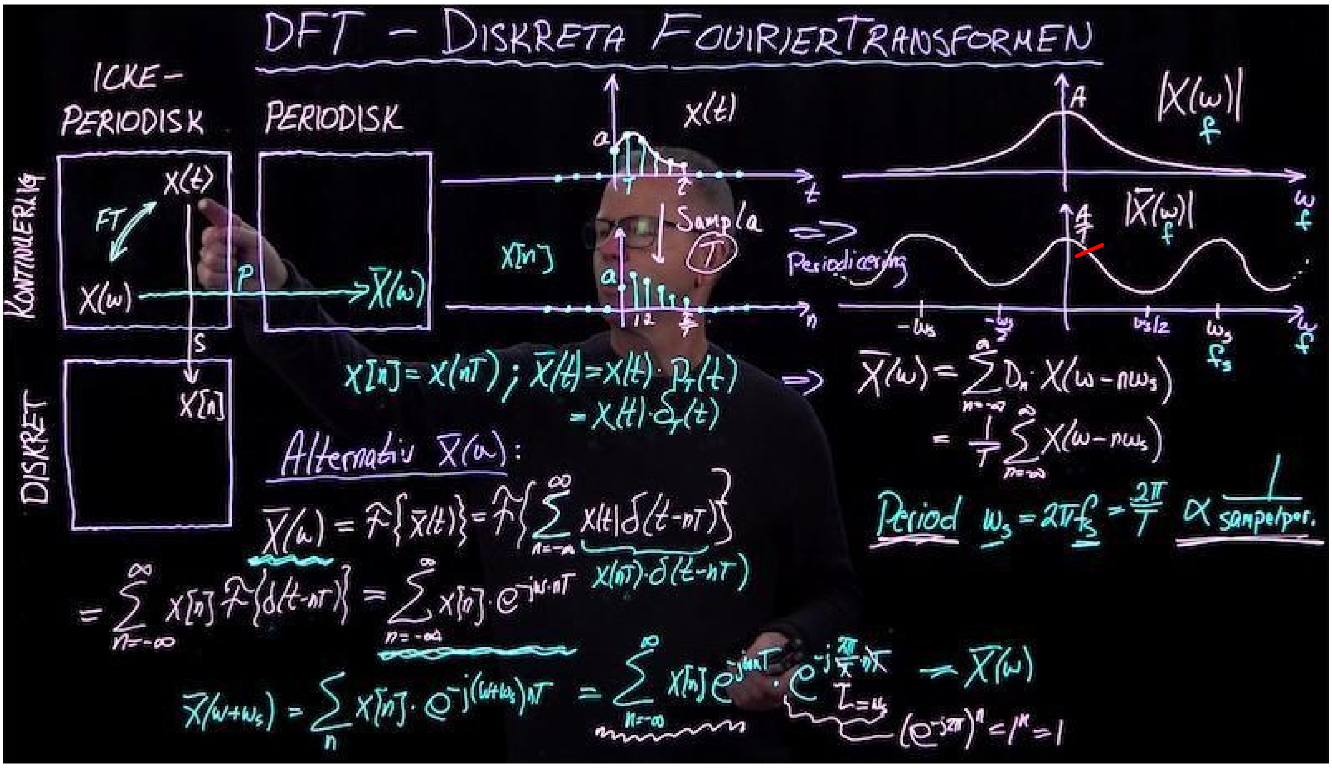
Signaler & System – Föreläsning 7:   DFT – Diskret FourierTransform



