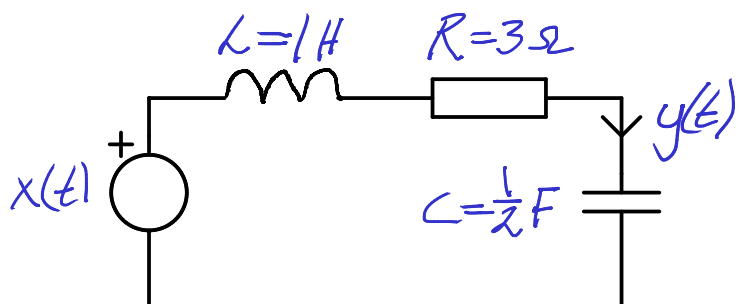


## Signaler & System – Föreläsning 3:

- \* Avslutning Tidsdomänanalys av tidskontinuerliga LTI-system
- \* LTI-system med periodisk insignal – Fourierserieanalys

Tidigare exempel:



$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -5$$

$$\Rightarrow \underline{y_{zi}(t) = -5e^{-t} + 5e^{-2t}; \quad t \geq 0}$$

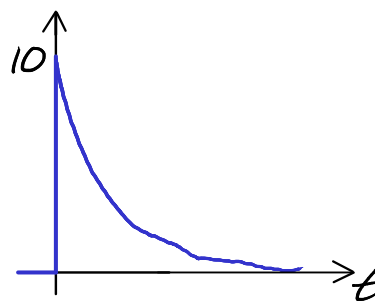
Man kan visa att detta LTI-system

har impulssvar  $\underline{h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t)}$

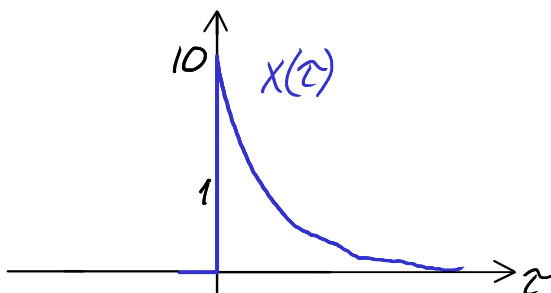


Låt insignalen vara

$$\underline{x(t) = 10e^{-3t} \cdot u(t)}$$



Beräkna den totala utsignalen  $\underline{y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)}$



$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

## Klassisk differentialekvationslösning

$x(t)$  → LTI-system →  $y(t)$        $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$       (1)

Vid differentialekvationsbeskrivning:       $y(t) = y_n(t) + y_\phi(t)$       (2)

- $y_n(t)$  = "Natural response" = **Homogen lösning**  $y_{\text{hom}}(t)$ , oberoende av  $x(t)$
- $y_\phi(t)$  = "Forced response" = **Partikulärlösning**  $y_{\text{part}}(t)$ , beror på  $x(t)$

### Oftast är (1) att föredra framför (2):

- (1)  $\Rightarrow$  initialtillstånden för  $y_{zi}(t)$  krävs vid  $t = 0^-$     (2)  $\Rightarrow$  initialtillstånd krävs vid  $t = 0^+$
- $y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$  kan delas upp i  $y_n(t) + y_\phi(t)$ , men inte tvärtom
- (2) är begränsad till vissa insignalstyper, med kända ansättningar av  $y_\phi(t)$
- Dock:  $y_\phi(t)$  är mycket intressant & lätt att beräkna för vissa centrala insignalstyper!

# Stabilitet – för LTI-system

## Stabilt system:

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal.

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \textcircled{1}$$

## Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \textcircled{2}$$

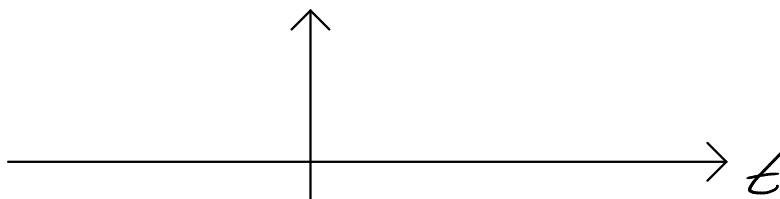
## Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \textcircled{3}$$

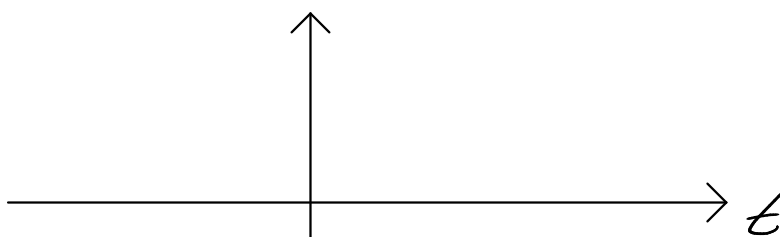
①

Ex. på impulssvar  $h(t)$  för stabilt system:



