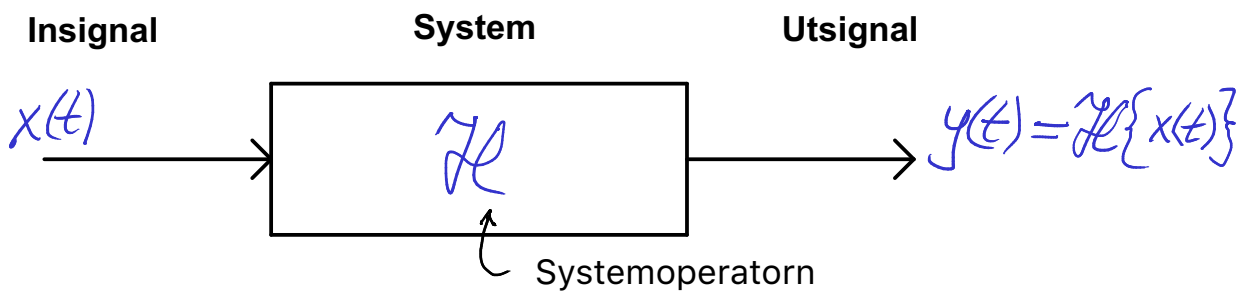


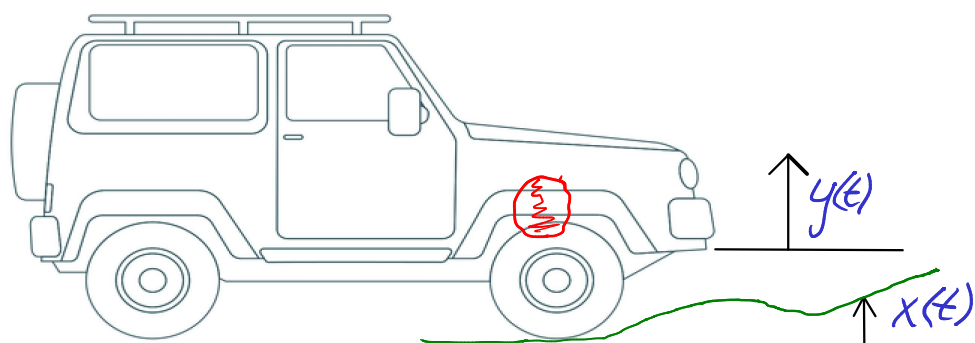
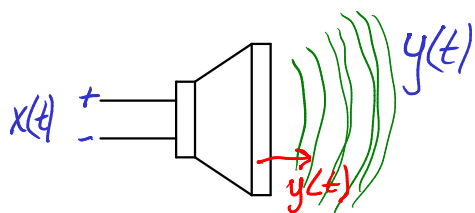
# Signaler & System – Föreläsning 1: Inledning, signal- och systemegenskaper



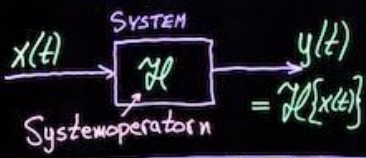
Ett SYSTEM = en matematisk modell av ett fysikaliskt system (alt. en algoritm) som för olika insignaler  $x$  genererar olika utsignaler  $y$

En SIGNAL = en informationsbärande matematisk funktion som representerar en (ofta mätbar) fysikalisk storhet.

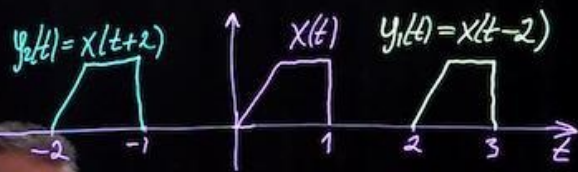
Exempel:



# SIGNALOPERATIONER



Tidsskiftning:



Spegling:

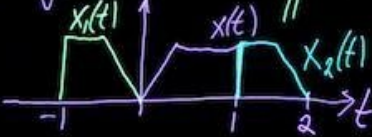


Tidsskalning:



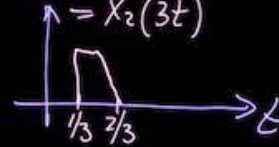
Ex:

$$y_6(t) = x(-3t+2) \quad // \quad x_1(t) = x(-t)$$



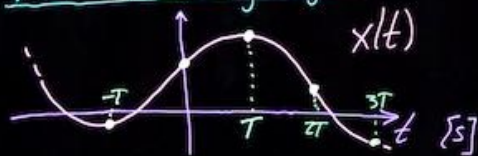
$$x_2(t) = x(-t+2) = x(-(t-2)) = x_1(t-2)$$

$$y_6(t) = x(-3t+2) = x(-(3t)+2) = x_2(3t)$$



# SIGNAL TYPER

## Tidskontinuerlig signal



## Energisignal

Har ändlig signalenergi

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

## Tidsdiskret signal



$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$



## Effekt signal

Har ändlig effekt signal

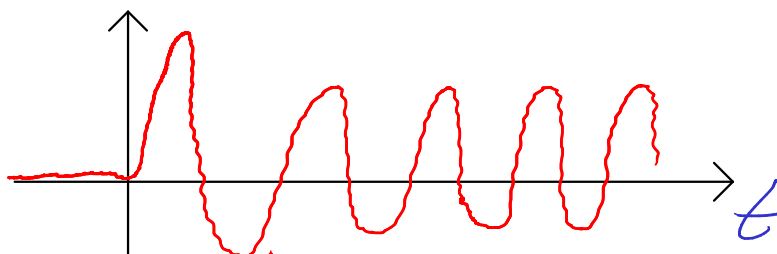
$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt$$

## (T<sub>0</sub>-)Periodisk signal



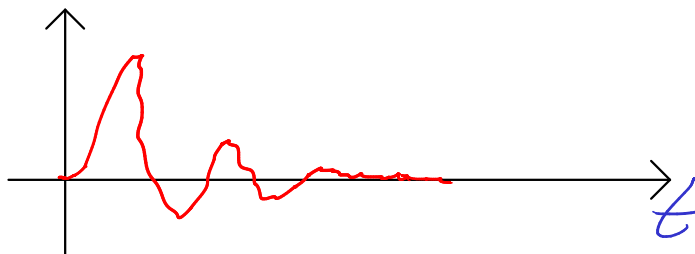
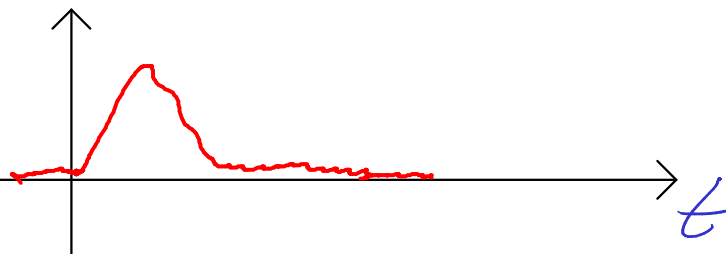
Kausal signal:  $x(t) = 0; t < 0$

Stationär signal



Transient signal

Insvängningsförlopp      Stationär signaldel



# SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

Enhetssteget  $u(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$



Används ofta

1) Vid studie av systemets stegsvar  $g(t)$

2) Vid definition av signaler i olika tidsintervall,

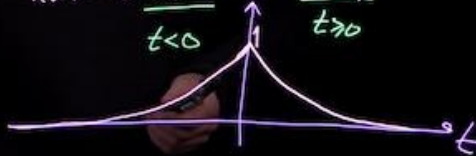
$$x(t) = 2(u(t+3) - u(t+1)) + e^{-t} \cdot u(t)$$



Annars def:  $u_0(t) = \begin{cases} 1; & t > 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$ ;  $u_0(-t) = \begin{cases} 1; & t < 0 \\ 0; & t > 0 \end{cases}$

