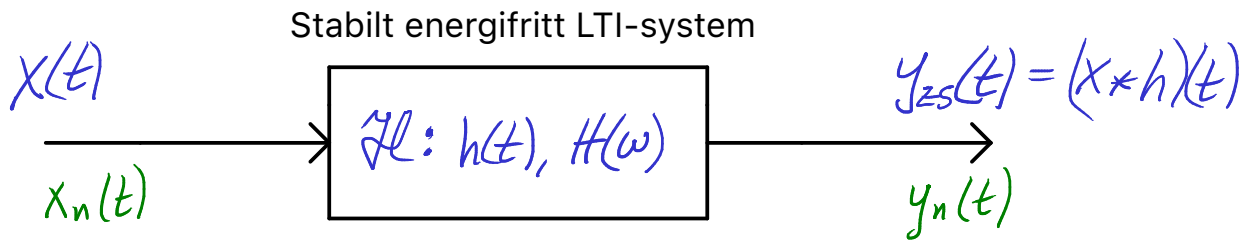


Signaler & System – Föreläsning 4: Fouriertransformanalys av signaler och system



$$x(t) = \sum_n a_n \cdot x_n(t) \quad \xrightarrow{\text{linjärt}} \quad y_{zs}(t) = \sum_n a_n \cdot y_n(t)$$

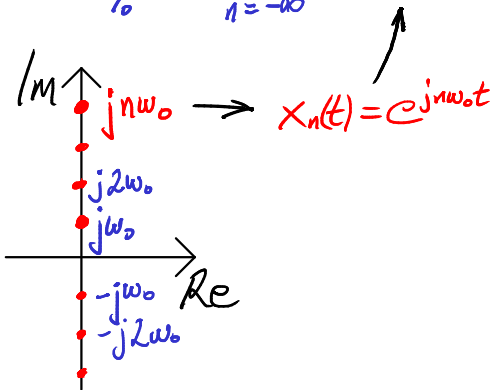
- T_0 -periodisk insignal ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$):

$$x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$\xrightarrow{\text{linjärt}}$

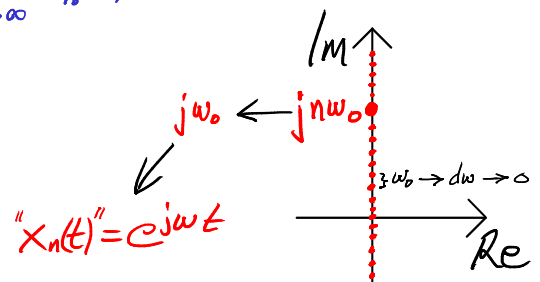
$$y_{zs}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{D}_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

$$\hat{D}_n = D_n \cdot H(n\omega_0)$$



- Energisignal (icke-periodisk): $x(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} x_{T_0}(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_0 \rightarrow d\omega \\ n\omega_0 \rightarrow \omega \\ \sum \rightarrow \int \\ T_0 D_n \rightarrow X(\omega) \end{cases}$$



dvs. $x_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$

$$\downarrow$$

$$\underline{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Fouriertransformanalys av signaler

VIDEO 1

FOURIERTRANSFORMEN

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

Exempel: $\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$
 $= u(t + \frac{1}{2}) - u(t - \frac{1}{2})$

$$\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t)e^{j\omega t} dt = \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{-j\omega} = \frac{2 \sin(\frac{\omega}{2})}{\omega} = \text{sinc}_N(\alpha)$$

$\alpha = \frac{\omega}{2}$

$$\text{sinc}_N(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

$$\text{sinc}_N(\alpha) = \frac{\sin(\pi \cdot \alpha)}{\pi \cdot \alpha}$$

$$= \tau \cdot \frac{\sin(\tau \cdot \frac{\omega}{2\pi})}{\tau \cdot \frac{\omega}{2\pi}} = \tau \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$$

- * Fouriertransformen av en fyrkantpuls (rect).
- * Definition av sinc-funktionen.

