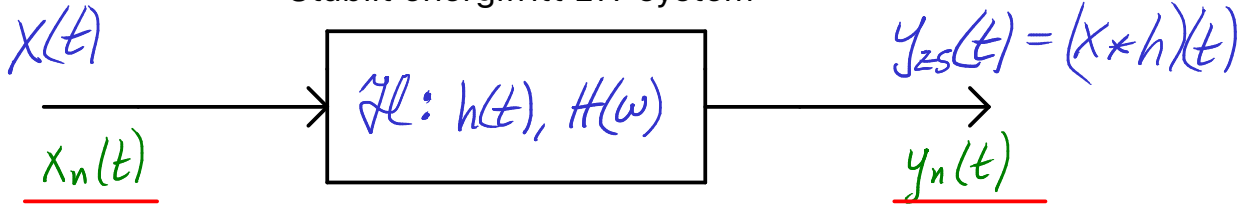


Signaler & System – Föreläsning 4: Fouriertransformanalys av signaler och system

Stabilt energifritt LTI-system



$$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t)$$

linjärt

$$y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

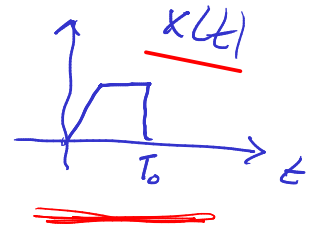
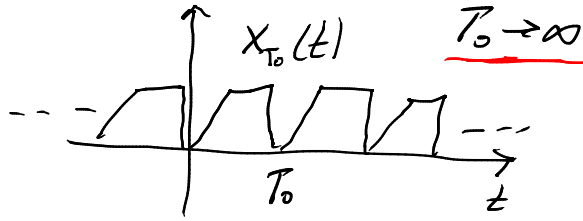
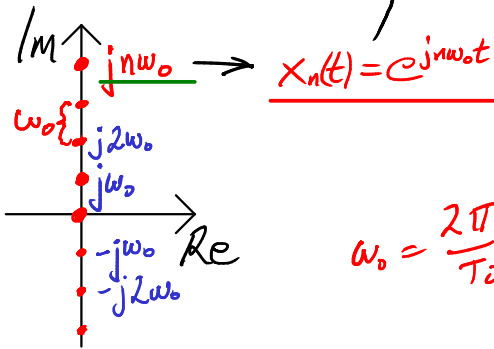
- T_0 -periodisk insignal ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$):

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

linjärt

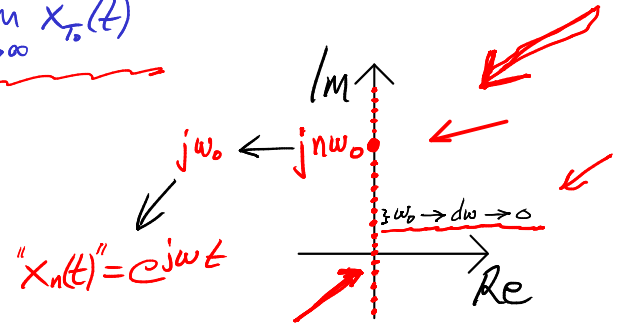
$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$$



- Energisignal (icke-periodisk): $x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \rightarrow d\omega \\ n\omega_0 \rightarrow \omega \\ \sum \rightarrow \int \\ T_0 D_n \rightarrow X(\omega) \end{cases}$$



dvs. $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = Y_{zs}(\omega) = ??$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$$

Fouriertransformanalys av signaler

VIDEO 1

FOURIERTRANSFORMEN

$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$

$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)e^{j\omega t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}}{-j\omega} = \frac{2 \sin(\omega T/2)}{\omega} = T \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$

$\text{sinc}_N(\alpha) = \frac{\sin(\pi \cdot \alpha)}{\pi \cdot \alpha}$

$= T \cdot \frac{\sin(\pi \cdot \frac{\omega T}{2\pi})}{\pi \cdot \frac{\omega T}{2\pi}} = T \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