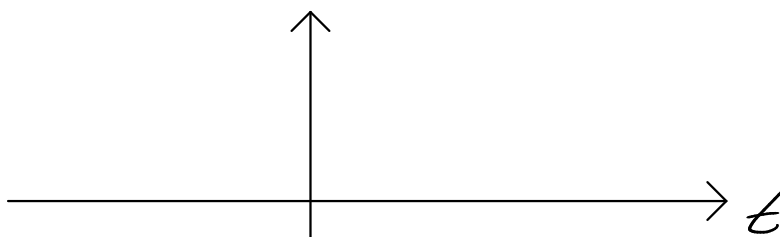
②

Ex. på impulssvar  $h(t)$  för marginellt stabilt system:



③

Ex. på impulssvar  $h(t)$  för instabilt system:



# LTI-system med periodisk insignal – Fourierserieanalys

VIDEO 1

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSGNALER

Stabilt energifritt LTI-system

$X(t)$ 
→

$h(t)$

→
 $y(t) = y_{zs}(t)$

$X_n(t)$ 
 $y_n(t)$

$$X(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \xrightarrow{\text{LINJÄRT}} y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

$a_n \in \mathbb{C}$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \xrightarrow{\text{LTI}} y_{zs}(t) = (x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$


---

$X(t) = \cos(\sin(\omega_0 t)) \rightarrow y_{zs}(t) = ?$

Allmän  $T_0$ -periodisk  $X(t) \rightarrow y_{zs}(t) = ?$

Med fourierseriebeskrivning:  $X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \xrightarrow{X_{eff}(t)} y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \underbrace{H(jn\omega_0)}_{a_n = y_n(t) = ?}$

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INSGNALER

Stabilt energifritt LTI-system

$X(t)$ 
→

$h(t)$

→
 $y(t) = y_{zs}(t)$

$X_n(t)$ 
 $y_n(t)$

$X(t) = X(t - T_0)$

$X(t)$  är en fysikalisk  $T_0$ -periodisk signal  $\Rightarrow X(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

$\Rightarrow$  Fourierserieutveckling av  $X(t)$

kompakt form

Exponentialform

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ; grundvinkelfrekvens  
 $= 2\pi f_0$ ;  $f_0$  = grundfrekvens

Delton  $n$ :  $X_n(t) = C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$   
 Grundton  $X_1(t) = C_1 \cdot \cos(\omega_0 t + \theta_1)$ ;  
 $n > 1$   $X_n(t)$ ; övertoner

Komplexa fourierseriekoefficienter

$C_0 = D_0$ : medelvärde

$D_{n>1} = \frac{C_n}{2} e^{j\theta_n}$

$D_{n<-1} = D_n^*$  om  $X(t) \in \mathbb{R} \forall t$

$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} X(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$

VIDEO 2.1

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INNSIGNALER

Stabilit energifritt LTI-system

$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) = y_{ps}(t)$

$x(t) = x(t+T_0)$

$x(t)$  är en fysikalisk  $T_0$ -periodisk signal  $\Rightarrow x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$

Enkelsidigt amplitud- & fasspektrum

$C_n = 2|D_n|$

$\theta_n = \arg D_n$

Dubbelsidigt amplitud- & fasspektrum

$D_{-n} = D_n^* \Rightarrow |D_{-n}| = |D_n|$

$\arg D_{-n} = -\arg D_n$

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INNSIGNALER

Stabilit energifritt LTI-system

$X(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y(t) = y_{ps}(t)$

Signal (medel)effekten för en  $T_0$ -periodisk signal

$T = k \cdot T_0$

$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot T_0} \int_{-kT_0/2}^{kT_0/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k \cdot T_0} \cdot k \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt$

$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m^* e^{-jm\omega_0 t} \right) dt = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_n D_m^* \int_{-T_0/2}^{T_0/2} e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$

$= \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n D_n^* = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$

Parsevals formel:  $\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$

$\begin{cases} T_0 & ; n=m \\ 0 & ; n \neq m \end{cases}$

Som jag skriver i videobeskrivningen, så ska  $1/T_0$  bort!