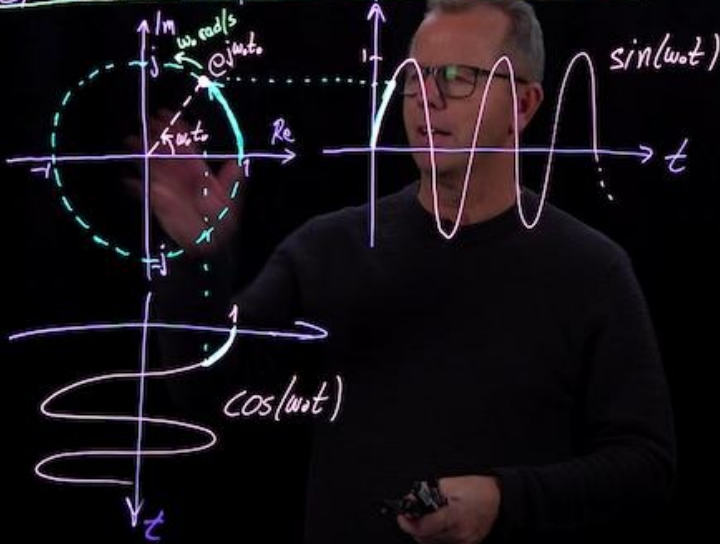


$$x(t) = \begin{cases} e^t u_0(-t) & t < 0 \\ e^{-t} u(t) & t > 0 \end{cases}$$



# SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

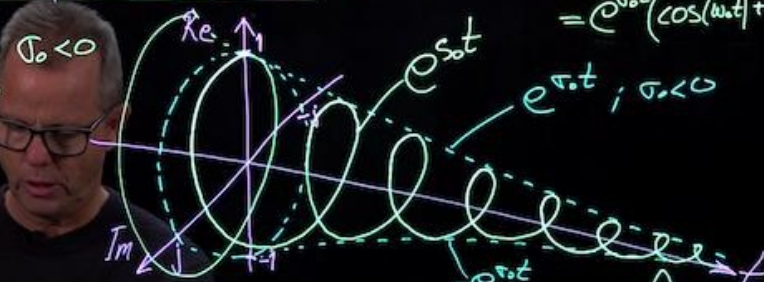
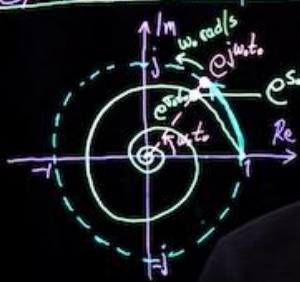
Generella komplexa exponentialfunktioner  $e^{s_0 t} = /s_0 = \sigma_0 + j\omega_0/ = e^{\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t}$   
 $= e^{\sigma_0 t} (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t))$



# SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

Generella komplexa exponentialfunktioner

$$e^{st} = /s_0 = \sigma_0 + j\omega_0/ = e^{\sigma_0 t} \cdot e^{j\omega_0 t} = e^{\sigma_0 t} (\cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t))$$



$s_0 = 0 \Rightarrow K \cdot e^{st} = K$

$\text{Re}\{e^{st}\} = \frac{e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t)}{= /s_0 = 0/} = \cos(\omega_0 t)$



$\omega_0 = 0 \Rightarrow e^{st} = e^{\sigma_0 t}$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds$$

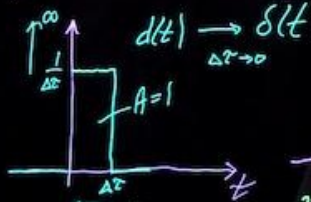
$s = j\omega$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

# SIGNALMODELLER - DE VIKTIGASTE

## Diracimpulsen $\delta(t)$

Gränsvärdetolkning:



$$\int_{-\infty}^{\infty} 3\delta(t-2) dt = 3 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2) dt = 3 \cdot 1 = 3$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \Rightarrow \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Paul Diracs egen definition:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad \forall t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

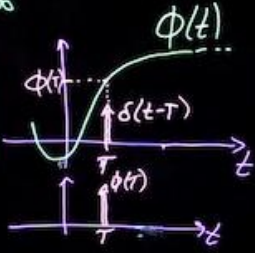
Diracs definition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) \delta(t-\tau) dt = \phi(\tau)$$

$$= \phi(\tau) \delta(t-\tau)$$

Annor viktig egenskap:

$$\begin{aligned} \delta(a \cdot t) &= \frac{1}{|a|} \delta(t) & \delta(\omega - \omega_0) &= \\ & & \delta(2\pi(f - f_0)) &= \\ & & = \frac{1}{2\pi} \delta(f - f_0) & \end{aligned}$$



Exempel:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

# SYSTEMEGENSKAPER

( $\mathcal{L}$  = systemoperatorn)

## LINJÄRITET



Låt  $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ ,  $a, b, \mathbb{R}$

Systemet är linjärt om  $y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

Alt. formulering:  $\mathcal{L}\{a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{x_1(t)\} + b \cdot \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

Linjärt  $\Rightarrow$  Homogent:  $\mathcal{L}\{a \cdot x(t)\} = a \cdot \mathcal{L}\{x(t)\}$

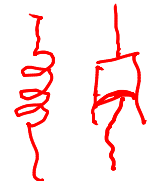
Additivitet:  $\mathcal{L}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \mathcal{L}\{x_1(t)\} + \mathcal{L}\{x_2(t)\}$

Annars är systemet icke-linjärt

Viktig linjäritetskonsekvens:

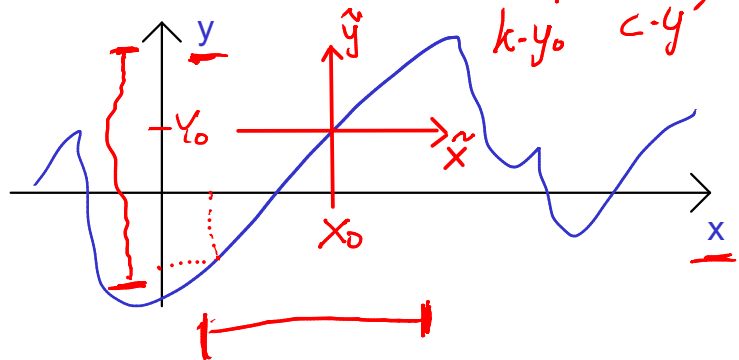
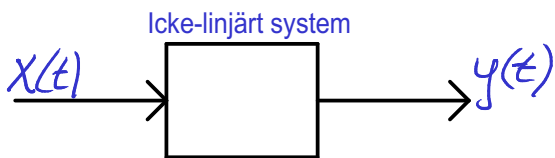
Om  $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$

Anv. vid motbevis

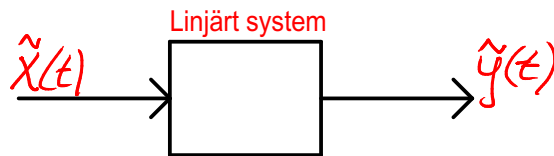


$F_p = F_d = c \cdot y'$

De flesta fysikaliska system är inte linjära.



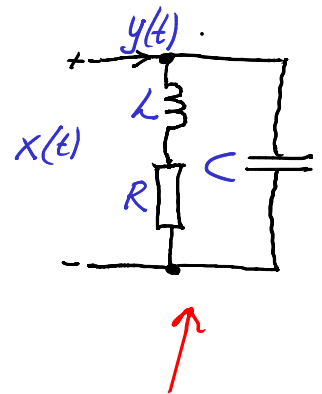
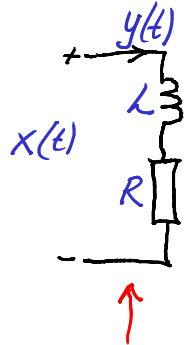
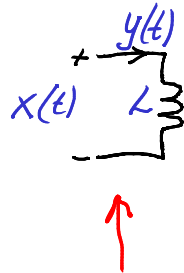
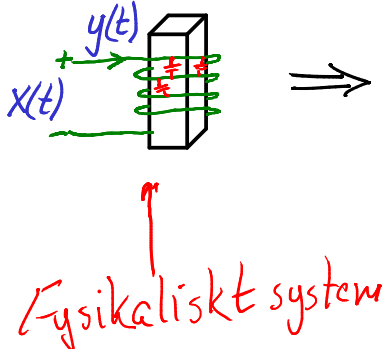
Linjärisera  $\Rightarrow$



Exempel:

## Spole

## Olika linjära modeller





## Exempel – test av linjäritet

(betrakta energifritt system)

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} \Rightarrow y_n(t) = \mathcal{H}\{x_n(t)\}$$

Låt  $x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$  Om linjärt  $\Rightarrow y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$

---

①  $y(t) = t \cdot x(t-4)$   $\Rightarrow y_n(t) = t \cdot x_n(t-4)$   
 $y(t) = t(a \cdot x_1(t-4) + b \cdot x_2(t-4)) = a \cdot \underbrace{t \cdot x_1(t-4)} + b \cdot \underbrace{t \cdot x_2(t-4)}$   
 $= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$   
 $\Rightarrow$  Systemet är linjärt

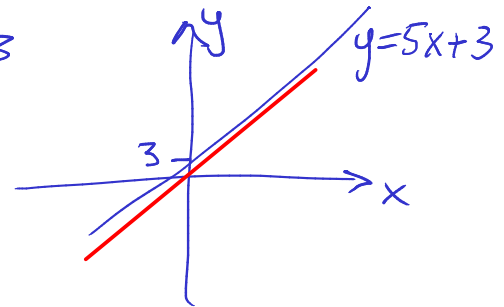
②  $y(t) = 5x(t) + 3$   $\Rightarrow y_n(t) = 5x_n(t) + 3$

Test: låt  $x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 3$   
 $\neq 0$

