Svar & lösningar till tentamen i TSBB32 Linjära system, 2024-01-05

	Del 1				Del 2				
Fråga	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
a)				X				X	
b)		X			X				
c)	X						X		X
d)			X			X			

DEL 1:

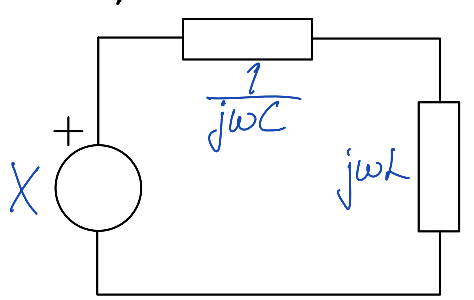
(1) Alternativ (c) är felaktigt:

Systemets olika egenskaper, som t.ex. stabiliteten, beror *inte* på om systemet är energifritt eller ej.

(Vid analys av olika egenskaper hos (LTI-)system, så betraktas systemet vid energifritt tillstånd, oberoende av om det har energi eller ej när det analyseras.)

---

(2) Komplexschema:



Spänningsdelning

$$\underline{V} = X \cdot \frac{j\omega L}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = X \cdot \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC}$$

$$= \Big/ X = 9 \cdot e^{j0},\ \omega = 10 \text{ rad/s},\ C = 50 \text{ mF},\ L = 50 \text{ mH} \Big/$$

$$= 9 \cdot \frac{-0{,}25}{1 - 0{,}25} = -3 = \underline{3 \cdot e^{j\pi}}$$

$\Rightarrow$ $\underline{v(t) = 3 \cdot \cos(10t + \pi) \ [V]}$ $\Rightarrow$ Alternativ (b)

③ $y(t) = x(t)\cdot\sin(20\pi t)$ (I)

- Test av linjäritet: Låt $x_n(t) \to y_n(t) = x_n(t)\cdot\sin(20\pi t)$ (II)

  och låt $x(t) = a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t)$, där $a,b \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(t) \overset{(I)}{=} (a\cdot x_1(t) + b\cdot x_2(t))\sin(20\pi t) = a\cdot x_1(t)\sin(20\pi t) + b\cdot x_2(t)\sin(20\pi t)$$

$$\overset{(II)}{=} a\cdot y_1(t) + b\cdot y_2(t) \Rightarrow$$ Systemet är linjärt

- Test av tidsinvarians: Låt $\tilde{x}(t) = x(t-T)$ (III)

$$\Rightarrow \tilde{y}(t) \overset{(I)}{=} \tilde{x}(t)\cdot\sin(20\pi t) \overset{(III)}{=} x(t-T)\sin(20\pi t)$$

$$\neq y(t-T) = x(t-T)\sin(20\pi(t-T))$$ ⇒ Systemet är tidsvariant

[för alla T]

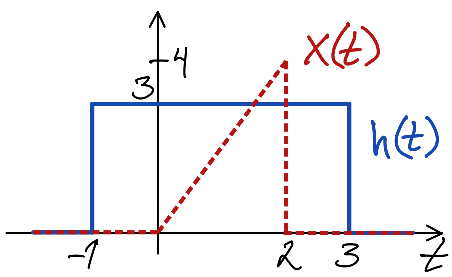
($\tilde{y}(t) = y(t-T)$ gäller bara då $20\pi T$ är en multipel av 2π)

Alternativ (d)

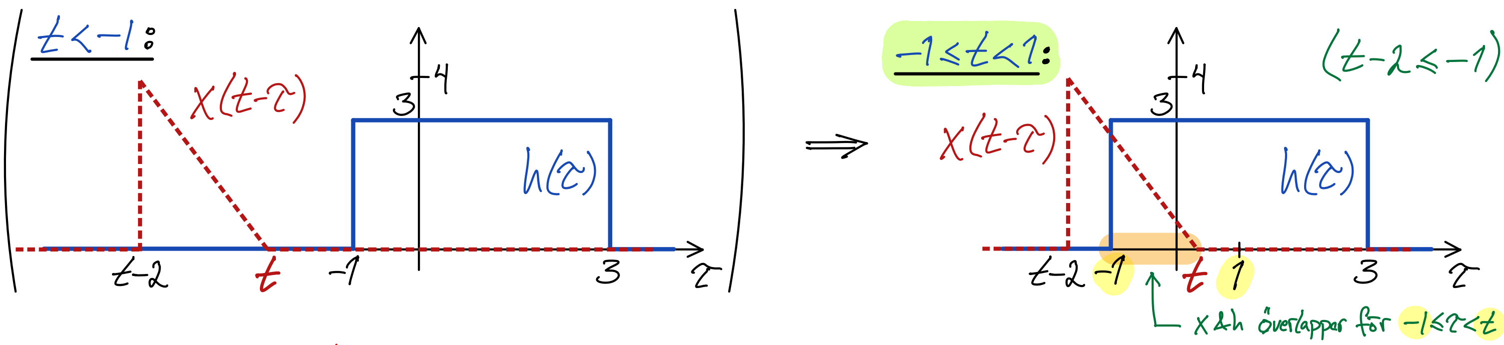
---

④ Energifritt LTI-system ⇒

$$y(t) = y_{zs}(t) = (x*h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$ (eller $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$)



