1 a) **FALSKT:** $y(t) = x(t)\cdot u_0(-t) + a\cdot x(t-1)u(t)$

Låt $\tilde{x}(t) = x(t-t_0)$

$\Rightarrow \hat{y}(t) = \tilde{x}(t)u_0(-t) + a\cdot\tilde{x}(t-1)u(t)$

$= x(t-t_0)u_0(-t) + a\cdot x(t-1-t_0)u(t) \neq y(t-t_0)$

$\Rightarrow$ Ej tidsinvariant

b) **FALSKT:** $\mathcal{L}\{$Diff.ekvationen$\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (s^2+4s+3)Y_{II}(s) = X_{II}(s) \Rightarrow H_{II}(s) = \frac{Y_{II}(s)}{X_{II}(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$

Icke-kausalt system $\Rightarrow$ konv.omr. antingen $Re\{s\} < -3$ eller $-3 < Re\{s\} < -1$. I båda fallen ingår inte $j\omega$-axeln i konv.området $\Rightarrow$ Instabilt system

c) **FALSKT:** Frekvensfkn:en $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = e^{j\omega}$

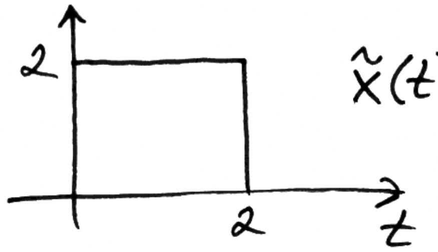
$\Rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \delta(t+1) \Rightarrow h(t) \neq 0$ för minst ett negativt $t$-värde ($t=-1$ här) $\Rightarrow$ Icke-kausalt system (till och med anti-kausalt)

d) **FALSKT:** $y(t) = \sqrt{x^2(t)} = |x(t)| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Går ej att erhålla $x(t)$ från $y(t)$, för utgående från ett givet $y(t_0) > 0$ så vet vi inte om $x(t_0)$ är positiv eller negativ.

e) **FALSKT:** Ett butterworthfilter av ordning $n$ har sina poler jämnt fördelade på en cirkelbåge i vänster halvplan, med vinkelavståndet $\frac{\pi}{n}$ mellan två intilliggande poler. Eftersom alla poler är komplex-konjugerade, utom vid udda $n$, då en av polerna är reellvärd, så går det inte att erhålla ett butterworthfilter av en viss ordning genom att kaskadkoppla två butterworthfilter av lägre ordning.

② Betrakta den första pulsen i $x(t)$:

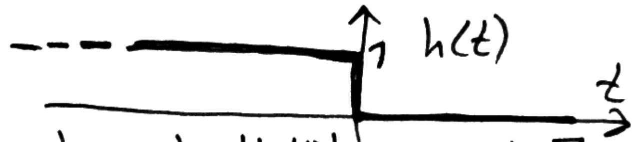



$$\tilde{x}(t) = 2\big(u(t) - u(t-2)\big)$$

$$\Rightarrow \underline{x(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{x}(t-4) + \tilde{x}(t-8)}$$

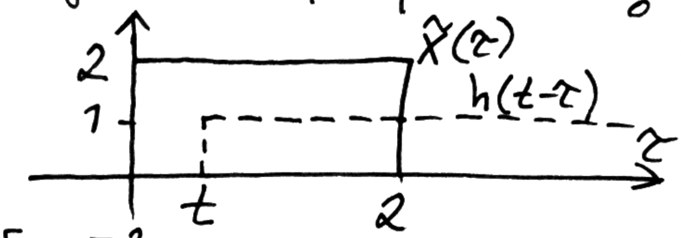
LTI-system $\Rightarrow$ $\underline{y(t) = \tilde{y}(t) + \tilde{y}(t-4) + \tilde{y}(t-8)}$,

där $\tilde{y}(t) = (\tilde{x} * h)(t)$,




Faltning OK, ty $\tilde{x}(t)$ absolutintegrerbar och $|h(t)| < \infty \ \forall t$ !