$\Rightarrow$  Systemet är icke-linjärt

Testa själv:  $y(t) = 5(a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)) + \underline{\underline{3}}$

= - - - -



③  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt}$   $\Rightarrow \frac{dy_n(t)}{dt} + 2y_n(t) = 3 \frac{dx_n(t)}{dt}$   
 $(y_n' + 2y_n = 3x_n')$  \*

$x = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$

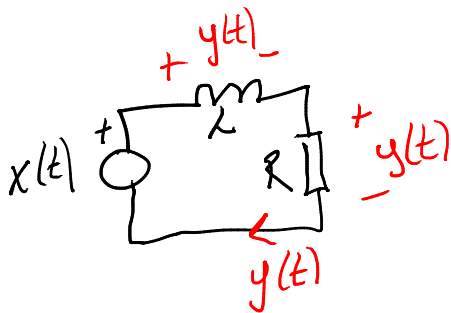
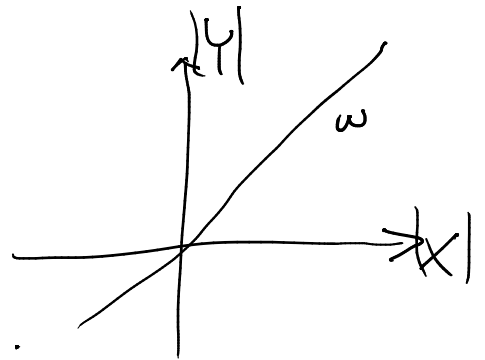
Hz:  $3x' = 3(a \cdot x_1 + b \cdot x_2)' = a \cdot 3x_1' + b \cdot 3x_2' =$   
 $= a(y_1' + 2y_1) + b(y_2' + 2y_2)$   
 $= (ay_1 + by_2)' + 2(a \cdot y_1 + b \cdot y_2) = \text{diff. ehv}$   
 $= y' + 2 \cdot y$

Identifiziere  $\Rightarrow y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$

$\Rightarrow$  Systemet är linjärt.

$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$Y(\omega) = j\omega \cdot X(\omega)$



$\frac{dy(t)}{dt} + a \cdot y(t) = b \frac{dx(t)}{dt} + c \cdot x(t)$

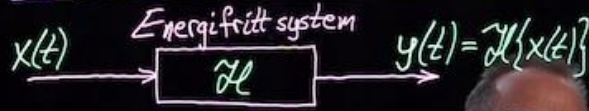
$a = Rk$

m  
k  
c

# SYSTEMEGENSKAPER

( $\mathcal{A}$  = systemoperatorn)

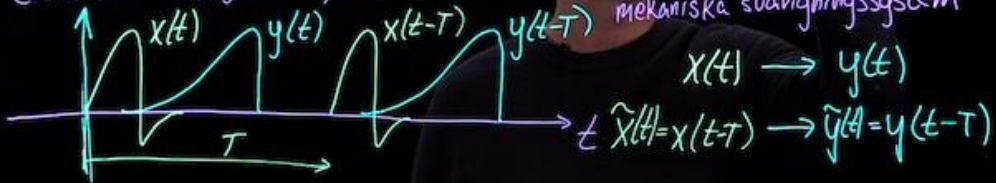
**Tidsinvarians**



**LTI-system**

Systemparametrarna för ett tidsinvariant system är konstanta  
 T.ex. R, L, C för elektriska nät/system, dämpn. konstant & fjäderkonstant hos mekaniska svängningssystem

