare information om systemet kan vi dock inte avgöra systemets kausalitetsegenskap och stabilitetsegenskap.

④

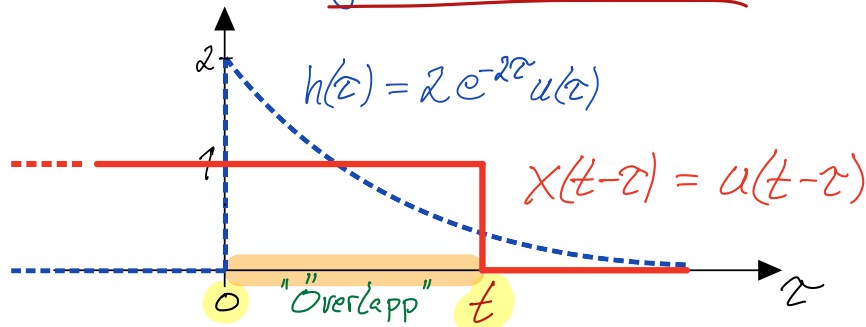


$$\underline{g(t)} = (u * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (\star)$$

\uparrow
 $u(t-\tau) = 0$
 då $t-\tau < 0$, dvs. då $\tau > t$

$$h(\tau) = 0 \text{ för } \tau < 0 \Rightarrow \underline{g(t) = 0 \text{ för } t < 0}$$

$$\underline{t \geq 0} \Rightarrow$$



$$g(t) = \int_0^t 2e^{-2\tau} d\tau = 2 \left[\frac{e^{-2\tau}}{-2} \right]_0^t = 1 - e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \underline{g(t) = (1 - e^{-2t})u(t)} \Rightarrow \text{Alternativ } \textcircled{c}$$

DEL 2:

⑤

Om $x(t)$ är T_0 -periodisk så gäller

$$x(t) = X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n), \text{ där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Da $x(t)$ består av periodiska delsignaler, så måste dessa också kunna uttryckas som en motsvarande summa av cosinuser med vinkelfrekvenser $n \cdot \omega_0$.

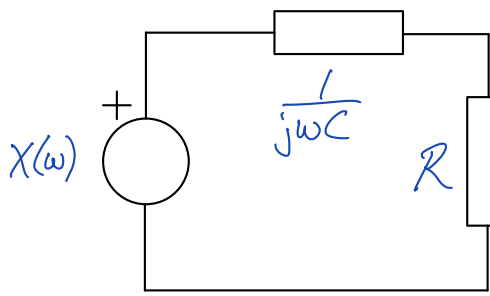
Trå godtyckliga delsignaler med periodtid T_m och T_k har därför grundvinkelfrekvenser som är $\omega_m = \frac{2\pi}{T_m} = m \cdot \omega_0$ respektive $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k} = k \cdot \omega_0$ för något $m, k \in \mathbb{Z}_+$.

$$\Rightarrow \underline{\frac{T_m}{T_k} = \frac{2\pi/m\omega_0}{2\pi/k\omega_0} = \frac{k}{m} \in \mathbb{Q}} \Rightarrow \text{Alternativ } \textcircled{d}$$

(Denna matematiska motivering är för lång för att bara ge 2p, men utgående från en grundläggande förståelse för fourierseriens uttryck kan man intuitivt förstå sambandet utan beräkningar.)

6

Komplexschema:



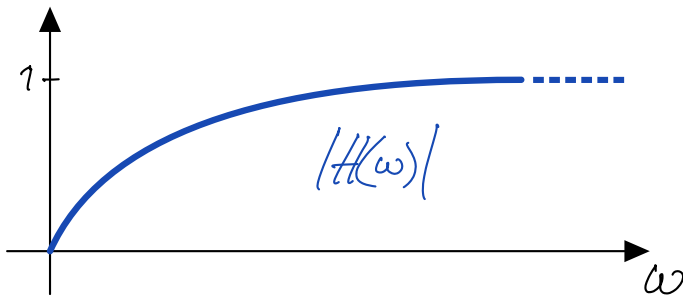
Spänningsdelning

$$Y(w) = X(w) \frac{R}{\frac{1}{jwC} + R}$$

$Y(w) = Y_{zs}(w)$ här, ty vi betraktar energifritt system

$$H(w) = \frac{Y_{zs}(w)}{X(w)} = \frac{jwRC}{1 + jwRC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet |H(0)| = \left| \frac{0}{1 + j0} \right| = 0 \\ \bullet \lim_{w \rightarrow \infty} |H(w)| = \lim_{w \rightarrow \infty} \left| \frac{jRC}{\frac{1}{w} + jRC} \right| = \frac{RC}{RC} = 1 \end{cases}$$