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

VIDEO 2

TOLKNING AV FOURIERTRANSFORMEN

Tidigare video: $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{a+j\omega} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctan \frac{\omega}{a}}$

$x(t) = 3 \cdot e^{-3t} u(t) \Rightarrow X(\omega) = \frac{3}{3+j\omega}$

$= \frac{3}{\sqrt{3^2+\omega^2}} \cdot e^{-j\arctan \frac{\omega}{3}} \Rightarrow |X(\omega)| = \frac{3}{\sqrt{9+\omega^2}}$

$\arg X(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{3}$

Amplitudspektrum

Fasspektrum

$|X(\omega)|$

$\arg X(\omega)$

Nyquistdiagrammet

$X(0) = 1 \cdot e^{j0}$

$\frac{H(1/s)}{X(3)} = \frac{3}{3+j3} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$

- * Tolkning av fouriertransformen – amplitudspektrum & fasspektrum.
- * Nyquistdiagrammet.

FOURIERTRANSFORMEN - EGENSKAP VID TIDSSKALNING

VIDEO 3

$\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ \Rightarrow $\tilde{X}(w) = \tau \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{w\tau}{2\pi}\right)$ $\left\{ \text{sinc}_N(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right.$
 Bredd τ sek
 $x(t) = \text{rect}(t) = \tilde{x}(\tau \cdot t)$ $(a = \tau)$
 $X(w) = \text{sinc}_N\left(\frac{w}{2\pi}\right)$ (specialfall: $\tau = 1$ sek)
 $X(w) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$ $x(t) \leftrightarrow X(w)$
 $\mathcal{F}\{x(a \cdot t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(a \cdot t) e^{-j\omega t} dt = \left| \begin{matrix} \lambda = a \cdot t : t = \frac{\lambda}{a} \\ \frac{d\lambda}{dt} = a : dt = \frac{d\lambda}{a} \end{matrix} \right| = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) \cdot e^{-j\frac{\omega}{a} \cdot \lambda} d\lambda = \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
 $x(a \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Fouriertransformens egenskap vid tidsskalning.

\Rightarrow Tidsskalning $\propto \frac{1}{\text{Frekvensskalning}}$ Demonstration i Matlab!

FOURIERTRANSFORMEN - EGENSKAP VID TIDSFÖRSKJUTNING

VIDEO 4

$\tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ $x(t) = \tilde{x}(t - t_0)$ Vi vet: $\tilde{X}(w) = \tau \cdot \text{sinc}_N\left(\frac{w\tau}{2\pi}\right) \parallel X(w) = ?$
 $\tilde{x}(t) \leftrightarrow \tilde{X}(w)$; $\tilde{x}(t - t_0) \leftrightarrow \tilde{X}(w) \cdot e^{-j\omega t_0}$
 $\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(w) e^{j\omega t} dw$ $\tilde{x}(t) \leftrightarrow \tilde{X}(w)$
 $x(t) = \tilde{x}(t - t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(w) e^{j\omega(t-t_0)} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{X}(w) e^{j\omega t} \cdot e^{-j\omega t_0} dw$
 $X(w) = \tilde{X}(w) e^{-j\omega t_0} = |\tilde{X}(w)| \cdot e^{j(\arg \tilde{X}(w) - \omega t_0)} = |\tilde{X}(w)| \cdot e^{j(\arg \tilde{X}(w) - \omega t_0)} = |X(w)| \cdot e^{j(\arg X(w) - \omega t_0)}$
 $|X(w)| = |\tilde{X}(w)|$ $\arg X(w) = \arg \tilde{X}(w) - \omega t_0$

Fouriertransformens egenskap vid tidsförskjutning.

\Rightarrow Påverkar bara fasspektrumet, inte amplitudspektrumet.

SIGNALENERGI & PARSEVALS FORMEL

VIDEO 5

Signalenergin hos en signal $x(t)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

z.z* = |z|^2 $\Rightarrow E = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right)^* dt$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega) \cdot X(\omega) d\omega$$

Parsevals formel: $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$

Signalenergin i intervallet $[\omega_1, \omega_2]$: $\Delta E = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(\omega)|^2 d\omega$

Energispektrum $|X(\omega)|^2$

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$
 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$X(\omega) \in \mathbb{R} \forall t \Rightarrow X(-\omega) = X^*(\omega)$

Energisignal, signalenergi och Parsevals formel.

