Forts. om STABILITET från förra föreläsningen (Nr. 8)

Följande tre sidor om stabilitet är de tre sista sidorna i materialet från föreläsning 8:

Stabilitet – för energifria LTI-system

(Externt) stabilt system: (Insignal-utsignal-stabilt)

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$ gäller för stabila **LTI**-system

$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$

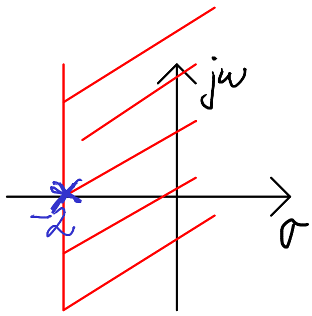
$\left(\mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} \mathcal{L}\{h(t)\} \right) \quad \overset{\sigma=0}{\Rightarrow} \quad \boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}}$

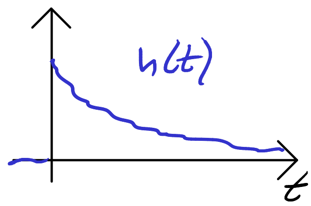
$\Leftrightarrow$ $j\omega$ -axeln ligger i systemfunktionens konvergensområde!

Konsekvens: Systemfunktionen till ett stabilt system har *minst lika många poler som nollställen* – annars ingår inte $\pm j\infty$ i konvergensområdet

Exempel 1: $H(s) = \frac{1}{s+2}$ $\quad Re\{s\} > -2$

$h(t) = e^{-2t}u(t)$

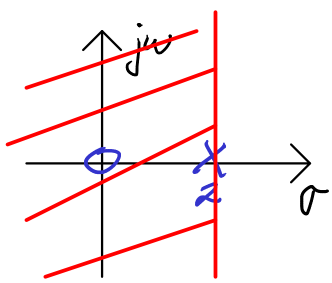


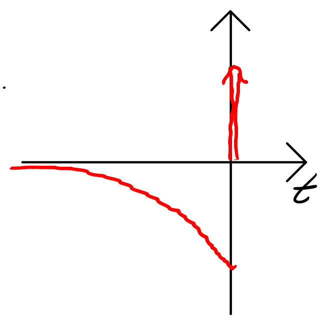


Exempel 2: $H(s) = \frac{s}{s-2}$ $\quad Re\{s\} < 2$

$H(s) = \frac{s-2+2}{s-2} = 1 + 2\cdot\frac{-1}{s-2}$

$h(t) = \delta(t) - e^{2t}u_0(-t)$



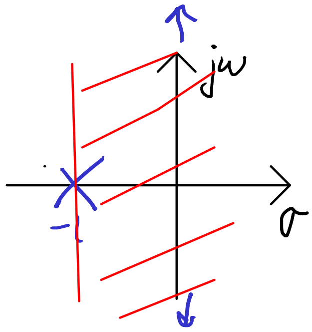


Exempel 3: $H(s) = \frac{s^2}{s+1}$ Konvomr.?

$\#P \geq \#N$

$|H(s)| \to \infty$ när $|s| \to \infty$

$|s| < \infty$ $H(s) = s - 1 + \frac{1}{s+1}$ $Re\{s\} > -1$ $s = \frac{1}{1/s}$



Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler

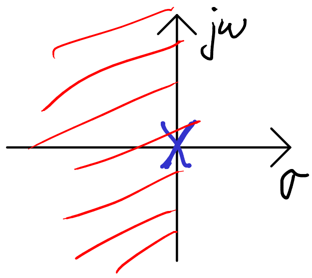
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \not< \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$$ gäller för marginellt stabila **LTI**-system

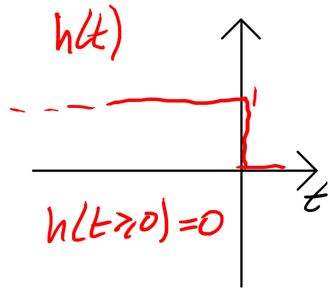
$\Leftrightarrow$
- $H(s)$ har *minst en enkelpol på* $j\omega$ *-axeln*
- $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$
- $H(s)$ har minst lika många poler som nollställen (egentligen $\#P \geq \#N{-}1$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega,\, s\neq \text{pol}}}$$