$$\underline{\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau};$$

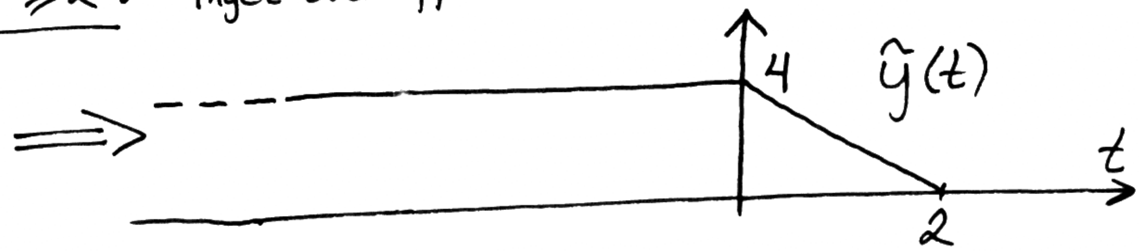



$\underline{t<0:}$ $\underline{\tilde{y}(t)} = \int_0^2 2\cdot 1\, d\tau = [2\tau]_0^2 = \underline{4}$

$\underline{0 \le t < 2:}$ $\underline{\tilde{y}(t)} = \int_t^2 2\cdot 1\, d\tau = [2\tau]_t^2 = \underline{2(2-t)}$

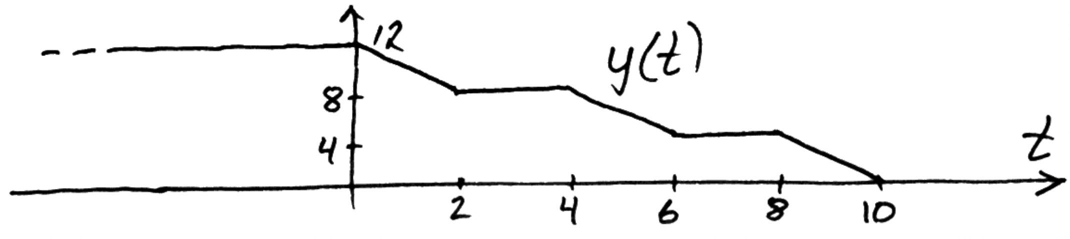
$\underline{t \ge 2:}$ Inget överlapp mellan $\tilde{x}(\tau)$ & $h(t-\tau)$ $\Rightarrow$ $\underline{\tilde{y}(t) = 0}$

$\Rightarrow$




Svar: $y(t) = \tilde{y}(t) + \tilde{y}(t-4) + \tilde{y}(t-8)$

$$\text{där } \tilde{y}(t) = \begin{cases} 4; & t<0 \\ 2(2-t); & 0 \le t < 2 \\ 0; & t \ge 2 \end{cases}$$



3) T-periodisk insignal till ett stabilt LTI-system

$\Rightarrow$ utsignalen är också T-periodisk:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \Rightarrow y(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t}$$

$$= Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{Y}_k \cdot \sin(k\omega_1 t + \beta_k),$$

där $\underline{Y_0 = D_0}$, $\underline{\hat{Y}_k = 2|D_k|}$, $\underline{\beta_k = \arg D_k + \frac{\pi}{2}}$,

där $\boxed{D_k = C_k \cdot H(\omega)\big|_{\omega = k\cdot\omega_1}}$ ; $\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ rad/s

(Ty stabilt LTI-system)