Exempel: $\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$

BREDD = $\frac{2}{T}$

$\tilde{X}(\omega) = T \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$\tilde{X}(f) = T \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$

$\omega = 2\pi f$

- * Fouriertransformen av en fyrkantpuls (rect).
- * Definition av sinc-funktionen.

$$\tilde{X}(f) = T \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{2\pi f \cdot T}{2\pi}\right) = T \cdot \text{sinc}_N(f \cdot T)$$

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

TOLKNING AV FOURIERTRANSFORMEN

Tidigare video: $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctan \frac{\omega}{a}}$

$x(t) = 3 \cdot e^{-3t} u(t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{3}{3+j\omega}$

$= \frac{3}{\sqrt{3^2+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctan \frac{\omega}{3}} \Rightarrow \begin{cases} |X(\omega)| = \frac{3}{\sqrt{9+\omega^2}} \\ \arg X(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{3} \end{cases}$

$X(\omega) = |X(\omega)| \cdot e^{j\arg X(\omega)}$

$X(0) = 1 \cdot e^{j0}$

$\frac{H(1/s)}{X(3)} = \frac{3}{3+j3} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Amplitudspektrum

Fasspektrum

$|X(\omega)|$

$\arg X(\omega)$

VIDEO 2

- * Tolkning av fouriertransformen – amplitudspektrum & fasspektrum.
- * Nyquistdiagrammet.

FOURIERTRANSFORMEN - EGENSKAP VID TIDSSKALNING

VIDEO 3

$\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \tilde{X}(\omega) = \tau \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$
 $\text{sinc}_N(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$
 (specialfall: $\tau=1$ sek)
 $x(t) = \text{rect}(t) = \tilde{x}(\tau \cdot t)$ ($a=\tau$)
 $X(\omega) = \text{sinc}_N\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$
 $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
 $\mathcal{F}\{x(a \cdot t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(a \cdot t) e^{-j\omega t} dt = \left| \begin{matrix} 1 = a \cdot t : t = \frac{1}{a} \\ \frac{d1}{dt} = a : dt = \frac{d1}{a} \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\frac{\omega}{a} \cdot t} dt = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
 $x(a \cdot t) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Fouriertransformens egenskap vid tidsskalning.

\Rightarrow Tidsskalning $\propto \frac{1}{\text{Frekvensskalning}}$ Demonstration i Matlab!

FOURIERTRANSFORMEN - EGENSKAP VID TIDSFÖRSKJUTNING

VIDEO 4

$\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ $x(t) = \tilde{x}(t - t_0)$
 Vi vet: $\tilde{X}(\omega) = \tau \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) \parallel X(\omega) = ?$
 $\tilde{x}(t - t_0) \Leftrightarrow \tilde{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega t_0}$
 $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $\tilde{x}(t) \Leftrightarrow \tilde{X}(\omega)$
 $x(t) = \tilde{x}(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(\omega) e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega t_0} d\omega$
 $X(\omega) = \tilde{X}(\omega) e^{-j\omega t_0} = |\tilde{X}(\omega)| \cdot e^{j(\arg \tilde{X}(\omega) - \omega t_0)} = |\tilde{X}(\omega)| \cdot e^{j(\arg \tilde{X}(\omega) - \omega t_0)} = |X(\omega)| e^{j(\arg X(\omega))}$
 $|X(\omega)| = |\tilde{X}(\omega)|$
 $\arg X(\omega) = \arg \tilde{X}(\omega) - \omega t_0$

Fouriertransformens egenskap vid tidsförskjutning.

\Rightarrow Påverkar bara fasspektrumet, inte amplitudspektrumet.

SIGNALENERGI & PARSEVALS FORMEL

VIDEO 5

Signalenergin hos en signal $x(t)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

Parsevals formel:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Signalenergin i intervallet $[\omega_1, \omega_2]$: $\Delta E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$

Energi-spektrum

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$z \cdot z^* = |z|^2 \Rightarrow F = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^* dt$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \cdot X(\omega) d\omega$

$X(-\omega) = X^*(\omega)$

Energisignal, signalenergi och Parsevals formel.