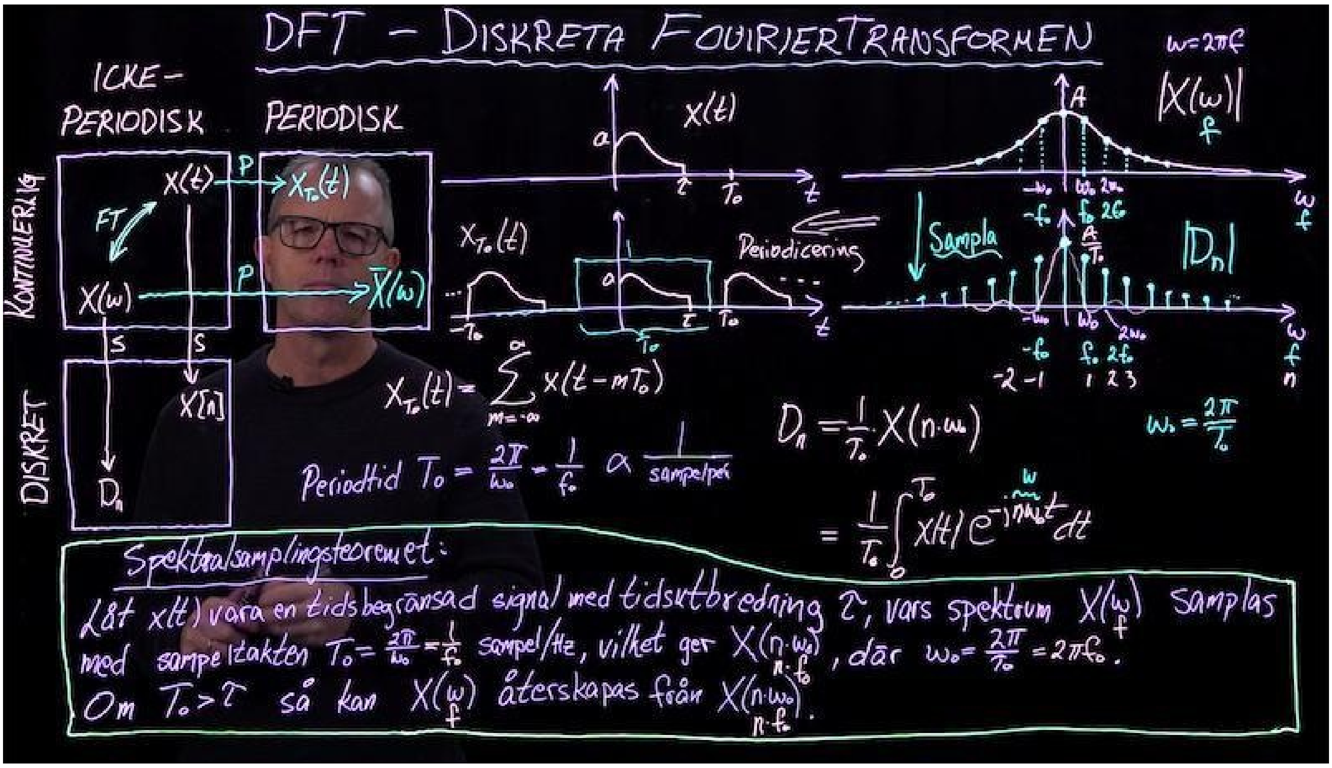
Del 1

$$\begin{array}{ccc} x(t) & \overset{FT}{\Longleftrightarrow} & X(\omega) \\ \Big\downarrow S & \Longrightarrow & \Big\downarrow P \\ \left.\begin{array}{c} x[n] \\ \bar{x}(t) \end{array}\right\} & \overset{FT}{\Longleftrightarrow} & \bar{X}(\omega) \end{array}$$

Sampling av $x(t)$ till $x[n] = x(nT)$, vilket resulterar i en periodisering av $X(\omega)$ till $\bar{X}(\omega)$, med period $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. $\omega_s \propto \frac{1}{T}$