NÅGRA FOURIERTRANSFORMER: $\mathcal{F}\{\delta(t)\}$, $\mathcal{F}\{1\}$

VIDEO 6

$x_1(t) = \delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_1(t)| dt = 1 < \infty \Rightarrow X_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{j\omega t} dt = e^{j\omega t} \Big|_{t=0} = e^0 = 1$$

$\delta(t) \Leftrightarrow 1$

$\int_{-\infty}^{\infty} |x_2(t)| dt = \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{x_2(t)\} \nexists$

Låt $X_2(\omega) = 2\pi \delta(\omega) \Rightarrow$

$$x_2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_2(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega t} \Big|_{\omega=0} = 1$$

$\Rightarrow 1 \Leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$

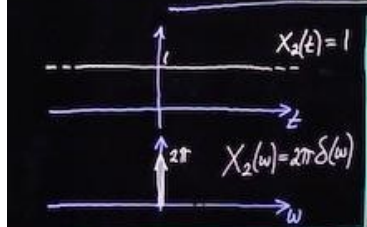
$x_2(t) = 1$

$X_2(\omega) = ?$

Fouriertransformen av en dirac-impuls och av en konstant.

FOURIERTRANSFORMEN AV EN FREKVENSSIGNAL

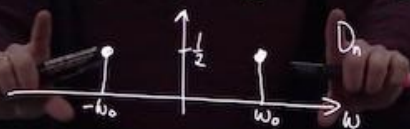
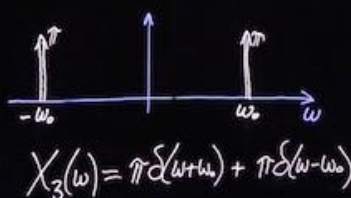
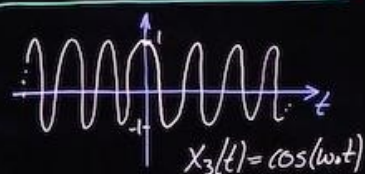
VIDEO 7



$$\begin{aligned}
 X_3(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_3(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \\
 &= \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \Big|_{\omega = -\omega_0} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} \Big|_{\omega = \omega_0} = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} = \cos(\omega_0 t)
 \end{aligned}$$

$$\cos(\omega_0 t) \Leftrightarrow \pi(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0))$$

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} = \sum_n D_n e^{jn\omega_0 t}$$



Fouriertransformen av en cosinus & sinus samt jämförelse med fourierserietvecklingen av en cosinus.

Fouriertransformanalys av LTI-system

VIDEO 8

FALTNINGSTEOREMET & FREKVENSFUNKTIONEN $H(\omega)$

STABILT ENERGIFRITT LTI-SYSTEM

$x(t) \rightarrow X(\omega) \rightarrow h(t), H(\omega) \rightarrow y(t) = y_{\text{ol}}(t) + y_{\text{zs}}(t)$

$y_{\text{zs}}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{\text{zs}}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$

Antag $\int_{-\infty}^{\infty} |y_{\text{zs}}(t)| dt < \infty \Rightarrow \mathcal{F}\{y_{\text{zs}}(t)\} \exists$

$\mathcal{F}\{y_{\text{zs}}(t)\} = Y_{\text{zs}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y_{\text{zs}}(t) e^{-j\omega t} dt =$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$
 $\lambda = t - \tau \quad ; \quad t = \lambda + \tau$
 $\frac{d\lambda}{dt} = 1 \quad ; \quad dt = d\lambda$
 $= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega(\lambda + \tau)} d\lambda \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda = X(\omega) \cdot H(\omega)$