NÅGRA FOURIERTRANSFORMER: $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$, $\mathcal{F}\{1\}$

VIDEO 6

$x_1(t) = \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)| dt = 1 < \infty \Rightarrow X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt = e^{j\omega t} \Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

$\delta(t) \Leftrightarrow 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)| dt = \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{x_2(t)\} \nexists$

Låt $X_2(\omega) = 2\pi \delta(\omega) \Rightarrow$

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} = 1$$

$\Rightarrow 1 \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$

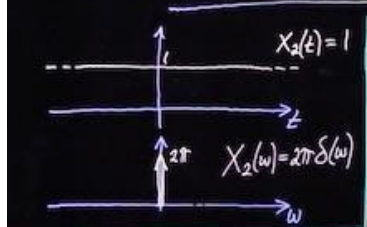
$x_2(t) = 1$

$X_2(\omega) = ?$

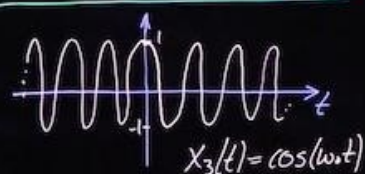
Fouriertransformen av en dirac-impuls och av en konstant.

FOURIERTRANSFORMEN AV EN FREKVENSSIGNAL

VIDEO 7

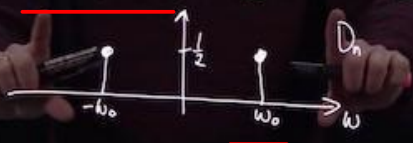
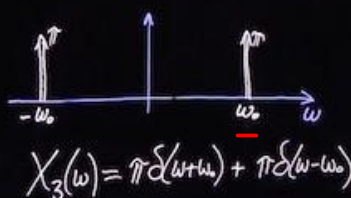


$$\begin{aligned}
 X_3(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_3(w) e^{j\omega t} dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \Big|_{\omega = -\omega_0} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \Big|_{\omega = \omega_0} = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t)
 \end{aligned}$$



$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi (\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} = \sum_n D_n e^{jn\omega_0 t}$$



Fouriertransformen av en cosinus & sinus samt jämförelse med fourierserietvecklingen av en cosinus.

Fouriertransformanalys av LTI-system

VIDEO 8

FALTNINGSTEOREMET & FREKVENSFUNKTIONEN $H(\omega)$

STABILT ENERGIFRITT LTI-SYSTEM

$x(t) \rightarrow X(\omega) \rightarrow h(t), H(\omega) \rightarrow y(t) = y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

$y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

Antag $\int_{-\infty}^{\infty} |y_{zs}(t)| dt < \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{y_{zs}(t)\} \exists$

$\mathcal{F}\{y_{zs}(t)\} = Y_{zs}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{zs}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$

$\lambda = t - \tau \quad t = \lambda + \tau$
 $\frac{d\lambda}{dt} = 1 \quad dt = d\lambda$

$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega(\lambda + \tau)} d\lambda \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = X(\omega) \cdot H(\omega)$

$y_{zs}(t) = ?$

$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \xrightarrow{H(\omega)} Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_{zs}(t)$

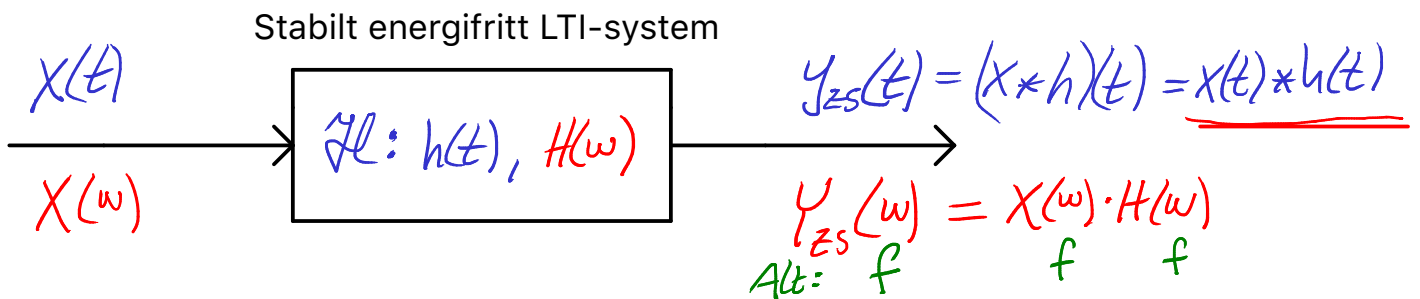
$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(\omega)$