$$\left(\text{Perioden} \propto \frac{1}{\text{Sampelperioden}} \right)$$

Del 2

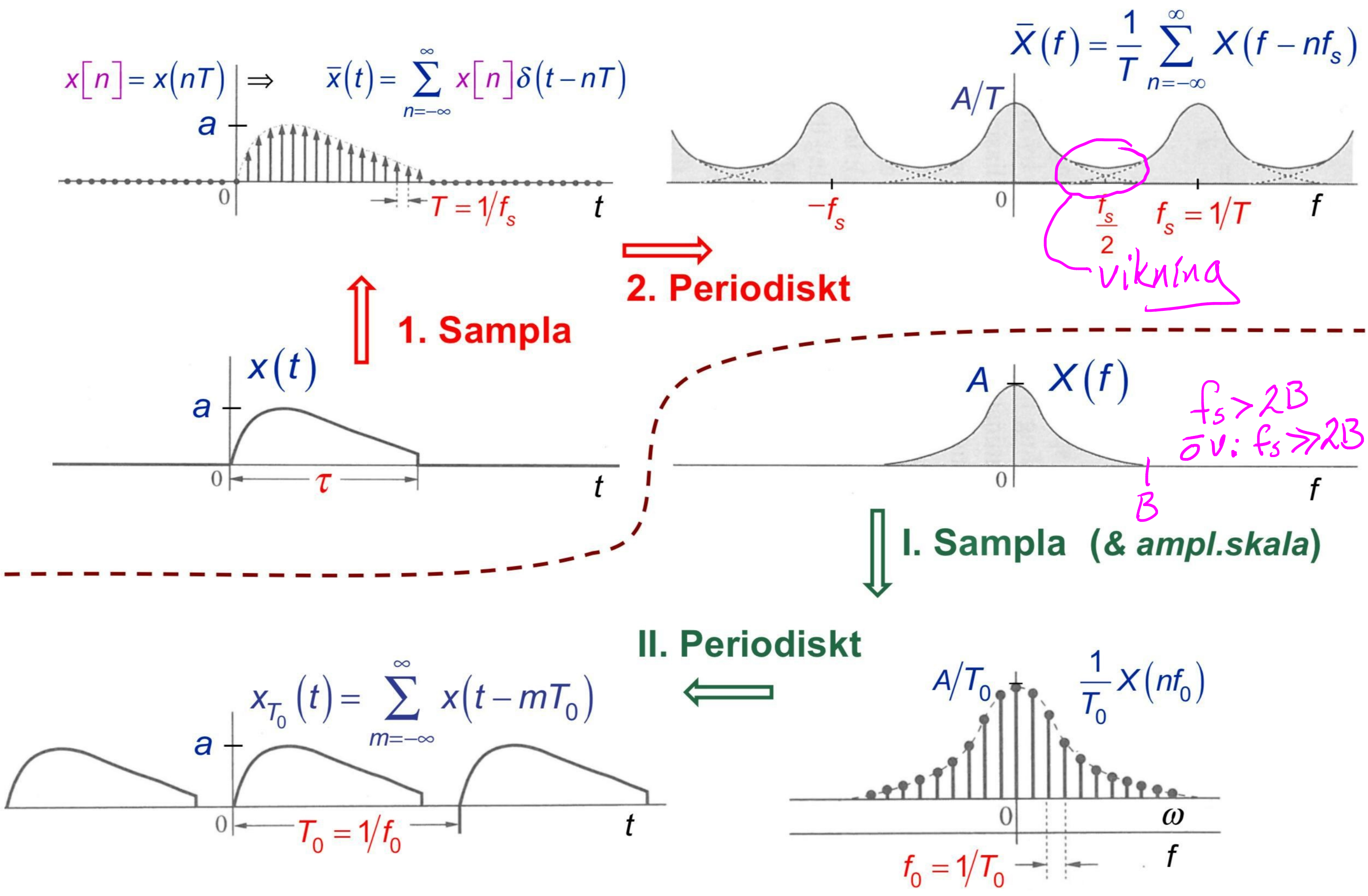


$T_0 > \tau$

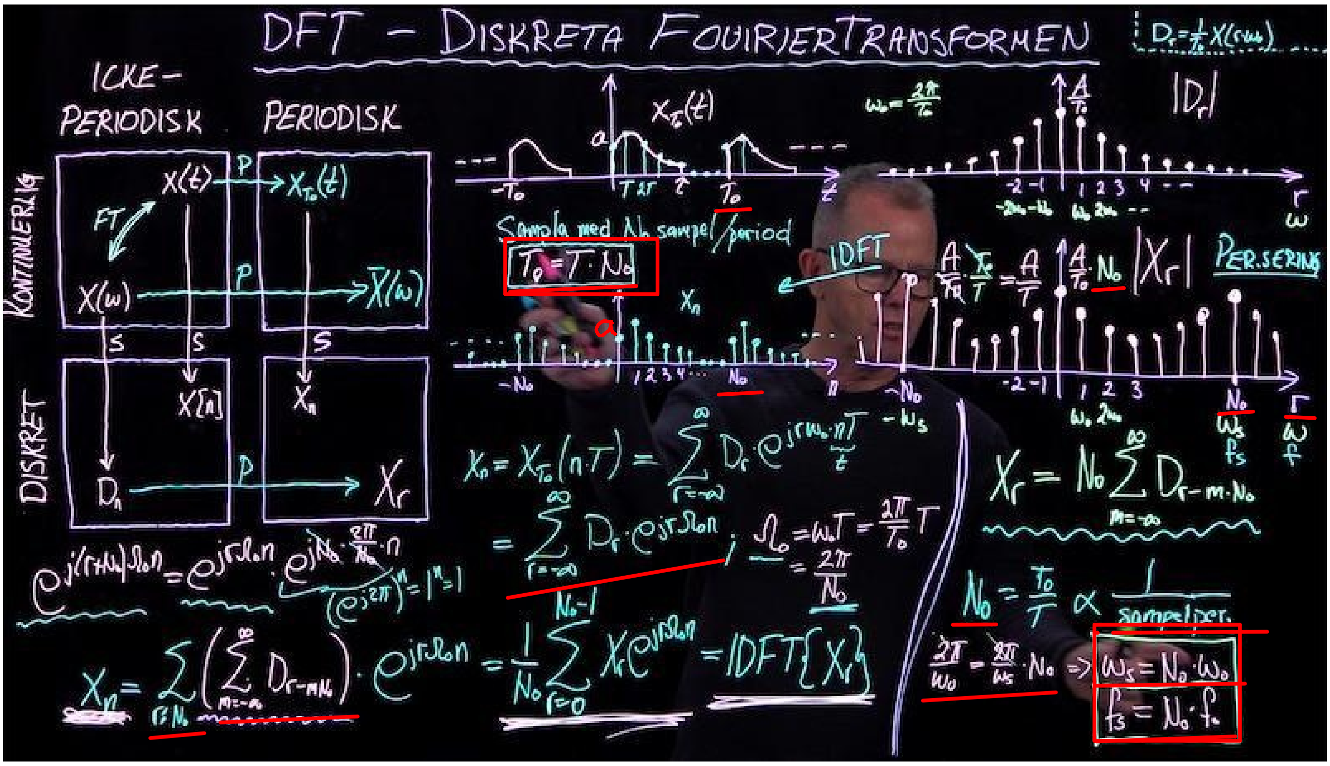
$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} < \dfrac{2\pi}{\tau}$

$$
\begin{array}{ccc}
X(\omega) & \overset{FT}{\Longleftrightarrow} & x(t) \\
\downarrow S & \Longrightarrow & \downarrow P \\
D_n & \overset{FS}{\Longleftrightarrow} & x_{T_0}(t)
\end{array}
$$

Sampling av $X(\omega)$ till $D_n = \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)$, vilket resulterar i en periodisering av $x(t)$ till $x_{T_0}(t)$, med period $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. $T_0 \propto \dfrac{1}{\omega_0}$



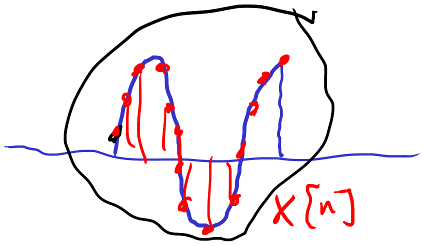
Del 3



$$
\begin{tikzcd}
x_{T_0}(t) \arrow[r, Leftrightarrow, "FS"] \arrow[d, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Rightarrow"] & D_r \arrow[d, "P"] \\
x_n \arrow[r, Leftrightarrow, "IDFT"] & X_r
\end{tikzcd}
$$

Sampling av $x_{T_0}(t)$ till $x_n = x_{T_0}(nT)$, vilket resulterar i en periodisering av D_r till X_r, med period $N_0 = \frac{T_0}{T}$. $\quad N_0 \propto \frac{1}{T}$