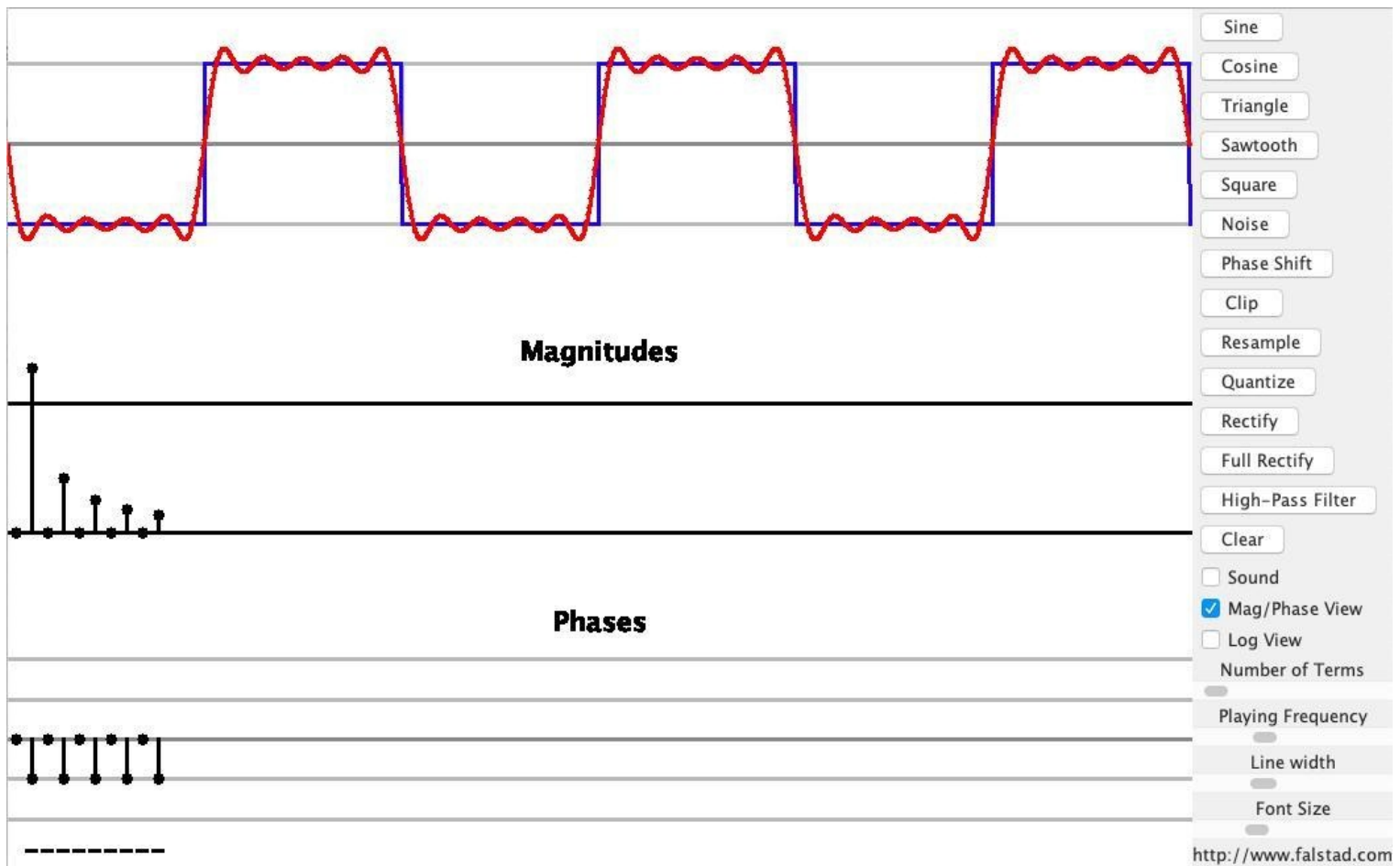
Parsevals formel/teorem:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$

Signaleffekten till och med delton M (vinkelfrekvens  $M\omega_0$ ):

# DEMO – enkelsidigt spektrum för olika signaler

(Testa själv på [www.falstad.com/fourier](http://www.falstad.com/fourier))



Du kommer själv att få undersöka något liknande i Laboration 1!

LTI-SYSTEM MED PERIODISKA INIGNALER

$T_0$ -periodisk:  $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$  (where  $D_n$  are Fourier coefficients  $a_n$  and  $x_n(t)$ )

Stabilit energifritt LTI

Block diagram:  $x(t) \rightarrow h(t) \rightarrow y_{zs}(t) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathcal{L}\{e^{jn\omega_0 t}\}$

$y_n(t) = \mathcal{L}\{e^{jn\omega_0 t}\} = e^{jn\omega_0 t} * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0(t-\tau)} h(\tau) d\tau = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-jn\omega_0 \tau} d\tau \right] e^{jn\omega_0 t} = H(n\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$

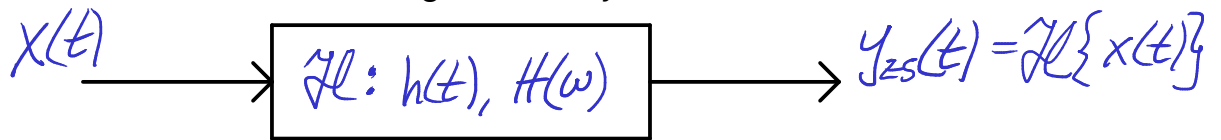
$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  = LTI-systemets frekvensfunktion