$y_{\text{zs}}(t) = ?$

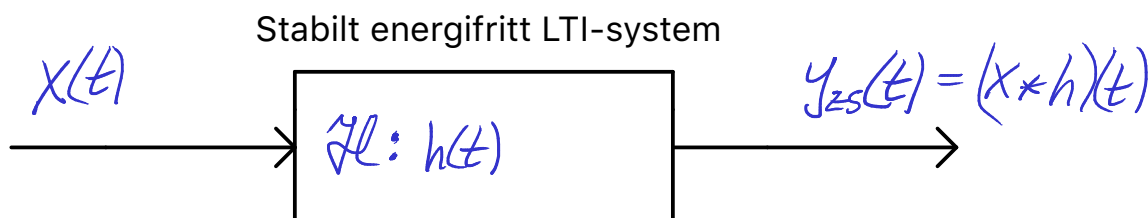
$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(\omega) \xrightarrow{H(\omega)} Y_{\text{zs}}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y_{\text{zs}}(t)$

$x(t) \xrightarrow{h(t)} y_{\text{zs}}(t) = (x * h)(t)$

* Härledning av faltningsteoremet.

* Definition av frekvensfunktionen.

* Lösningsvägar för beräkning av utsignalen, i tidsdomänen eller via frekvensdomänen.



AMPLITUDKARAKTÄRISTIK & FASKARAKTÄRISTIK FÖR LTI-SYSTEM

Energifritt
stabilit LTI-system

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t), H(\omega)} \rightarrow y(t) = y_{ss}(t) = (x * h)(t)$$

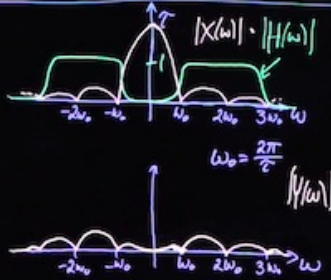
$$\Rightarrow Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$$

$$\Rightarrow |Y(\omega)| \cdot e^{j \arg Y(\omega)} = |X(\omega)| \cdot e^{j \arg X(\omega)} \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j \arg H(\omega)} = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \cdot e^{j(\arg X(\omega) + \arg H(\omega))}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ut-signalens ampl. spektrum } |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| : |H(\omega)| = \text{systemets amplitudkaraktäristik} \\ \text{--- faspektrum } \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega) : \arg H(\omega) = \text{--- faskaraktäristik} \end{array} \right.$$

Exempel:

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$$



$$|Y(\omega)|^2 = |X(\omega)|^2 \cdot |H(\omega)|^2$$

Energispektra

Energiöverföringsfunktion

- * Amplitudkaraktäristiken $|H(\omega)|$ och faskaraktäristiken $\arg H(\omega)$ för LTI-system.
- * Energispektrum för en signal & energiöverföringsfunktionen för LTI-system.

Fouriertransformanalys av LTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

Stabilt LTI-system

$$x(t) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y(t)$$

$$a) H(\omega) = \frac{j\omega}{2+j\omega}$$

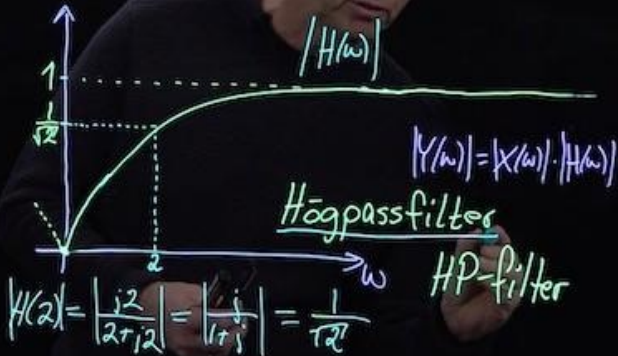
$$b) |H(\omega)| = \left| \frac{j\omega}{2+j\omega} \right| = \frac{|\omega|}{\sqrt{2^2 + \omega^2}}$$

$$H(0) = \frac{j0}{2+j0} = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{2}{j\omega} + 1} \right| = \frac{1}{0+1} = 1$$

Turnregel: ordn. = 1 : ω ; re = im i nämnaren
 $\Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$

- Beräkna systemets frekvensfunktion $H(\omega)$.
- Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och ange vilken typ av frekvensselektivt filter som systemet utgör.
- Beräkna & skissera systemets impulssvar $h(t)$.
- Ange systemets kausalitetssegenskap.