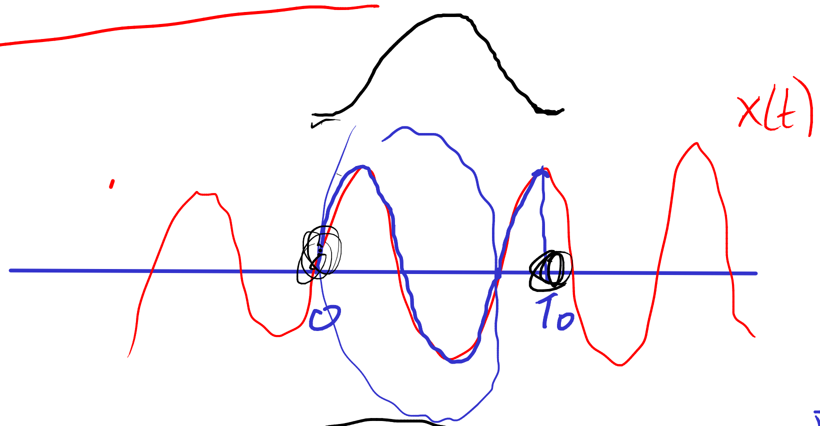
$$
\underbrace{\left(\dots + D_{r-2N_0} + D_{r+2N_0} + D_{r-N_0} + D_{r+N_0} + D_r \right)} e^{jr\Omega_0 n}
$$