$\mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega)|_{\omega=n\omega_0}$

$\Rightarrow y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t}$  där  $\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$

$y_{zs}(t)$  är också  $T_0$ -periodisk med komplexa fourierserrekoefficienter  $\hat{D}_n$

Stabilit energifritt LTI-system



$x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = H(\omega_0) e^{j\omega_0 t}$

$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t} \Rightarrow y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t}$

där  $\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$

$x(t) = C_0 \Rightarrow y_{zs}(t) =$

$x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow y_{zs}(t) =$

$x(t) = C_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$

$\Rightarrow y_{zs}(t) =$





Beräkningsvägar vid beräkning av utsignalen och dess spektrum för LTI-system med periodisk insignal

$T_0$ -periodisk insignal,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Stabilt (energifritt)  
LTI-system

$T_0$ -periodisk utsignal

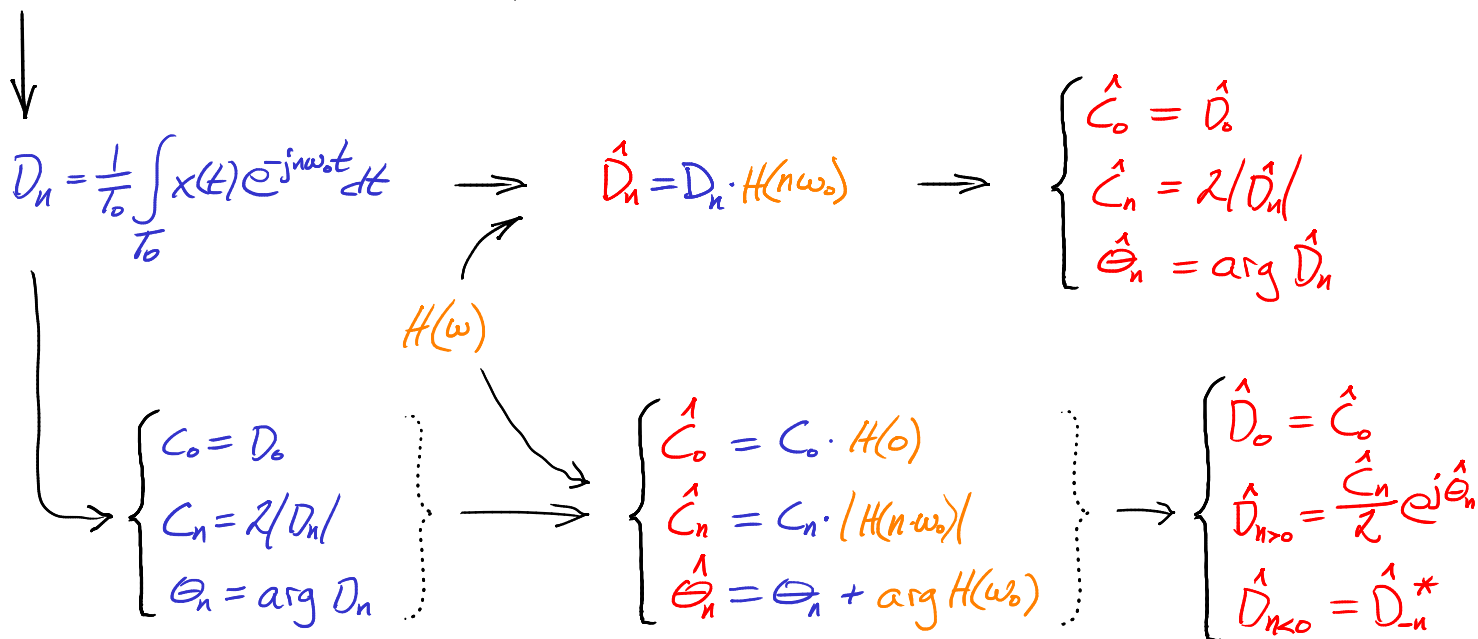
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$= \hat{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \cdot \cos(n\omega_0 t + \hat{\theta}_n)$$

$x(t)$  (given grafiskt eller analytiskt under en period)



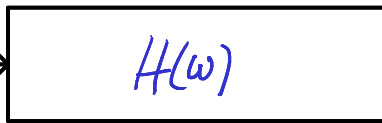
# Några EXEMPEL, LTI-system med periodisk insignal

$T_0$ -periodisk insignal,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Stabilt (energifritt)  
LTI-system