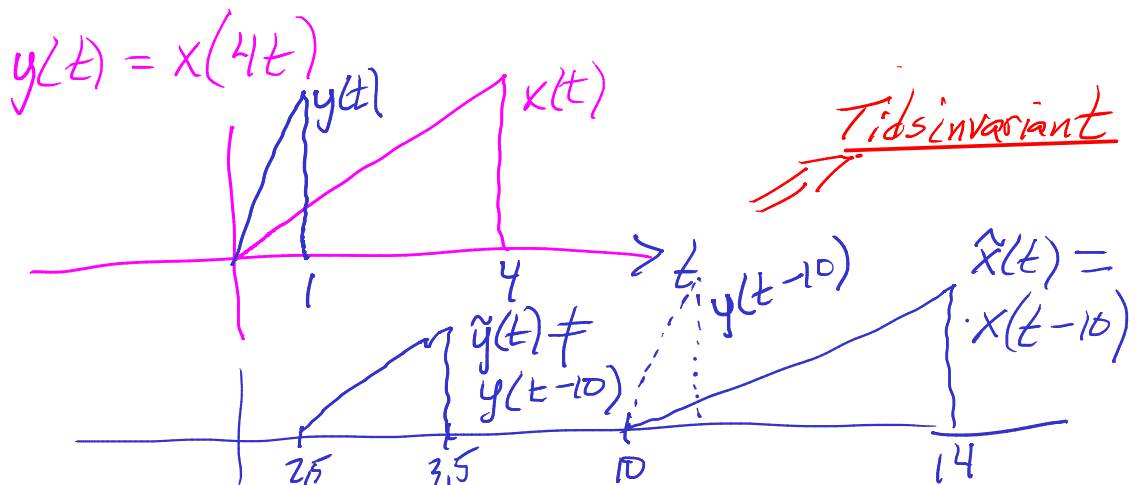
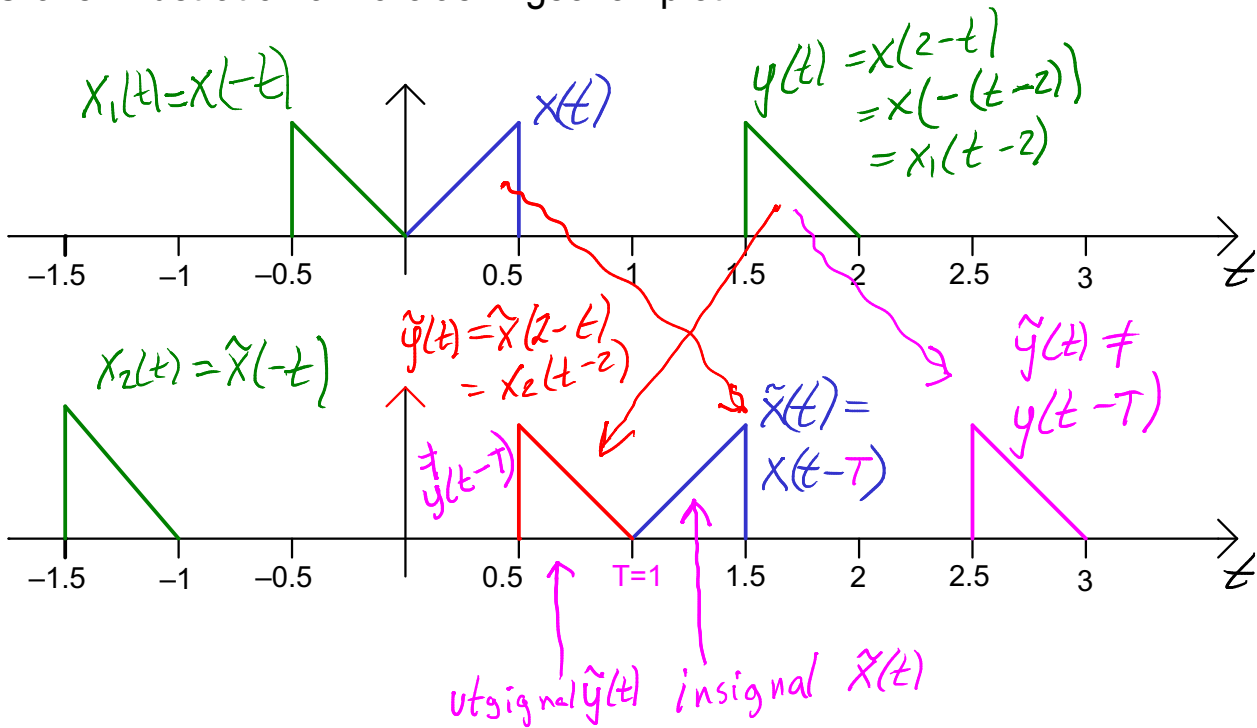
Konsekvens:



Testmetod:

$y(t) = x(2-t)$  ①      Låt  $\tilde{x}(t) = x(t-T)$  ②  
 $\Rightarrow \tilde{y}(t) \stackrel{①}{=} \tilde{x}(2-t) \stackrel{②}{=} x(2-t-T) = x(2-(t+T)) \stackrel{①}{=} y(t+T) \neq y(t-T)$   
 $\Rightarrow$  Systemet är tidsvariant (tidsvariabelt)