$\Downarrow$ DFT

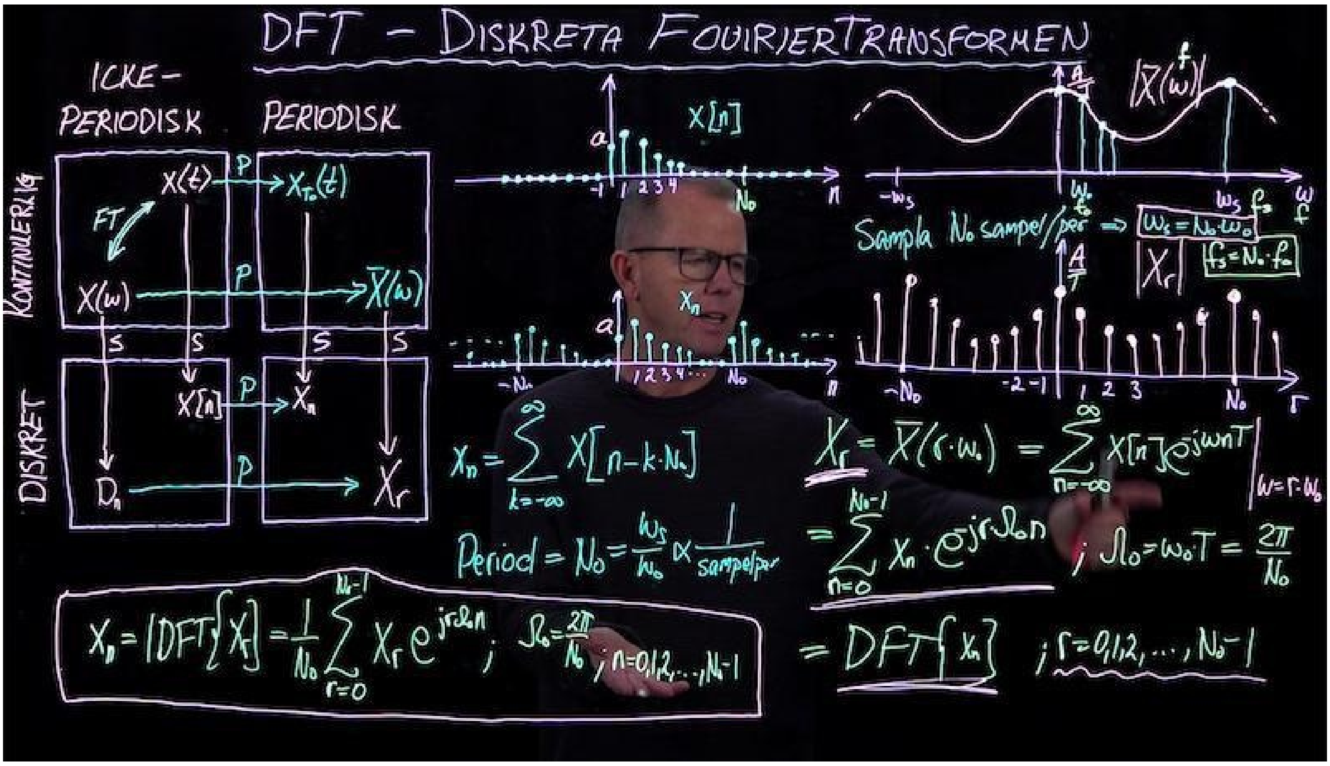
X_r

$\Rightarrow$ IDFT x_n



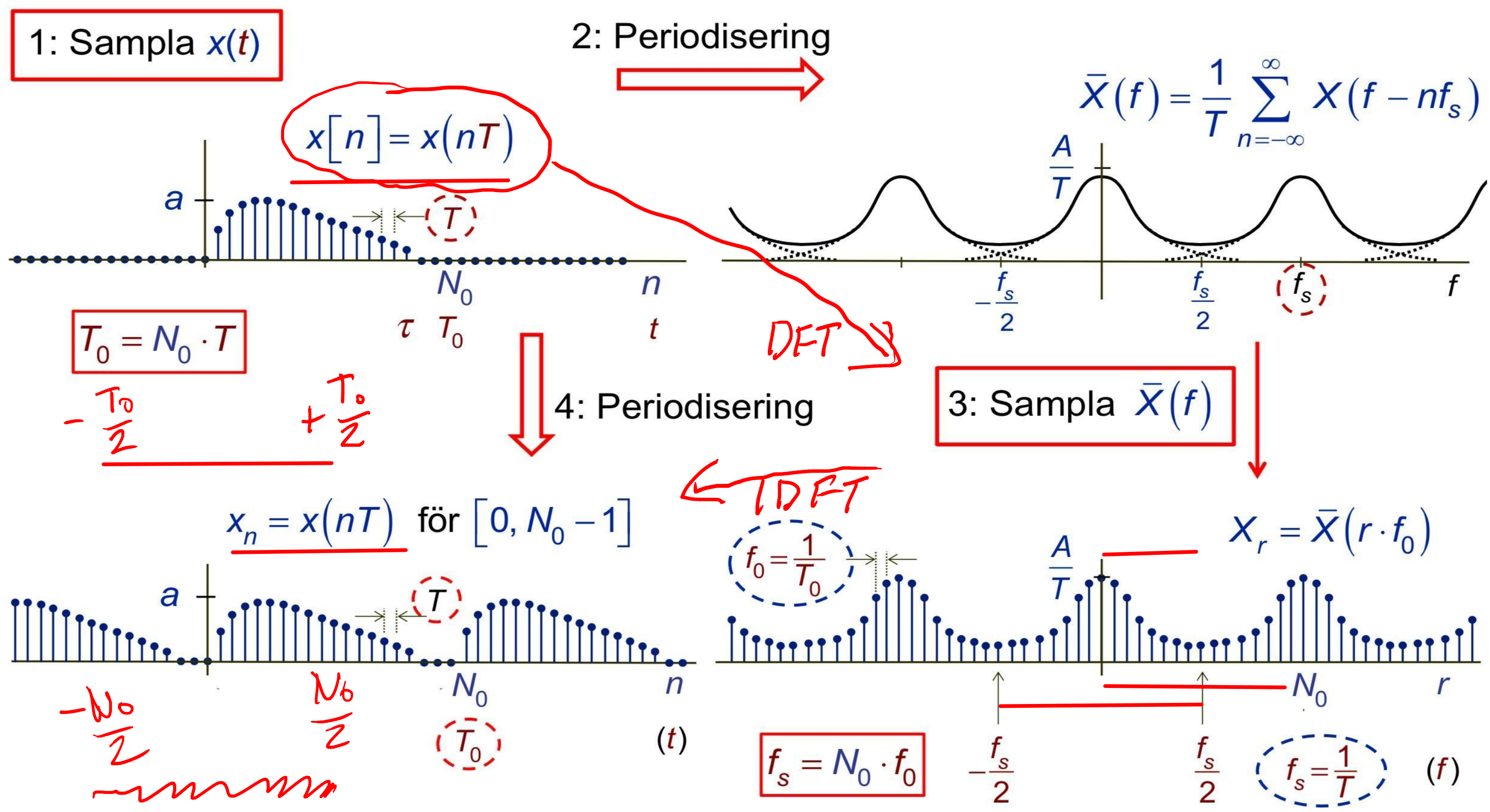
DFT $\Rightarrow$ X_r

IDFT $\Rightarrow x_n$



$$\begin{array}{ccc}\bar{X}(\omega) & \Longleftrightarrow & x[n]\\ \downarrow S & \Longrightarrow & \downarrow P\\ X_r & \overset{DFT}{\Longleftrightarrow} & x_n\end{array}$$

Sampling av $\bar{X}(\omega)$ till $X_r = \bar{X}(r\omega_0)$, vilket resulterar i en periodisering av $x[n]$ till x_n, med period $N_0 = \frac{\omega_s}{\omega_0}$. $N_0 \propto \frac{1}{\omega_0}$