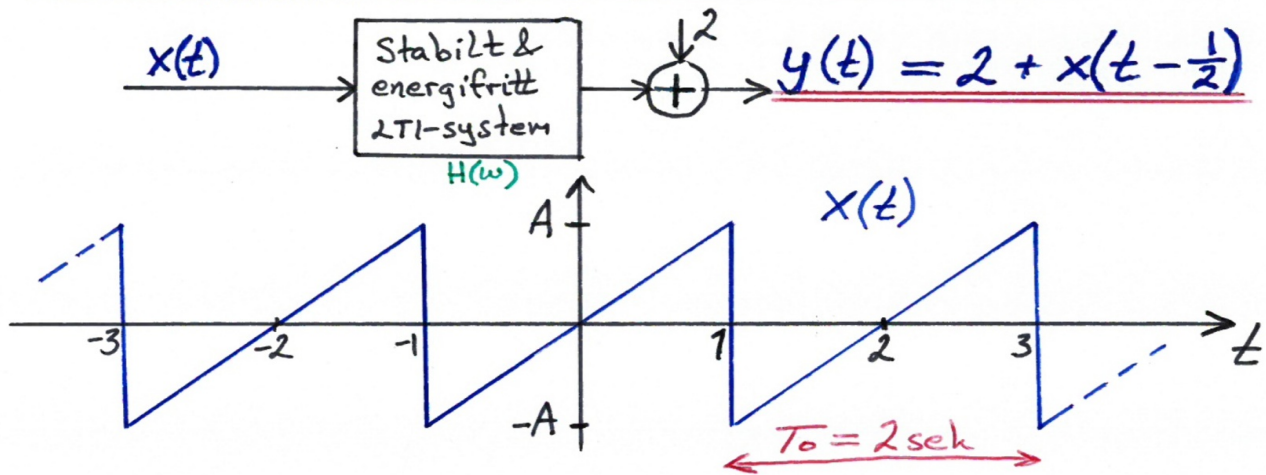


$T_0$ -periodisk utsignal

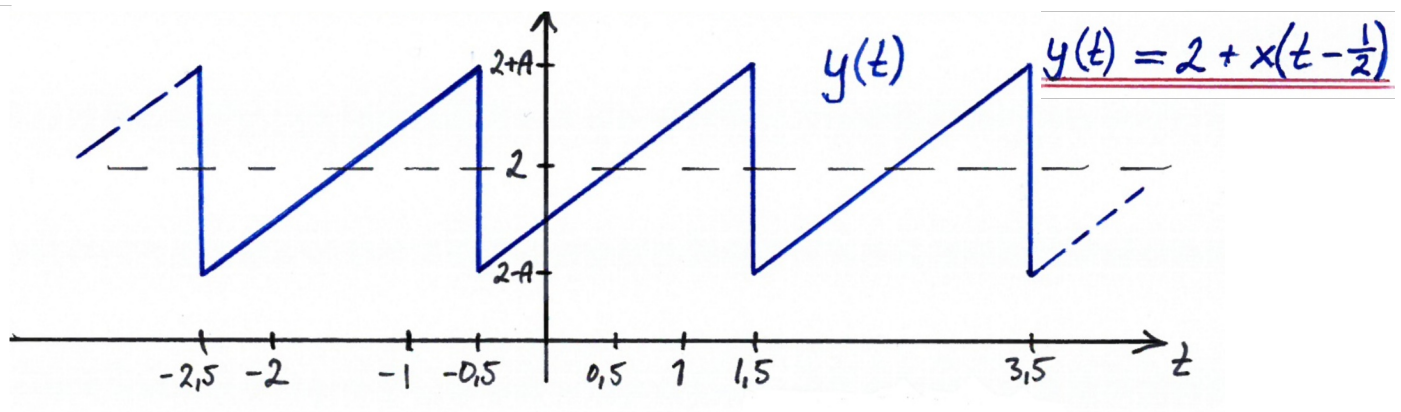
$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$$

# EXEMPEL, LTI-SYSTEM & PERIODISK INSIGNAL



Beräkna och rita både enkelsidigt och dubbelsidigt amplitudspektrum och fasspektrum för  $y(t)$ .



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ där } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad/s}$$