$y_{zs}(t) = (x * h)(t)$

* Härledning av faltningsteoremet.

* Definition av frekvensfunktionen.

* Lösningsvägar för beräkning av utsignalen, i tidsdomänen eller via frekvensdomänen.



Stabilt LTI-system $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \Rightarrow \underline{H(\omega) \exists}$

$\Rightarrow Y_{zs}(\omega) \exists$ för alla $x(t)$ där $X(\omega) \exists$

$\Rightarrow \underline{y_{zs}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y_{zs}(\omega)\}}$

Föreläsningens inledning:

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \xrightarrow{\text{LTI}} y_{zs}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$= Y_{zs}(\omega) \neq 0 \text{ JA!}$

Jämför:

$y_{23}(t) = x(t) * h(t)$
$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n \cdot \omega_0)$
$Y_{23}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

Faltning i tidsdomänen

Multiplikation i frekvensdomänen

AMPLITUDKARAKTÄRISTIK & FASKARAKTÄRISTIK FÖR LTI-SYSTEM

Energi fritt stabilt LTI-system

$x(t) \rightarrow [h(t), H(\omega)] \rightarrow y(t) = y_{23}(t) = (x * h)(t) \Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

$\Rightarrow |Y(\omega)| \cdot e^{j \arg Y(\omega)} = |X(\omega)| \cdot e^{j \arg X(\omega)} \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j \arg H(\omega)} = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j(\arg X(\omega) + \arg H(\omega))}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ut signalens amp. spektrum } |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| : |H(\omega)| = \text{systemets amplitudkaraktäristik} \\ \text{--- faspektrum } \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega) : \arg H(\omega) = \text{--- faskaraktäristik} \end{array} \right.$

Exempel: $x(t) = \text{rect}(\frac{t}{\tau})$

$|Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2$

Energispektra Energiöverföringsfunktion

VIDEO 9

- * Amplitudkaraktäristiken $|H(\omega)|$ och faskaraktäristiken $\arg H(\omega)$ för LTI-system.
- * Energispektrum för en signal & energiöverföringsfunktionen för LTI-system.

$z = r \cdot e^{j\varphi}$

$x(\omega) = |x(\omega)| \cdot e^{j \arg x(\omega)}$

Fouriertransformanalys av LTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

Stabilt LTI-system

$$x(t) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y(t)$$

a) $H(\omega) = \frac{j\omega}{2+j\omega}$

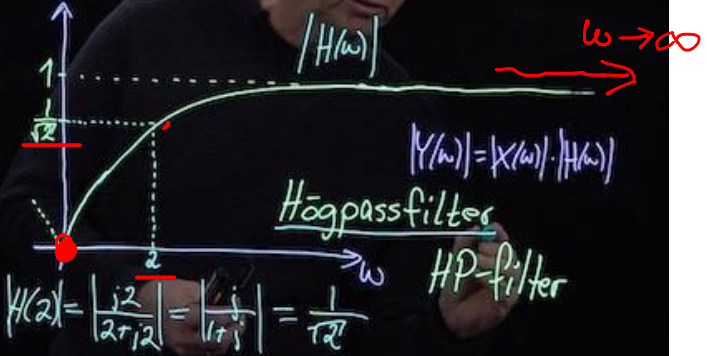
b) $|H(\omega)| = \left| \frac{j\omega}{2+j\omega} \right| = \frac{|\omega|}{\sqrt{2^2+\omega^2}}$

$H(0) = \frac{j0}{2+j0} = 0$

$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{2}{j\omega} + 1} \right| = \frac{1}{0+1} = 1$

Tvunregel: ordn. = 1 : ω ; re = im i nämnaren $\Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$

- a) Beräkna systemets frekvensfunktion $H(\omega)$.
- b) Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och ange vilken typ av frekvensselektivt filter som systemet utgör.
- c) Beräkna & skissera systemets impulssvar $h(t)$.
- d) Ange systemets kausalitetssegenskap.