Grafisk illustration av föreläsningsexemplet



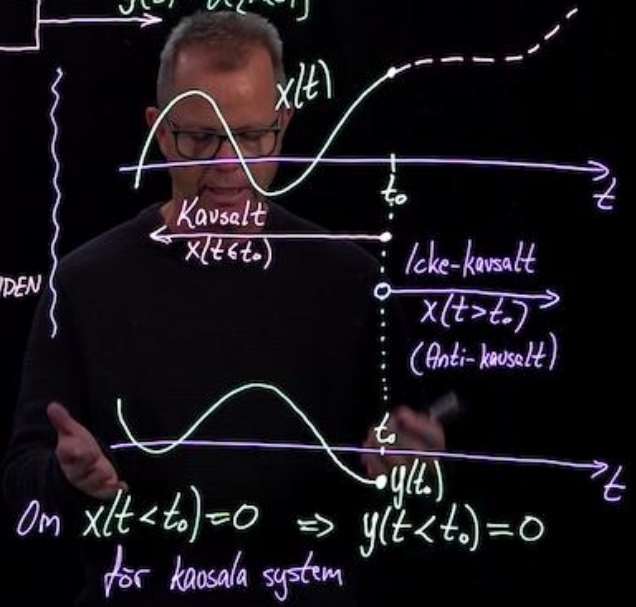
# SYSTEMEGENSKAPER ( $\mathcal{A}$ = systemoperatören)

## Kausalitet



Handlar om vilken del av insignalen som utsignalen beror på.  
 Kausalt system  $\Rightarrow$  Utsignalen  $y(t)$  beror inte på insignalens,  $x(t)$ , framtida värden.

SYSTEMEGENSKAP	$y(t)$ beror på $x(t \leq t_0)$ ?	$y(t_0)$ beror på $x(t > t_0)$ ?
Kausalt	JÄ	NEJ
Icke-kausalt	Eventuellt	JÄ
Spec. fall: Anti-kausalt	NEJ	JÄ