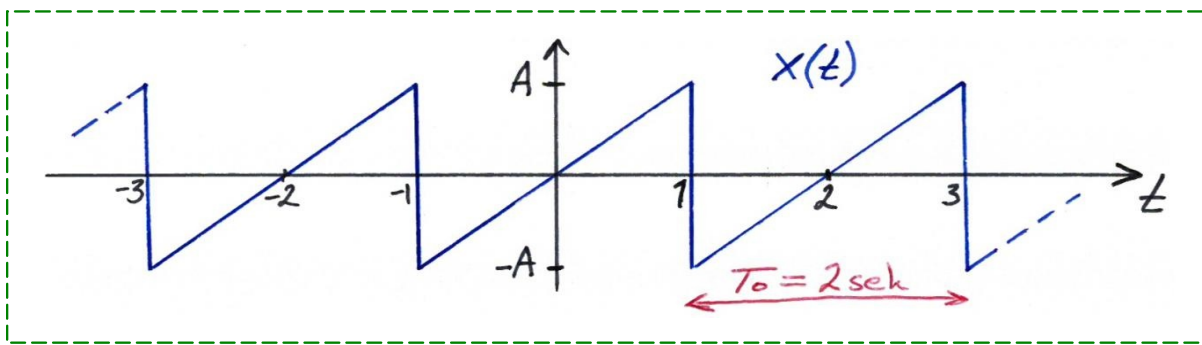
$$\Rightarrow y(t) = 2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\pi(t-\frac{1}{2})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\pi t}$$

$= D_n \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} \cdot e^{jn\pi t}$ 
↑  $y(t)$  är också  $T_0$ -periodisk

där

$$\begin{cases} \hat{D}_0 = 2 + D_0 \cdot e^{-j0 \cdot \frac{\pi}{2}} = 2 + D_0 \\ \hat{D}_n = D_n \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}} ; n \neq 0 \end{cases} \quad (\star)$$

$= D_n \cdot H(n\omega_0), \text{ där } H(n\omega_0) = e^{-jn\frac{\pi}{2}} \quad (H(\omega) = e^{-j\frac{\omega}{2}})$



dar  $D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A \cdot t \cdot e^{-jn\pi t} dt$

= Partiell integration - se formelsamlingen, sid 3:  
 $\int t \cdot e^{at} dt = \frac{e^{at}}{a^2} (at - 1)$ ; Här:  $a = -jn\pi$

=  $\frac{A}{2} \left[ \frac{e^{-jn\pi t}}{(-jn\pi)^2} (-jn\pi t - 1) \right]_{-1}^1$  ( $n \neq 0$ , ty division med  $n^2$ )

=  $\frac{A}{-2n^2\pi^2} (e^{-jn\pi} (-jn\pi - 1) - e^{jn\pi} (jn\pi - 1))$   $\left( \begin{array}{l} e^{\pm jn\pi} = \\ (e^{\pm j\pi})^n = (-1)^n \end{array} \right)$

=  $\frac{A}{-2n^2\pi^2} (-jn\pi 2(-1)^n + 0) = \underline{\underline{\frac{jA(-1)^n}{n\pi}}}$ ;  $n \neq 0$

$D_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \underbrace{e^{-j0\omega_0 t}}_{=1} dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 A \cdot t dt = \underline{\underline{0}}$  (Erhålls även direkt från grafen;  $D_0 =$  medelvärde)

dvs.  $\underline{\underline{D_n}} = \begin{cases} \frac{jA(-1)^n}{n\pi} ; n \neq 0 \\ 0 ; n = 0 \end{cases} = \begin{cases} j \cdot \frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{j\frac{\pi}{2}} ; \text{jämna } n > 0 \\ -j \cdot \frac{A}{\pi n} = \frac{A}{\pi n} e^{-j\frac{\pi}{2}} ; \text{udda } n > 0 \\ D_{-n}^* = |D_n| e^{-j\arg D_n} ; \text{alla } n < 0 \\ 0 ; n = 0 \end{cases}$

Tex.  $D_{-7} = D_7^* = |D_7| \cdot e^{-j\arg D_7}$

$\hat{D}_0$  &  $\hat{D}_n$  från (\*) ovan  $\Rightarrow$

$$\hat{D}_0 = 2 + D_0 = 2 + 0 = 2 = 2 \cdot e^{j0} \Rightarrow \begin{cases} |\hat{D}_0| = 2 \\ \arg \hat{D}_0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$n \neq 0 \Rightarrow \hat{D}_n = D_n \cdot e^{jn\frac{\pi}{2}} = \frac{jA(-1)^n}{\pi n} \cdot e^{-jn\frac{\pi}{2}}$$

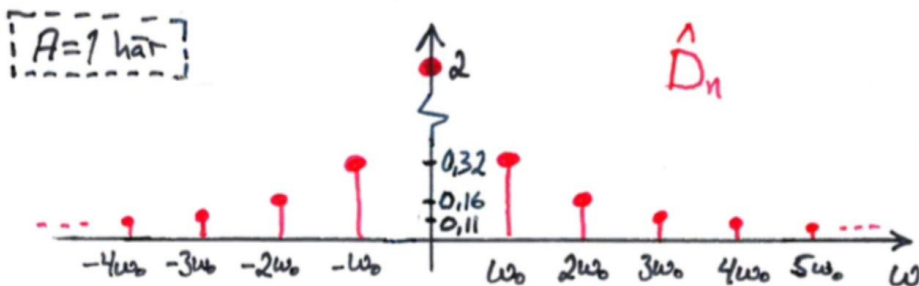
$$= \frac{j = e^{j\frac{\pi}{2}}}{(-1)^n = e^{jn\pi}} = \frac{A}{\pi n} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}(n+1)}$$

$$\Rightarrow |\hat{D}_n| = |D_n| = \frac{A}{\pi \cdot |n|} \quad ; \quad n \neq 0$$