(alt. $Y_0 = X_0 \cdot H(0)$, $\hat{Y}_k = \hat{X}_k |H(k\omega_1)|$, $\beta_k = \varphi_k + \arg H(k\omega_1)$ om $x(t)$ skrivs om som $x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{X}_k \sin(k\omega_1 t + \varphi_k)$)

$$h(t) = e^2\left(e^t \cdot u(-t) + e^{-t} \cdot \cos(t) \cdot u(t)\right)$$

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{e^t \cdot u(-t)\} = \int_{-\infty}^{0} e^t \cdot e^{-j\omega t}\, dt = \left[\frac{e^{(1-j\omega)t}}{1-j\omega}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{1-j\omega} \\ \mathcal{F}\{e^{-t} \cdot \cos(t) \cdot u(t)\} = /\text{formelsaml.}/ = \frac{1+j\omega}{(1+j\omega)^2+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H(\omega)}} = e^2\left(\frac{1}{1-j\omega} + \frac{1+j\omega}{(1+j\omega)^2+1}\right) = \underline{\underline{\frac{e^2(3+j2\omega)}{2+\omega^2+j\omega^3}}}$$

---

$$\underline{\underline{Y_0}} = D_0 = C_0 \cdot H(0) = 2 \cdot \frac{e^2 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{3 \cdot e^2}} \Rightarrow \begin{cases} |Y_0| = 3 \cdot e^2 \\ \arg Y_0 = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{D_k}} = C_k \cdot H(k\pi) = /k \neq 0/ = \frac{j2}{k\pi} \cdot \frac{e^2(3+j2k\pi)}{2+(k\pi)^2+j(k\pi)^3}$$

$$\star\ \underset{(k>0)}{\underline{\hat{Y}_k}} = 2|D_k| = \underline{\underline{\frac{4e^2}{k\pi}\sqrt{\frac{9+4k^2\pi^2}{(2+k^2\pi^2)^2+k^6\pi^6}}}}$$

$$\star\ \underset{(k>0)}{\underline{\beta_k}} = \arg D_k + \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\underbrace{\pi}_{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} + \arctan\left(\frac{2k\pi}{3}\right) - \arctan\left(\frac{k^3\pi^3}{2+k^2\pi^2}\right)}}$$

(4) Totalt system: $\underset{X(s)}{x(t)} \longrightarrow \boxed{H(s)} \longrightarrow y(t)$

$$\left.\begin{array}{l} Y(s) = X(s)\cdot H(s) \\ \text{Givet system} \Rightarrow \quad Y(s) = X(s)\cdot H_A(s) + X(s)\cdot H_B(s) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H(s)}} = H_A(s) + H_B(s) = \frac{s^3+1}{(s+1)(s^2+s+1)} = \underline{\underline{\frac{s^2-s+1}{s^2+s+1}}}$$

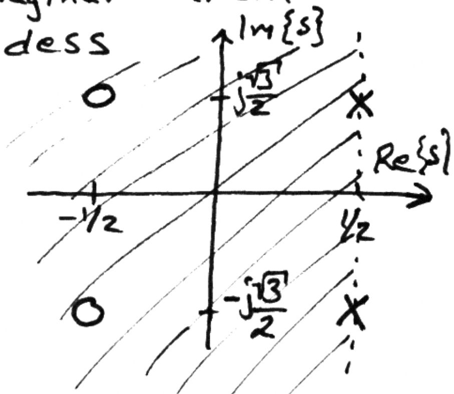
a) Inv.system: $\underset{Y(s)}{y(t)} \longrightarrow \boxed{H_i(s)} \longrightarrow x(t)$

$$X(s) = Y(s)\cdot H_i(s) = X(s)\cdot H(s)\cdot H_i(s)$$

$$\Rightarrow H(s)\cdot H_i(s) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{H_i(s)}} = \frac{1}{H(s)} = \underline{\underline{\frac{s^2+s+1}{s^2-s+1}}}$$

$H_i(s)$ har nollställen i $s = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$ & poler i $s = \frac{1 \pm j\sqrt{3}}{2}$

Inverssystemet skall vara stabilt ⇒ imaginära axeln måste ligga i konv.området för $H_i(s)$, dvs. dess konvergensområde är $\underline{\underline{Re\{s\} < \frac{1}{2}}}$