Ett räkneexempel: För ett LTI-system, där förhållandet mellan utsignalen och insignalen beskrivs av en differentialekvation, så visas följande för LTI-systemet.

- Beräkna systemets frekvensfunktionen $H(\omega)$.
- Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och ange filtertyp.

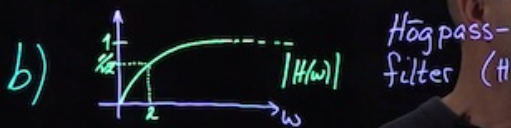
Fouriertransformanalys av LTI-system beskrivet av en differentialekvation

EXEMPEL

Stabilt LTI-system

$$x(t) \rightarrow \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \rightarrow y(t)$$

$$a) H(\omega) = \frac{j\omega}{2+j\omega}$$

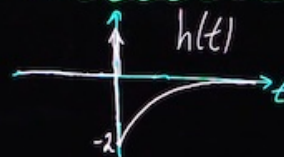


- Beräkna systemets frekvensfunktion $H(\omega)$.
- Skissera systemets amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och ange vilken typ av frekvensselektivt filter som systemet utgör.
- Beräkna & skissera systemets impulssvar $h(t)$.
- Ange systemets kausalitetssegenskap.

$$c) h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} \quad H(\omega) = j\omega \cdot \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow$$

$$h(t) = \frac{d}{dt}(\mathcal{F}^{-1}\{e^{-2t} \cdot u(t)\}) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-2t} \delta(t) + (-2)e^{-2t} u(t)\} = \delta(t) - 2e^{-2t} u(t)$$

$$H(\omega) = \frac{2+j\omega-2}{2+j\omega} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2+j\omega} \Rightarrow h(t) = \delta(t) - 2 \cdot \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2+j\omega}\right\} = \delta(t) - 2e^{-2t} u(t)$$

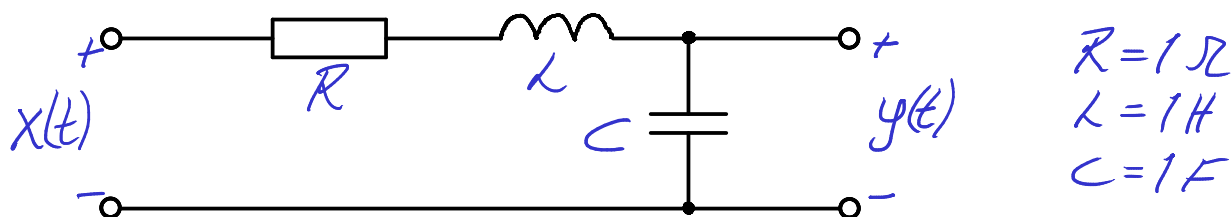


d) $h(t) = 0; t < 0$
 \Rightarrow Systemet är kausalt

- Beräkna och skissera systemets impulssvar $h(t)$.
- Ange systemets kausalitetssegenskap.

Nästa föreläsning – ett större representativt räkneexempel:

(plus lite till – speciellt digital kommunikation amplitudmodulering som tillämpningsområde)



a) Beräkna/bestäm LTI-systemets

- * frekvensfunktion $H(\omega)$
- * impulssvar $h(t)$, samt skissera detta.
- * kausalitetsegenskap & stabilitetsegenskap.
- * systembeskrivande differentialekvation.
- * ordning.
- * amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$

b) Skissera amplitudkaraktäristiken och ange/motivera vilken typ av frekvensselektivt filter (LP, BP, HP osv.) det elektriska systemet utgör.

c) Beräkna utsignalen $y_1(t)$

då signalen är

$$x_1(t) = 3 \cdot e^{-2t} \cdot u(t) \text{ [V]}$$

och systemet är energifritt.

d) Beräkna utsignalen $y_2(t)$

då signalen är

$$x_2(t) = 4 + 3 \cos\left(2t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ [V]}$$

e) Beräkna systemets stegsvar $g(t)$