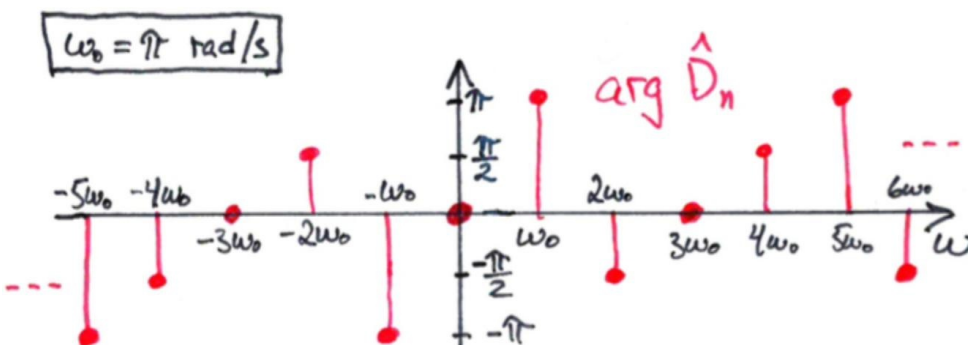
och  $\begin{cases} \arg \hat{D}_n = \frac{\pi}{2}(n+1) & \text{d\u00e5 } n > 0 \\ \arg \hat{D}_n = -\arg \hat{D}_n & \text{d\u00e5 } n < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{3\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{-\pi}{2} & ; n = 2, 6, 10, \dots \\ 2\pi, \text{ dvs. } 0 & ; n = 3, 7, 11, \dots \\ \frac{5\pi}{2}, \text{ dvs. } \frac{\pi}{2} & ; n = 4, 8, 12, \dots \end{cases}$

Dvs.  $|\hat{D}_n|$  och  $\arg \hat{D}_n$  ovan \u00e4r de dubbelsidiga amplitud- och fasspektrumen som efterfr\u00e4ges i uppgiften.

## FREKVENSSPEKTRUM F\u00d6R S\u00c4GTANDSV\u00c4GEN/-FUNKTIONEN



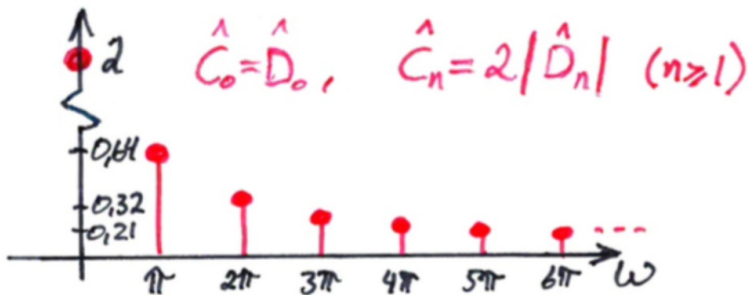
Dubbelsidigt amplitudspektrum



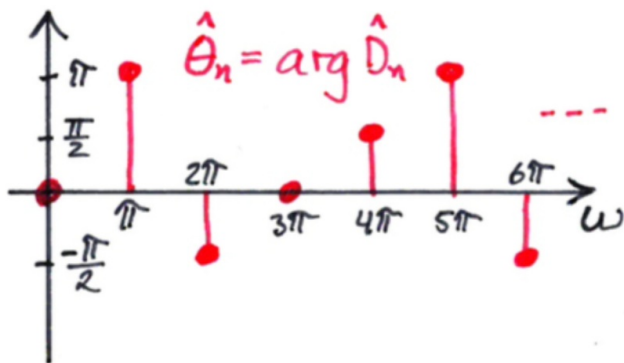
Dubbelsidigt fasspektrum

## Enkelsidigt amplitudspektrum & fasspektrum:

$$\begin{cases} \hat{C}_0 = \hat{D}_0 = 2 \\ \hat{C}_n = 2|\hat{D}_n| = \frac{2A}{\pi n} \quad ; \quad n \geq 1 \\ \hat{\Theta}_n = \arg \hat{D}_n \quad ; \quad n \geq 1, \text{ enligt ovan} \end{cases}$$