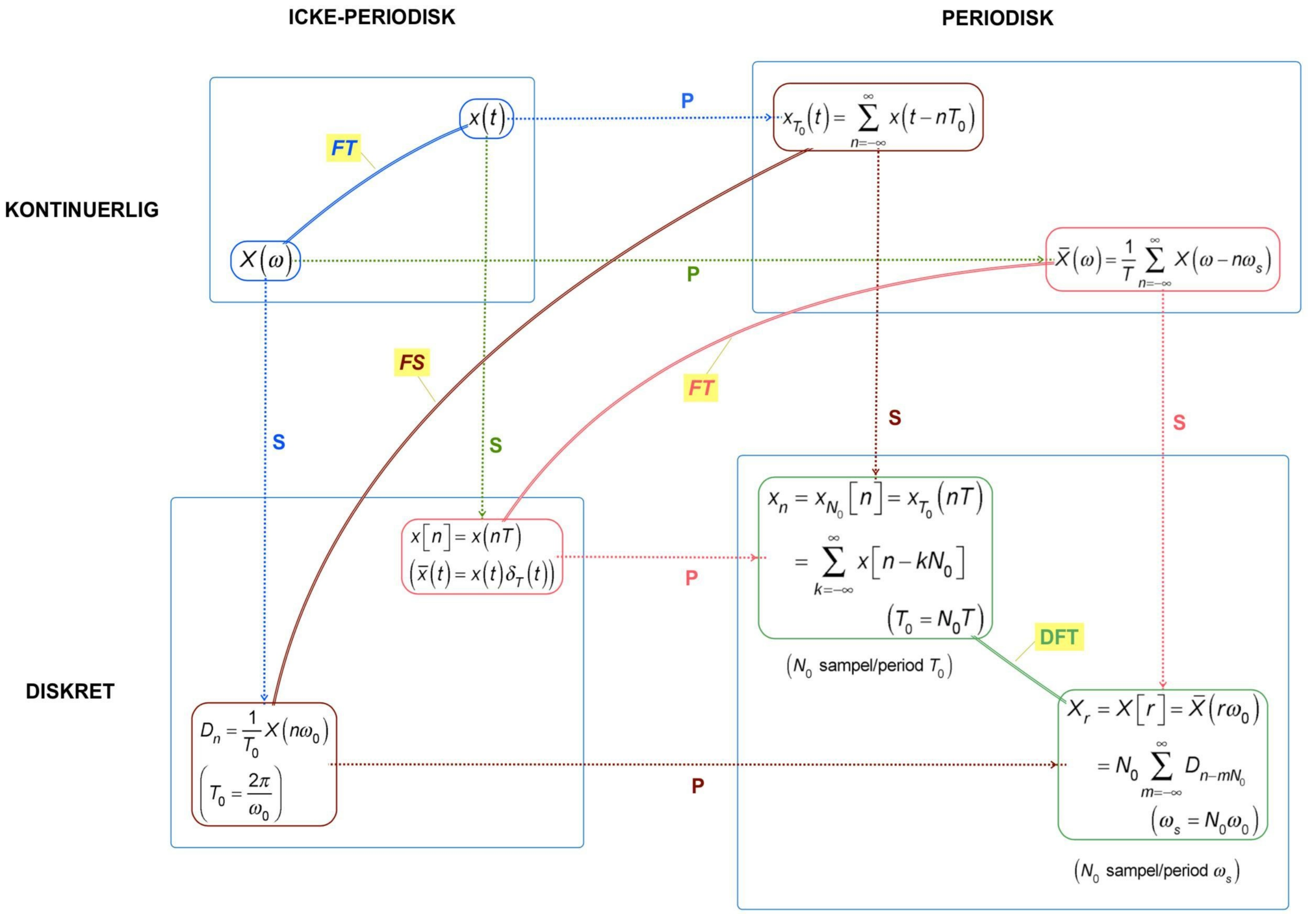
$\left(X_r \approx \frac{1}{T} X(r \cdot f_0) \right.$ för $|(r \cdot f_0)| < \frac{f_s}{2}$ vid försumbar vikning i frekvensdomänen vid sampling av $x(t)$! $\left.\right)$

$$\boxed{x_n = \mathrm{IDFT}\{X_r\} = \frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\Omega_0 n}} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \qquad \boxed{X_r = \mathrm{DFT}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}}$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1 \qquad\qquad r = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1$$

Sammanfattning av de olika sambanden i videon:

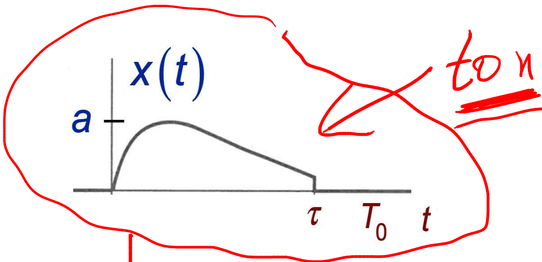
Sampling i den ena domänen resulterar i en periodisering i den andra domänen!

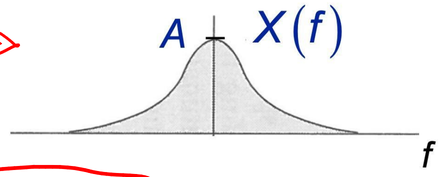


FT = Fouriertranformrelation
FS = Fourierserierelation
DFT = Diskret fouriertransformrelation

S = Sampling (i pilens riktning) $\Longrightarrow$
P = Periodicering (i pilens riktning)

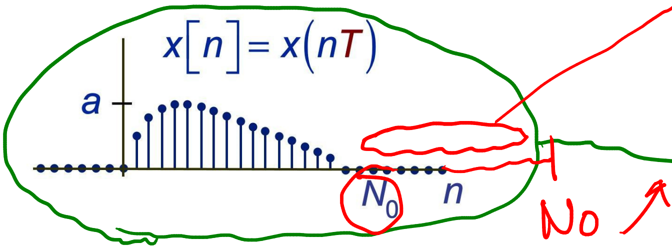
Praktisk användning av DFT:n





↓ sampla $\quad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$

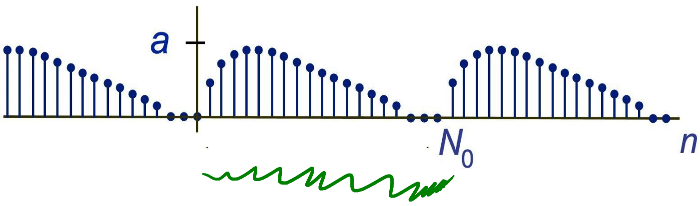
Zero padding ⇒ Välj större N_0 ⇒ Tätare sampling av $X(f)$