$$\begin{cases} x(t) = 2t(u(t) - u(t-2)) \\ h(t) = 3(u(t+1) - u(t-3)) \end{cases}$$



$$\Rightarrow y(t) = \int_{-1}^{t} 2(t-\tau)\cdot 3\,d\tau = 6\int_{-1}^{t}(t-\tau)\,d\tau = 6\left[t\cdot\tau - \frac{\tau^2}{2}\right]_{-1}^{t}$$

$$= 6\left(\left[t^2 - \frac{t^2}{2}\right] - \left[-t - \frac{1}{2}\right]\right) = 3t^2 + 6t + 3$$ ⇒ Alternativ (a)

DEL 2:

5

Påstående **b** är felaktigt:

Nollställenas lägen påverkar varken kausaliteten eller stabiliteten hos ett LTI-system.

6

Stabilt LTI-system med stationär sinus som insignal,

$$x(t) = \sin(3t) \Rightarrow y(t) = |H(3)| \cdot \sin(3t + \arg H(3))$$

där $H(3) = H(\omega)$ för $\omega = 3$ rad/s

där $H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \mathcal{F}\left\{4 \cdot \frac{1}{t^2 + 2^2}\right\} \overset{\text{Tab. 3:16}}{=\!=} 4 \cdot \frac{\pi}{2} e^{-2|\omega|}$

$$\Rightarrow H(3) = 2\pi \cdot e^{-2\cdot 3} = \frac{2\pi}{e^6} \cdot e^{j0} \Rightarrow \begin{cases} |H(3)| = \frac{2\pi}{e^6} \\ \arg H(3) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2\pi}{e^6} \cdot \sin(3t) \Rightarrow \text{Alternativ } d$$

7

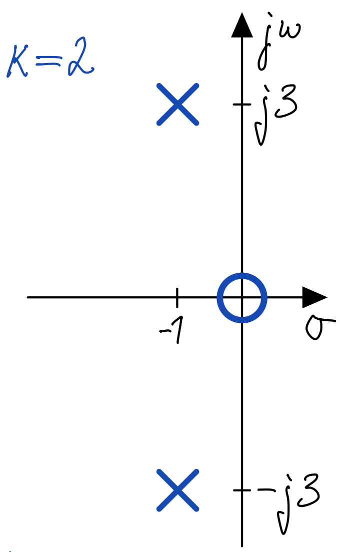
Filtertyp? Bestäm utgående från skiss av $|H(\omega)|$:

Givet: $g(t) = (u * h)(t) \Leftrightarrow G(s) = U(s)H(s) \overset{\text{Tab. 5:3}}{=\!=} \frac{1}{s} \cdot H(s)$

$$\Rightarrow H(s) = s \cdot G(s) = \left/ \begin{matrix} g(t) = \frac{2}{3} e^{-t} \sin(3t) u(t) \\ \text{Tab. 5:21} \Rightarrow G(s) \end{matrix} \right/ = s \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

$$= \frac{2s}{(s+1)^2 + 3^2} \; ; \; Re\{s\} > -1$$

$K = 2$

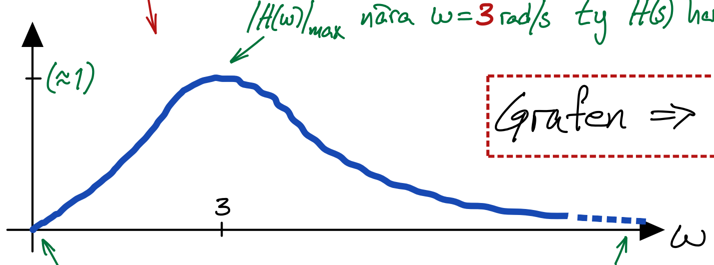


Pol-nollställediagram

$j\omega$-axeln i konvergensområdet $\Rightarrow H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$\Rightarrow$ Skiss av $|H(\omega)|$ utgående från pol-nollställediagrammet:

$|H(\omega)|_{max}$ nära $\omega = 3$ rad/s ty $H(s)$ har en pol i $s = -1 + j3$



Grafen $\Rightarrow$ BP-filter, dvs. alternativ **c**

$(|H(\omega)|_{max} \approx 1$, behöver inte beräknas$)$

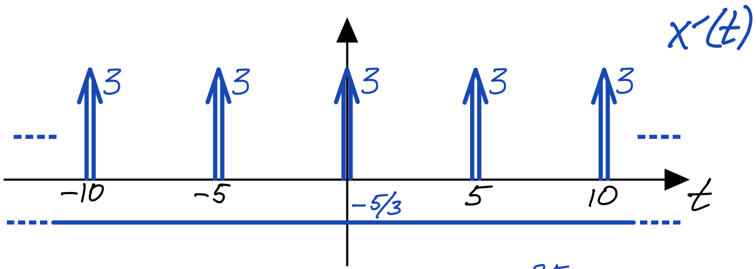
$H(0) = 0$ ty $H(s)$ har nollställe i $s = 0$

$\lim_{\omega \to \infty} |H(\omega)| = 0$ ty $H(s)$ har fler poler än nollställen

8 LTI-system med T_0-periodisk insignal $x(t)$, som har komplexa fourierseriekoefficienter D_n $\Rightarrow$ Utsignalen $y(t)$ är också T_0-periodisk och har komplexa fourierseriekoefficienter $\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\cdot\omega_0)$, där $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = $ / Grafen $\Rightarrow$ $T_0 = 5$ sek / $= \frac{2\pi}{5}$ rad/s

Sökt: Grundtonen $y_1(t) = A\cdot\cos(\omega_0 t + \varphi)$, där $A = \hat{C}_1 = 2|\hat{D}_1|$

Utseendet på $x(t)$ $\Rightarrow$ det är här enklare att beräkna $D_{nx'}$ än D_n:



$$\Rightarrow D_{nx'} = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x'(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{5}\int_{-2,5}^{2,5}\left(3\delta(t) - \frac{5}{3}\right) e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$\left.\begin{array}{l} n=1 \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{5}\text{ rad/s} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{1x'} = \frac{3}{5}\int_{-2,5}^{2,5}\delta(t)\, e^{-j\frac{2\pi}{5}t}\,dt - \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-2,5}^{2,5} e^{-j\frac{2\pi}{5}t}\,dt}_{=\frac{j5}{2\pi}\left(e^{-j\pi} - e^{j\pi}\right) = 0} = \frac{3}{5}\, e^{-j\frac{2\pi}{5}t}\Big|_{t=0} = \frac{3}{5}$$

Där diracen är

$$D_n = \frac{D_{nx'}}{jn\omega_0} \Rightarrow D_1 = \frac{D_{1x'}}{j\frac{2\pi}{5}} = \frac{3}{j2\pi}$$

$$H(\omega) = \frac{2\pi}{2\pi + j5\omega} \Rightarrow H(\omega_0) = \frac{2\pi}{2\pi + j5\cdot\frac{2\pi}{5}} = \frac{1}{1+j}$$

$$\Rightarrow A = 2|\hat{D}_1| = 2|D_1 \cdot H(\omega_0)| = 2\cdot\frac{3}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\pi\sqrt{2}}$$

$\Rightarrow$ Alternativ a

D_1 (D_n) kan även beräknas direkt från $x(t)$ på traditionellt sätt:

$$D_1 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\, e^{-j\overset{n=1}{1}\cdot\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{5}\int_{-5}^{0} -\frac{3}{5}t\cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}t}\,dt = \frac{-3}{25}\int_{-5}^{0} t\cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}t}\,dt$$

$$= \Big/ \text{Formels. sid 3: } \int t\cdot e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a^2}(at-1) \Big/ = \frac{-3}{25}\left[\frac{e^{-j\frac{2\pi}{5}t}}{\left(-j\frac{2\pi}{5}\right)^2}\left(-j\frac{2\pi}{5}t - 1\right)\right]_{-5}^{0}$$

$$= \frac{3}{4\pi^2}\Big(\underbrace{e^0}_{=1}(0-1) - \underbrace{e^{j2\pi}}_{=1}(j2\pi - 1)\Big) = \frac{-j3\cdot 2\pi}{4\pi^2} = \frac{3}{j2\pi}$$

4

$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, där $H(s) = H_1(s)H_2(s)$

- $H_1(s) = \frac{s+2}{s+3}$; $Re\{s\} > -3$
- $h_2(t) = \delta(t) + 5 \cdot e^{-2t} u_0(-t)$

Tab. 5:1 & 5:14 $\Rightarrow$ $H_2(s) = 1 - 5 \cdot \frac{1}{s+2} = \frac{s-3}{s+2}$; $Re\{s\} < -2$

$\Rightarrow$ $\underline{H(s)} = \frac{\cancel{s+2}}{s+3} \cdot \frac{s-3}{\cancel{s+2}} = \frac{s-3}{s+3} = \frac{s+3-6}{s+3} = \underline{1 - 6\frac{1}{s+3}}$; $Re\{s\} > -3$

Tab. 5:1 & 5:11 $\Rightarrow$ $h(t) = \delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$ $\Rightarrow$ Alternativ c