Enkelsidigt  
amplitudspektrum

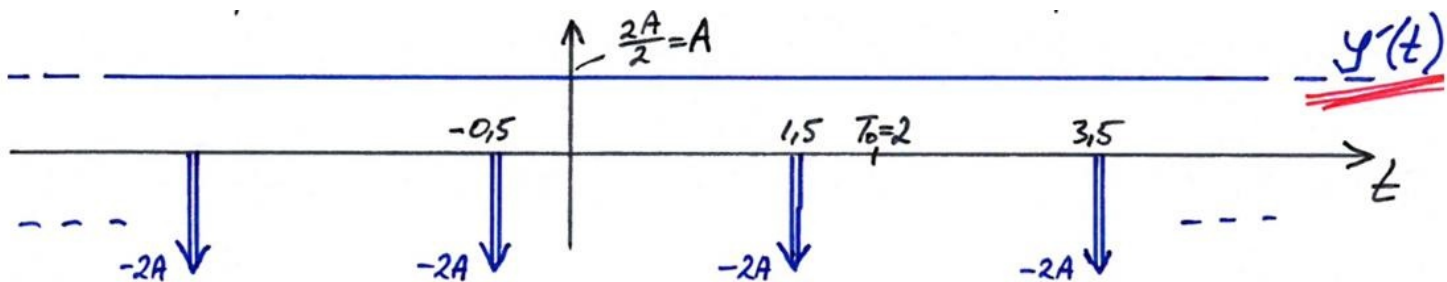
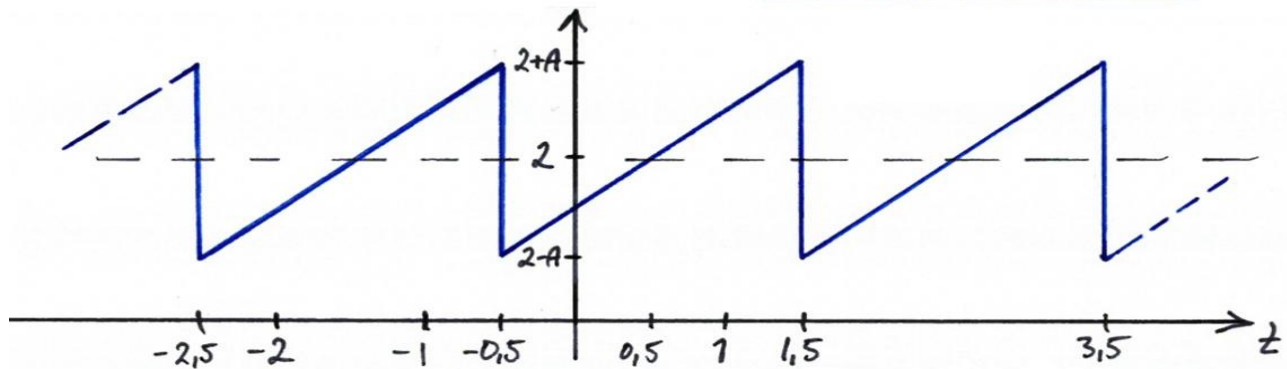


Enkelsidigt  
fasspektrum

Alternativ lösning för beräkning av  $\hat{D}_n$  baserat på sambandet

$D_n = \frac{D_{nx}}{jn\omega_0}$ , där  $D_n$  &  $D_{nx}$  är de komplexa fouriersseriekoefficienterna för  $x(t)$  resp.  $x'(t)$ :

$$\underline{y(t) = 2 + x(t - \frac{1}{2})}$$



Kretsberäkningar med allmän periodiska ström- eller spänningskälla.

Bestäm en ström/spänning  $y(t)$  i kretsen (=LTI-systemet):

1. Den elektriska kretsen  $\Rightarrow$

a. **Komplexschema**  $\Rightarrow$  frekvensfunktion  $H(\omega)$  (kap.7)

eller

b. **Laplaceoperatorschema**  $\Rightarrow$  systemfunktion  $H(s)$  (kap.4)

$\Rightarrow H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$  (kap.4)

2. **Fourierserierutveckla källan**  $x(t)$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

3. Betrakta medelvärdet  $C_0$  och varje delton separat (med **likströmsteori** resp.  **$j\omega$ -metoden**)

**RLC-nät = LTI-system**  $\Rightarrow$  **Summera delkomponenterna!!**

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n e^{jn\omega_0 t} = \hat{C}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{C}_n \cos(n\omega_0 t + \hat{\theta}_n)$$

där  $\hat{D}_n = D_n H(n\omega_0)$  och/alt.  $\begin{cases} \hat{C}_0 = C_0 H(0) \\ \hat{C}_n = C_n |H(n\omega_0)| \end{cases}, \quad \hat{\theta}_n = \theta_n + \arg H(n\omega_0)$

Behöver du repetera grunderna i elektriska kretsar?

Se examinatorns "Extra kursmaterial om elektriska kretsar" (9 sidor) som kan laddas ned från kurswebbsidan