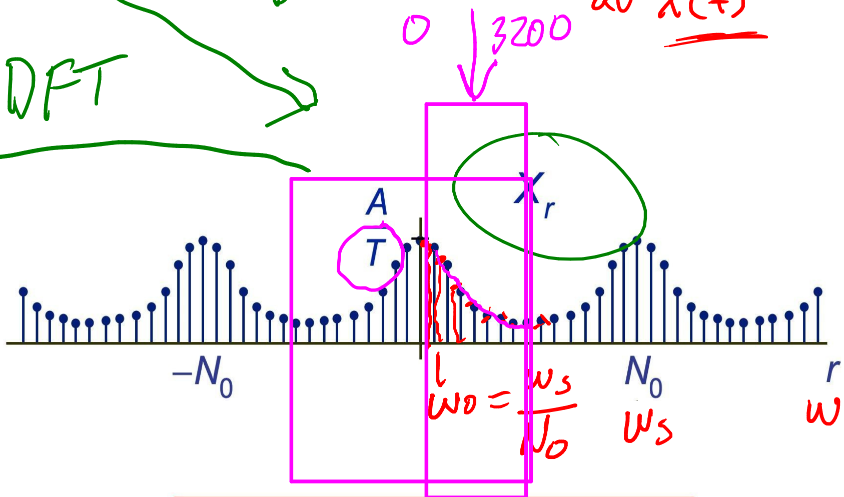


DFT

IDFT

$x_n = x(nT)$ för $[0, N_0 - 1]$





$$\boxed{x_n = \mathrm{IDFT}\{X_r\} = \frac{1}{N_0}\sum_{r=0}^{N_0-1} X_r e^{jr\Omega_0 n}}$$

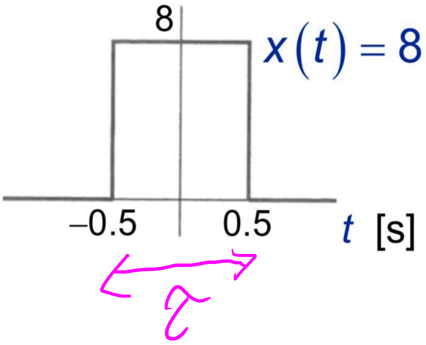
$n = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$\boxed{X_r = \mathrm{DFT}\{x_n\} = \sum_{n=0}^{N_0-1} x_n e^{-jr\Omega_0 n}}$$

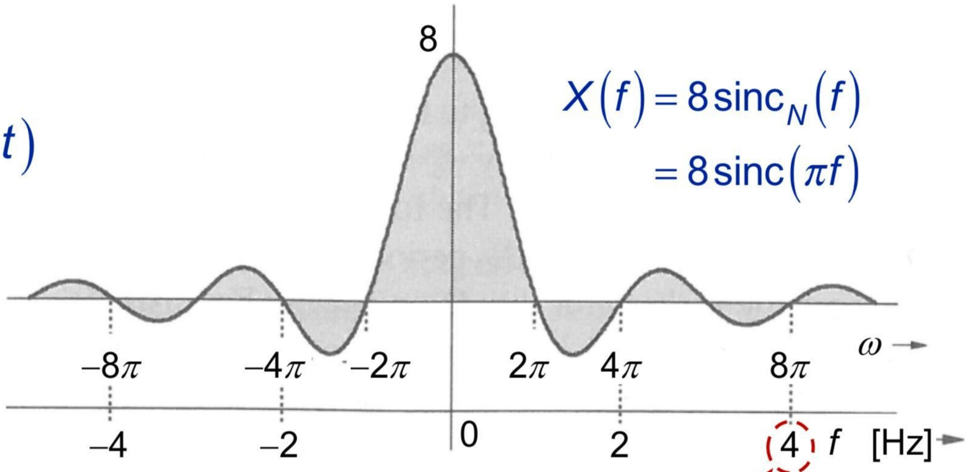
$r = 0, 1, 2, \ldots, N_0 - 1$

Ex. 8.9, sid. 808–810: Beräkna $\mathcal{F}\{x(t)\}$ med DFT



$x(t) = 8\,\mathrm{rect}(t)$

Välj $T_0 > \tau = 1$



$X(f) = 8\,\mathrm{sinc}_N(f)$
$= 8\,\mathrm{sinc}(\pi f)$

1. Ej bandbegränsad signal $\Rightarrow$
   Välj lämplig sampelfrekvens som ger liten/acceptabel vikning runt $f_s/2$.
   $\Longrightarrow$ Välj t.ex. $f_s = 2\cdot 4 = 8$ Hz $\Longrightarrow$ Sampla $x(t)$ med $T = 1/f_s = 1/8$ sek

2. Välj lämplig f_0 så att de periodiska upprepningarna av rect-pulsen inte överlappar och så vi får lämplig spektrumupplösning.
   $\Longrightarrow$ Välj t.ex. t.ex. $f_0 = 0.25$ Hz $\Leftrightarrow$ $T_0 = 1/f_0 = 4$ sek

$N_0 = \frac{T}{T} = 31$

3. Konsekvens: $\overset{4}{T_0} = N_0 \cdot \overset{1/8}{T}$, $f_s = N_0 \cdot f_0$ $\Rightarrow$ $N_0 = \dfrac{T_0}{T} = \dfrac{f_s}{f_0} = 32$

Notera:
I boken relateras X_r till $X(f)$,
men det är vanligare att X_r relateras till $\bar{X}(f)$, som här.