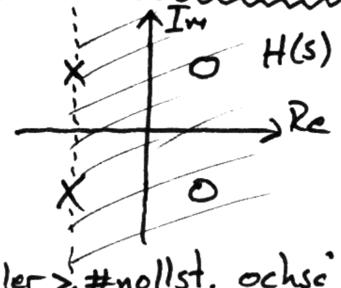

b) $H_i(s)$ har ett vänstersidigt konvergensområde (se

⇒ Inverssystemet är <u>anti-kausalt</u>

c) $x(t) = \sin(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 1$ rad/s

Om stabilt LTI-system ⇒ $y(t) = |H(\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

LTI enligt uppgift, men är det stabilt?




$H(s)$ enligt ovan ⇒ Poler i $s = \frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2}$

Kausalt enl. uppgift ⇒ Konv.omr. för $H(s)$ är $Re\{s\} > -\frac{1}{2}$

⇒ Imaginära axeln i konv.omr. ⇒ stabilt! (#poler ≥ #nollst. också uppfyllt)

$$\Rightarrow \underline{H(\omega_0)} = H(s)\Big|_{s=j\omega_0} = \Big/ \omega_0 = 1 \text{ rad/s} \Big/ = \frac{j^2 - j + 1}{j^2 + j + 1} = \underline{-1}$$

$$\Rightarrow |H(1)| = 1, \quad \arg H(1) = \pi$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(t) = \sin(t + \pi)}}$$

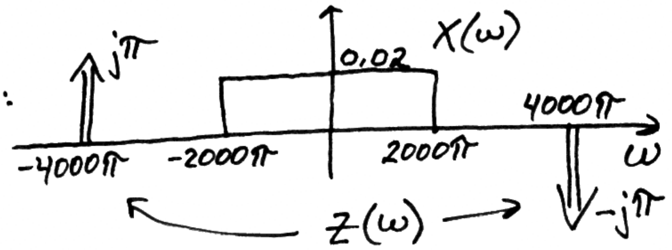
5 a) Sökt: $|Y(\omega)|$, där $\underline{Y(\omega) = Y_1(\omega) + Y_2(\omega)}$

$\underline{Y_1(\omega)}$: $Y_1(\omega) = W(\omega)\cdot H_A(\omega)$. $w(t) = x(t)\cdot z(t)$, där $\begin{cases} x(t) = 40\,\mathrm{sinc}(2\cdot 10^3 t) \\ z(t) = \sin(4\pi\cdot 10^3 t) \end{cases}$

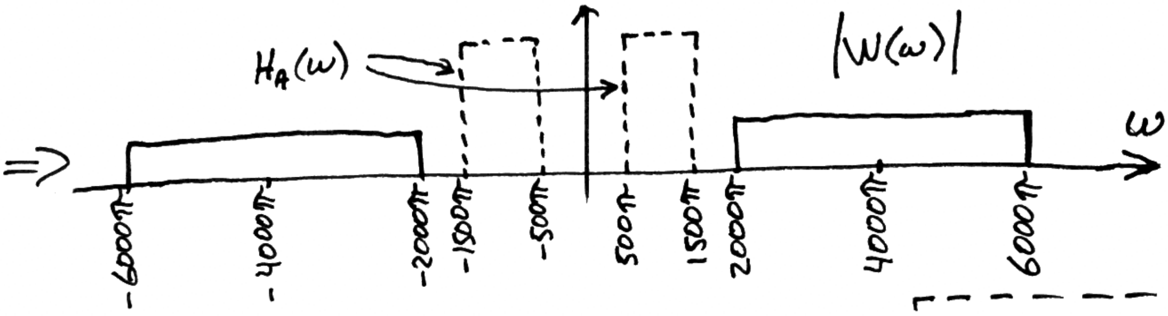
Formelsaml. $\Rightarrow \begin{cases} X(\omega) = \begin{cases} \frac{40}{2\cdot 10^3} = 0{,}02\,; & |\omega| \leq 2000\pi \text{ rad/s} \\ 0\,; & |\omega| > 2000\pi \text{ rad/s} \end{cases} \\ Z(\omega) = j\pi\left(\delta(\omega + 4000\pi) - \delta(\omega - 4000\pi)\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \therefore\ W(\omega) = \frac{1}{2\pi}(X * Z)(\omega)$