Filtret dämpar lågfrekventa signaler mer än högfrekventa

\Rightarrow ett högpassfilter

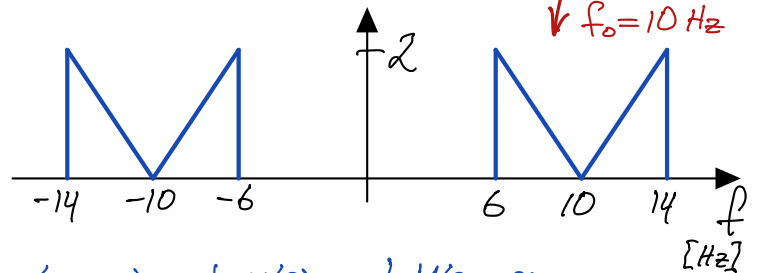
\Rightarrow Alternativ **6**

7

$s(t) = m(t) \cdot c(t)$ Tab. 2:14 \Rightarrow

$$\begin{aligned} S(w) &= \frac{1}{2\pi} (M * C)(w) = / \text{Tab. 3:22} \Rightarrow C(w) = \pi (\delta(w+w_0) + \delta(w-w_0)) / \\ &= \frac{\pi}{2\pi} (M(w) * \delta(w+w_0) + M(w) * \delta(w-w_0)) \\ &= \frac{1}{2} M(w+w_0) + \frac{1}{2} M(w-w_0) \Rightarrow \underline{S(f) = \frac{1}{2} M(f+f_0) + \frac{1}{2} M(f-f_0)} \end{aligned}$$

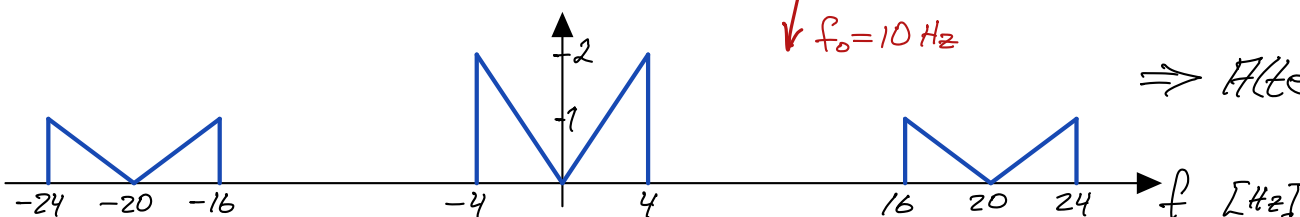
$w_0 = 2\pi f_0$



$r(t) = s(t) \cdot c(t) \Rightarrow$

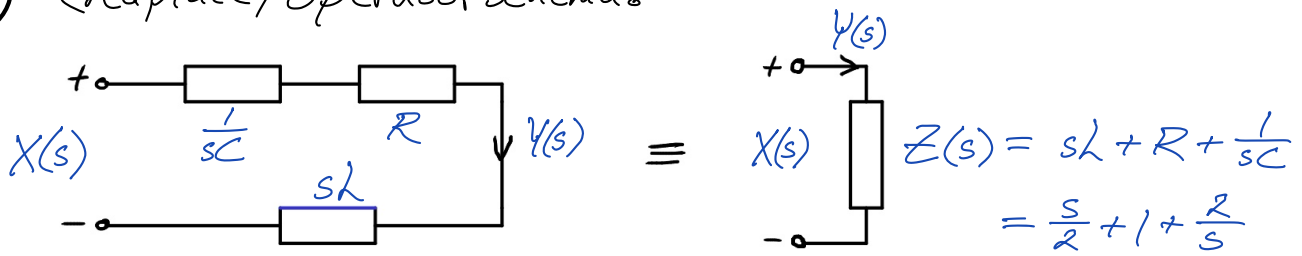
/ På samma sätt som ovan /

$\underline{R(f) = \frac{1}{2} S(f+f_0) + \frac{1}{2} S(f-f_0) = \frac{1}{4} M(f+2f_0) + \frac{1}{2} M(f) + \frac{1}{4} M(f-2f_0)}$