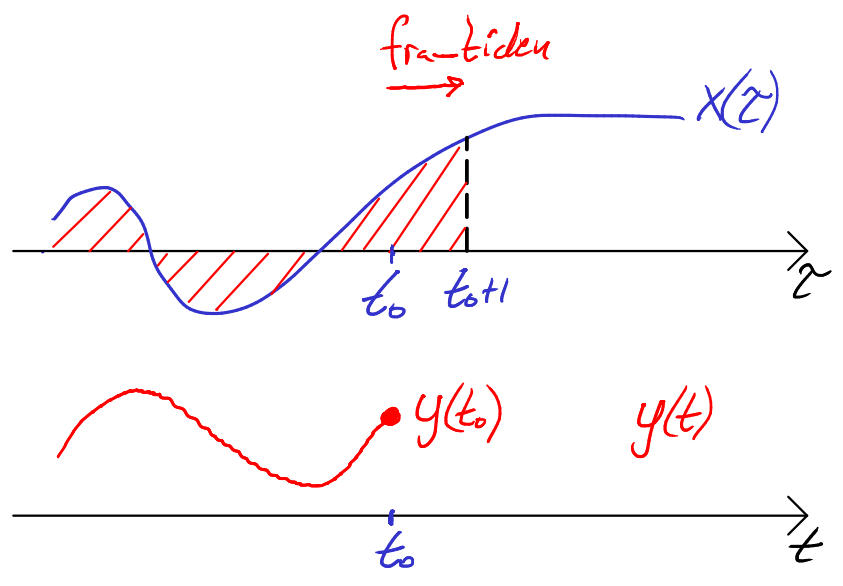
## Exempel

①  $y(t) = \sqrt{x(t-2)}$

Kausalt

②  $y(t) = \int_{-\infty}^{t+1} x(\tau) d\tau$

Icke-kausalt



③  $y(t) = x(t+3)$

Icke-kausalt

Anti-kausalt

④  $y(t) = x(-t)$

$y(3) = x(-3)$   
 $y(-4) = x(4)$

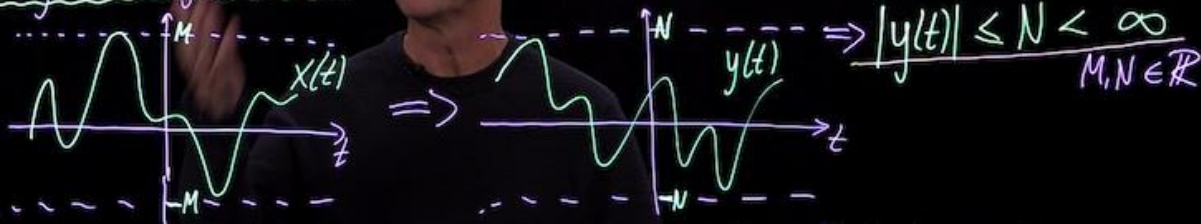
Icke-kausalt

# SYSTEMEGENSKAPER ( $\mathcal{A}$ = systemoperatorn)

## Stabilitet



Insignal-utsignalstabil (BIBO-stabil) system om  $|x(t)| \leq M < \infty$



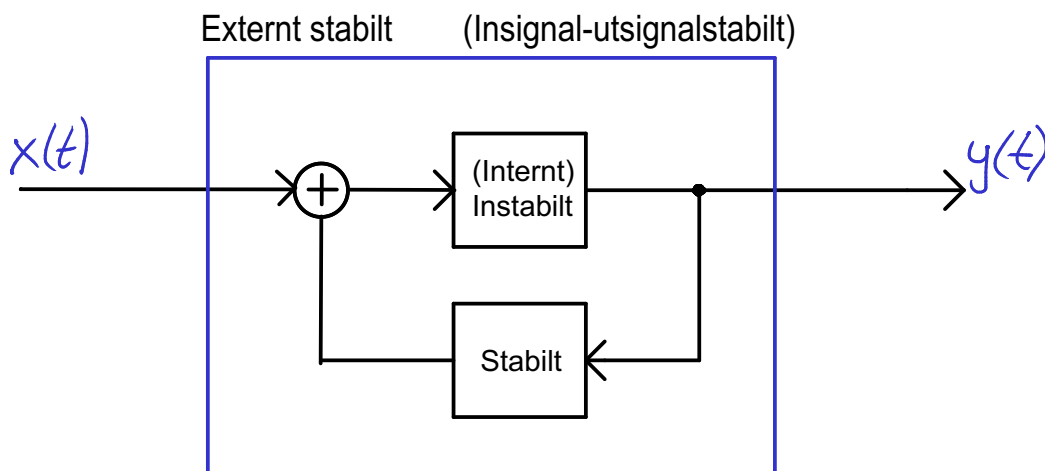
- Marginellt stabilt system: BIBO-stabilt för de flesta begränsade insignaler, men minst en begränsad insignal ger icke-begränsad utsignal
- Instabilt system: Ingen begränsad insignal resulterar i en begränsad utsignal.

## Exempel:

- ①  $y(t) = 5x(t-2) + 3$  Stabilt
  - ②  $y(t) = \frac{dx(t-3)}{dt}$   $|y| \neq |x|$  utom om  $x(t)$  inneh. diskontinuitet(er)  $\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \delta(t)$   
Marginellt stabilt
  - ③  $\frac{dy(t)}{dt} - y(t) = x(t)$ 
    - Stabilt om icke-kausalt
    - Instabilt om kausalt
- Se senare i kursen!

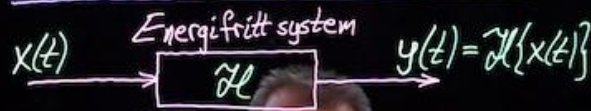
Stabilisering av instabila system med hjälp av återkoppling

(kommer senare i kursen)



# SYSTEMEGENSKAPER

( $\mathcal{A}$  = systemoperatorn)

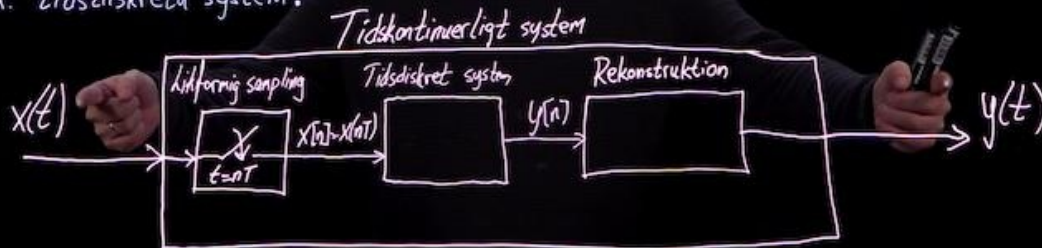


Tidskontinuerliga system

Tidsdiskreta system



Tidskontinuerliga system modelleras/implementeras ofta m.h.a. tidsdiskreta system:



Tidskontinuerlig signal – Signalen är kontinuerlig längs tidsaxeln

Analog signal – Signalen kan anta alla värden

Tidsdiskret signal – Signalen är diskret längs tidsaxeln

Digital signal – Signalens värden är diskretiserade  
(t.e.x. på grund av binär representation)