Ett räkneexempel: För ett LTI-system, där förhållandet mellan utsignalen och insignalen beskrivs av en differentialekvation, så visas följande för LTI-systemet.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

- a) Beräkna systemets frekvensfunktionen $H(\omega)$.
- b) Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och ange filtertyp.

Fouriertransformanalys av LTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

Stabilt LTI-system

$$x(t) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y(t)$$

a) $H(\omega) = \frac{j\omega}{2+j\omega}$

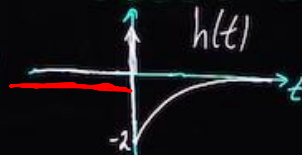
- a) Beräkna systemets frekvensfunktion $H(\omega)$.
- b) Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och ange vilken typ av frekvensselektivt filter som systemet utgör.
- c) Beräkna & skissera systemets impulssvar $h(t)$.
- d) Ange systemets kausalitetssegenskap.



c) $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$ $H(\omega) = j\omega \cdot \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow$

$h(t) = \frac{d}{dt}(\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2t} \cdot u(t)\}) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2t} \delta(t) + (-2)e^{-2t} u(t)\} = \delta(t) - 2e^{-2t} u(t)$

$H(\omega) = \frac{2+j\omega-2}{2+j\omega} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow h(t) = \delta(t) - 2 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\omega}\right\} = \delta(t) - 2e^{-2t} u(t)$



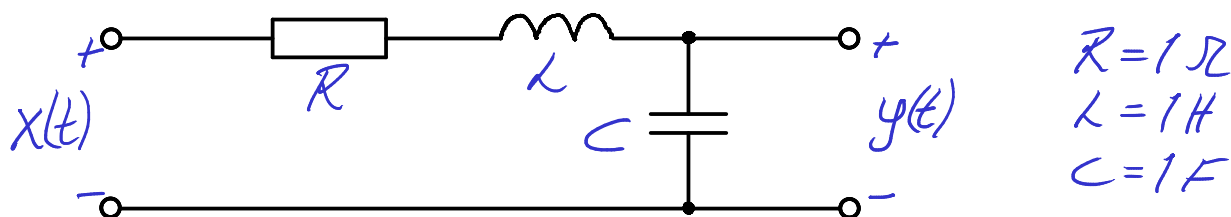
d) $h(t) = 0; t < 0$
 \Rightarrow Systemet är kausalt

- c) Beräkna och skissera systemets impulssvar $h(t)$.
- d) Ange systemets kausalitetssegenskap.

e) stabilitet? $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
OK!

Nästa föreläsning – ett större representativt räkneexempel:

(plus lite till – speciellt digital kommunikation amplitudmodulering som tillämpningsområde)



- a) Beräkna/bestäm LTI-systemets
- * frekvensfunktion $H(\omega)$
 - * impulssvar $h(t)$, samt skissera detta.
 - * kausalitetsegenskap & stabilitetsegenskap.
 - * systembeskrivande differentialekvation.
 - * ordning.
 - * amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$
- b) Skissera amplitudkaraktäristiken och ange/motivera vilken typ av frekvensselektivt filter (LP, BP, HP osv.) det elektriska systemet utgör.
- c) Beräkna utsignalen $y_1(t)$ då insignalen är $x_1(t) = 3 \cdot e^{-2t} \cdot u(t) [V]$ och systemet är energifritt.
- d) Beräkna utsignalen $y_2(t)$ då insignalen är $x_2(t) = 4 + 3 \cos(2t + \frac{3\pi}{4}) [V]$
- e) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$