\Rightarrow Alternativ **6**

⑧ (Laplace) operatorschema:



Betrakta energifritt system $\Rightarrow V(s) = V_{ss}(s)$

Ohms lag $\Rightarrow X(s) = Z(s) \cdot V(s) \xrightarrow{LTI} \underline{H(s)} = \frac{V(s)}{X(s)} = \frac{1}{Z(s)} = \underline{\underline{\frac{2s}{s^2 + 2s + 4}}}$

$\Rightarrow s^2 V(s) + 2s V(s) + 4V(s) = 2s X(s) \xrightarrow{\text{Tab. 4:10}} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt}$

Passiv RLC-krets \Rightarrow kausalt LTI-system $\Rightarrow \mathcal{L}_T$ (enkelsidig) kan användas.

\mathcal{L}_T {diff. ekvationer} med $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = y_{zi}(t)$:

$\mathcal{L}_T \left\{ \frac{d^2 y_{zi}(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy_{zi}(t)}{dt} + 4y_{zi}(t) \right\} = \mathcal{L}_T \{0\}$
 $\leftarrow (x(t) = 0 \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = 0)$

$\xrightarrow{\text{Tab. 4:10}} [s^2 Y_{zi}(s) - \underbrace{s \cdot y(0)}_{=3} - \underbrace{y'(0)}_{=-3}] + 2[s Y_{zi}(s) - \underbrace{y(0)}_{=3}] + 4 Y_{zi}(s) = 0$

$\Rightarrow (s^2 + 2s + 4) Y_{zi}(s) = 3s + 3$

$\Rightarrow Y_{zi}(s) = \frac{3s + 3}{s^2 + 2s + 4} = 3 \cdot \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + (\sqrt{3})^2}$

Konv. omr. $\text{Re}\{s\} > -1$ (Zill höger om polerna) ty kausalt system (polerna kommer från $H(s)$).

$\text{Tab. 5:20} \Rightarrow \underline{y_{zi}(t) = 3e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) u(t)} \Rightarrow \text{Alternativ } \textcircled{6}$

9 Kaskadkoppling $\Rightarrow h(t) = (h_1 * h_2)(t) \Leftrightarrow H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega)$
 där $H_2(\omega) = \frac{2}{5 + j\omega}$ \uparrow
Båda systemen är stabila

System H_1 är stabil \Rightarrow Vi får fouriertransformera differentialekvationen: $\mathcal{F}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t)\right\} = \mathcal{F}\{3x(t)\}$

Tab. 2:10 $\Rightarrow j\omega \cdot Y(\omega) + 2Y(\omega) = 3X(\omega)$

$\Rightarrow H_1(\omega) = \frac{Y_{zs}(\omega)}{X(\omega)} = \left/ \begin{array}{l} Y(\omega) = Y_{zs}(\omega), \text{ ty} \\ \text{energifritt system betraktes} \end{array} \right/ = \frac{3}{j\omega + 2}$

Dvs. $H(\omega) = H_1(\omega) H_2(\omega) = \frac{3}{j\omega + 2} \cdot \frac{2}{j\omega + 5} \stackrel{\text{P.B.U.}}{=} \frac{2}{j\omega + 2} - \frac{2}{j\omega + 5}$

Tab. 3:5 $\Rightarrow \underline{h(t) = 2(e^{-2t} - e^{-5t})u(t)}$ \Rightarrow Alternativ **D**

Det går även bra (oftast bättre/enklare) att Laplacetransformera differentialekvationen (tillåtet även för instabila system, samt att det blir enklare uttryck med "s" i stället för "jw").

Då gäller $\underline{h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}}$, där $\underline{H(s) = H_1(s) H_2(s)}$, där

- $\underline{H_1(s)}$ erhålls utgående från $\mathcal{L}\{\text{differentialekvationen}\}$
 $\Rightarrow H_1(s) = \frac{3}{s+2}$, $\text{Re}\{s\} > -2$, där konv.området behöver motiveras utgående från att systemet är stabilt \Rightarrow jw-axeln ligger i konv.området.

- $\underline{H_2(s) = \mathcal{L}\{h_2(t)\}}$ (glöm ej konv.området!), där $h_2(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_2(\omega)\}$
 (OBS: Det är inte allmänt tillåtet att gå från $H_2(\omega)$ till $H_2(s)$ genom att byta ut jw mot s, även om det ofta blir korrekt transform, som i detta fall $- H_2(s) = \frac{2}{s+5}$)