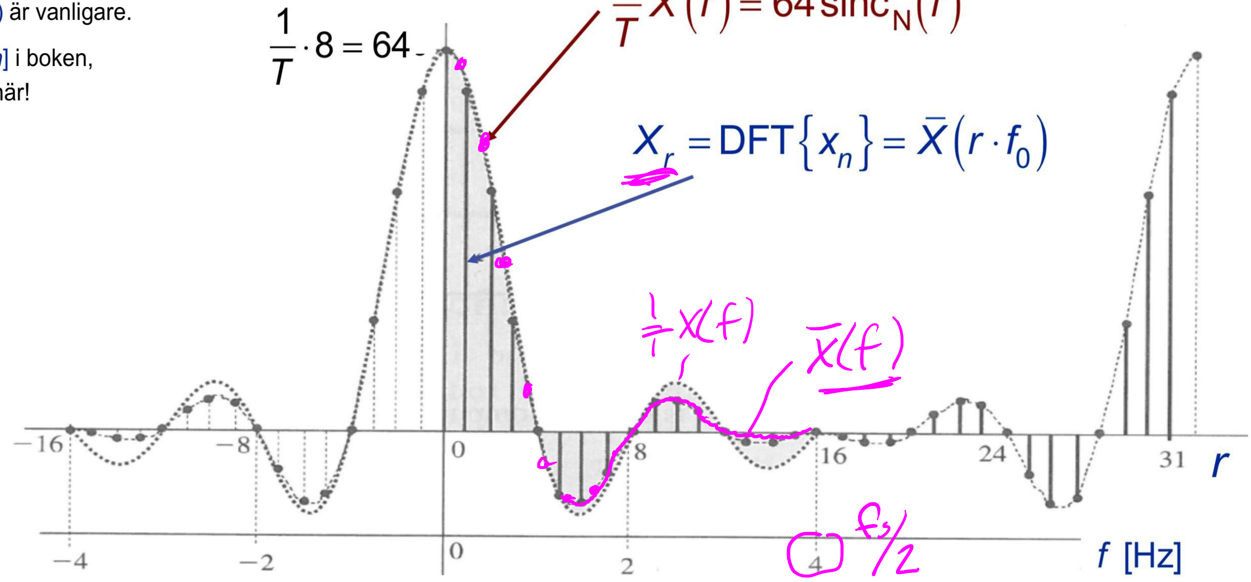
$\Rightarrow$ X_r är en samplad version av $X(f) = T \cdot \bar{X}(f)$ i boken,
men att (som här) sampla $\bar{X}(f)$ är vanligare.

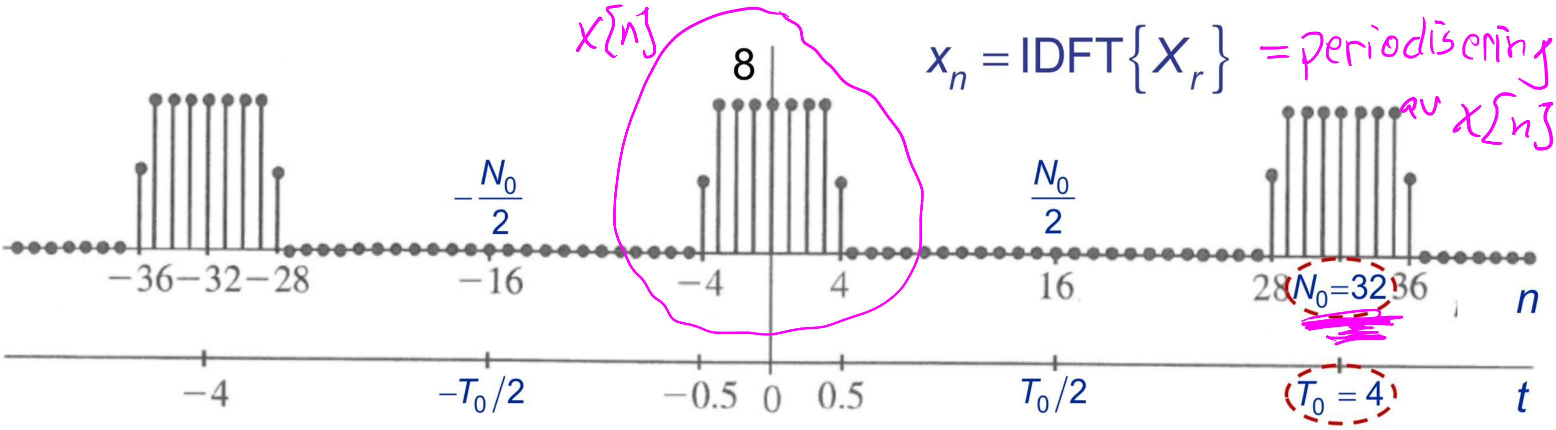
$\Rightarrow$ x_n = per. upprepn. av $T \cdot x[n]$ i boken,
x_n = per. upprepn. av $x[n]$ här!

$\bar{X}(f) = \frac{1}{T} \sum X(f - f_s)$

$\frac{1}{T} X(f) = 64\,\mathrm{sinc}_N(f)$

$X_r = \mathrm{DFT}\{x_n\} = \bar{X}(r \cdot f_0)$





DFT (Diskret FourierTransform) – egenskaper

- DFT:n är en samplad version av en frekvenskontinuerlig fouriertransform $\bar{X}(f)$ $\bar{X}(\omega)$
  $\Rightarrow$ har motsvarande egenskaper – se kap. 8.5-1

- Ur *praktisk synvinkel* är DFT:n den **viktigaste av alla transformer** vid frekvensanalys av både tidskontinuerliga & tidsdiskreta signaler!!

- DFT:n implementeras vanligen m.h.a. någon lämplig **FFT-algoritm** (Fast Fourier Transform) – *läs gärna översiktligt kap. 8.6.*
  - Synnerligen effektiva algoritmer vid vissa transformlängder N_0, t.ex. **radix 2-algoritmen**, då $N_0 = 2^b$:
    Antalet additioner & multiplikationer som krävs för att beräkna DFT:n minskas då från $\sim N_0^2$ till $\sim N_0 \cdot \log_2 N_0 = N_0 \cdot b$!

Ex: $N_0 = 1024 = 2^{10}$ $\Rightarrow$ $N_0^2 = 1.048.576$ & $N_0 \cdot \log_2 N_0 = 10.240$