Dvs:



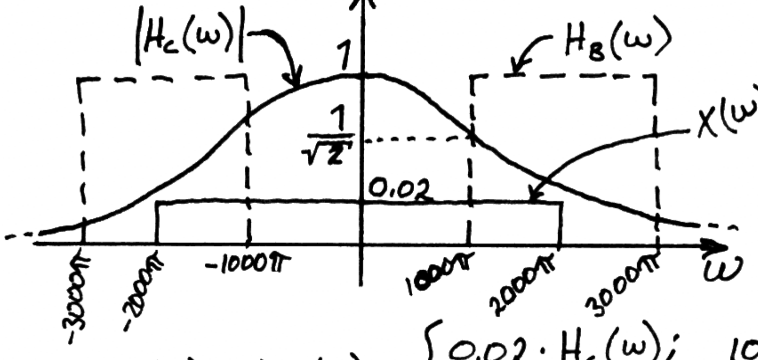

$\Rightarrow$

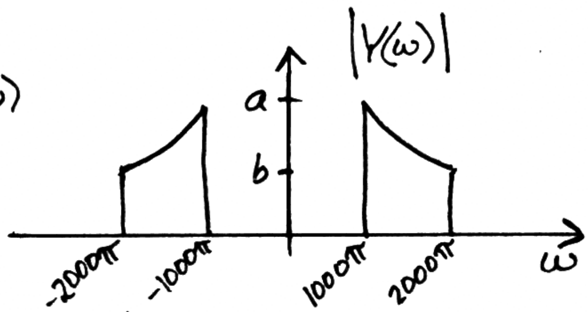



$\Rightarrow \underline{Y_1(\omega) = W(\omega)\cdot H_A(\omega) = 0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{Y(\omega) = Y_2(\omega)}$

$\underline{Y_2(\omega)}$: $Y_2(\omega) = V(\omega)\cdot H_B(\omega) = X(\omega)\cdot H_c(\omega)\cdot H_B(\omega)$ ← Idealt BP

Butterw. filter, $\omega_{3dB} = 1000\pi$ rad/s




$\therefore\ Y(\omega) = Y_2(\omega) = \begin{cases} 0{,}02\cdot H_c(\omega)\,; & 1000\pi \leq |\omega| \leq 2000\pi \\ 0\,; & \text{f.ö.} \end{cases}$

I figuen är $\underline{a} = 0{,}02\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{100}}$, eftersom $|H_c(\omega_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Butterworthfilter, ordn. 1 $\Rightarrow |H_c(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^2}}$

($\omega_{3dB} \Rightarrow \varepsilon \approx 1$)

$\Rightarrow \underline{b} = 0{,}02\cdot|H_c(2000\pi)| = \frac{0{,}02}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{1}\right)^2}} = \underline{\frac{0{,}02}{\sqrt{5}}}$

5 b) $\underline{\underline{W_y}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = /\text{uppg. a}/$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 2\int_{1000\pi}^{2000\pi} |0{,}02 \cdot H_c(\omega)|^2 d\omega$$

$$= \frac{0{,}02^2}{\pi}\int_{1000\pi}^{2000\pi} \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{1000\pi}\right)^2} d\omega$$

$$= \left/ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\omega}{1000\pi} \\ \Rightarrow d\omega = 1000\pi\, d\lambda \end{array} \right/ = 0{,}4\int_1^2 \frac{1}{1+\lambda^2} d\lambda$$

$$= 0{,}4\left[\arctan \lambda\right]_1^2 \approx \underline{\underline{0{,}13}}$$