Exempel 1: $H(s) = \frac{-1}{s}$ $Re\{s\} < 0$

$h(t) = u_0(-t)$



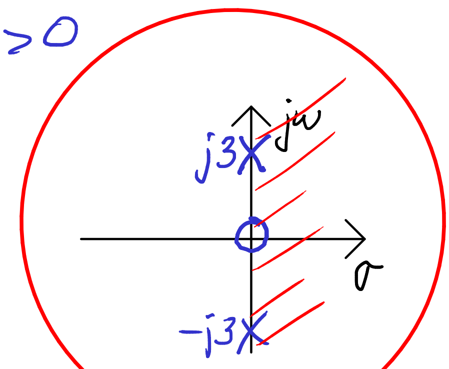


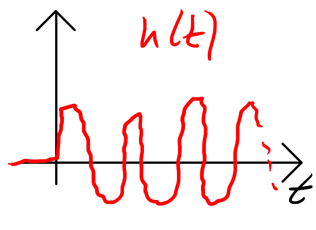
$+\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

Exempel 2: $H(s) = \frac{s}{s^2+3^2}$ $Re\{s\} > 0$

$h(t) = \cos(3t)\,u(t)$

$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$, $\omega \neq \pm 3$





Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \nless \infty \\ |h(t)| \nless \infty \quad \forall t \end{cases}$$

gäller för instabila **LTI**-system

$\Leftrightarrow$

- $j\omega$ -axeln ligger *inte* i konvergensområdet för $H(s)$

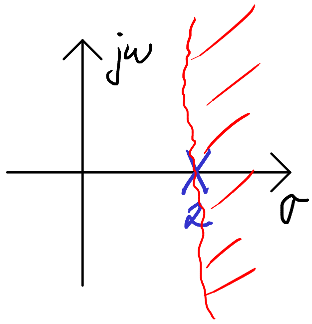
eller

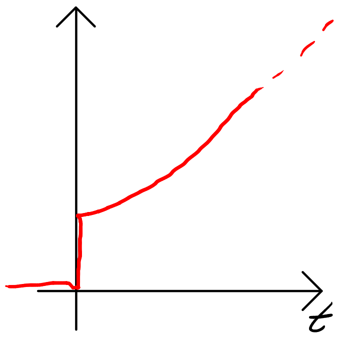
- $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$ och $H(s)$ har en minst en *multipelpol på* $j\omega$ *-axeln*

$\Rightarrow \quad H(\omega)$ existerar inte

Exempel 1: $H(s) = \frac{1}{s-2} \quad Re\{s\} > 2$

$h(t) = e^{2t} \cdot u(t)$

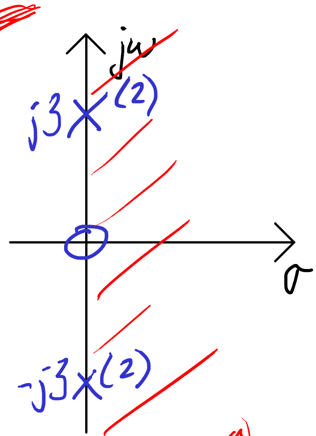


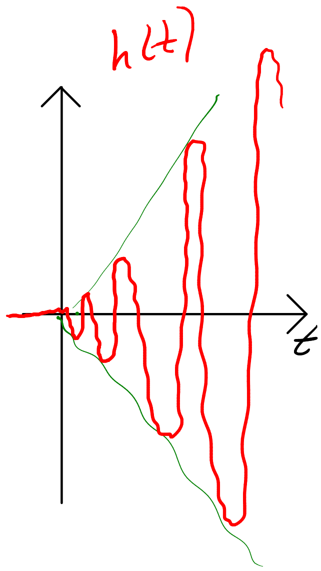


Exempel 2: $H(s) = \frac{s}{(s^2+3^2)^2} \quad Re\{s\} > 0$

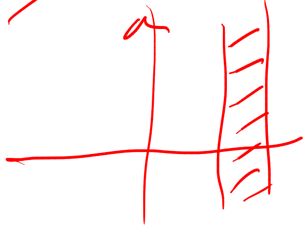
Tab. 5:24

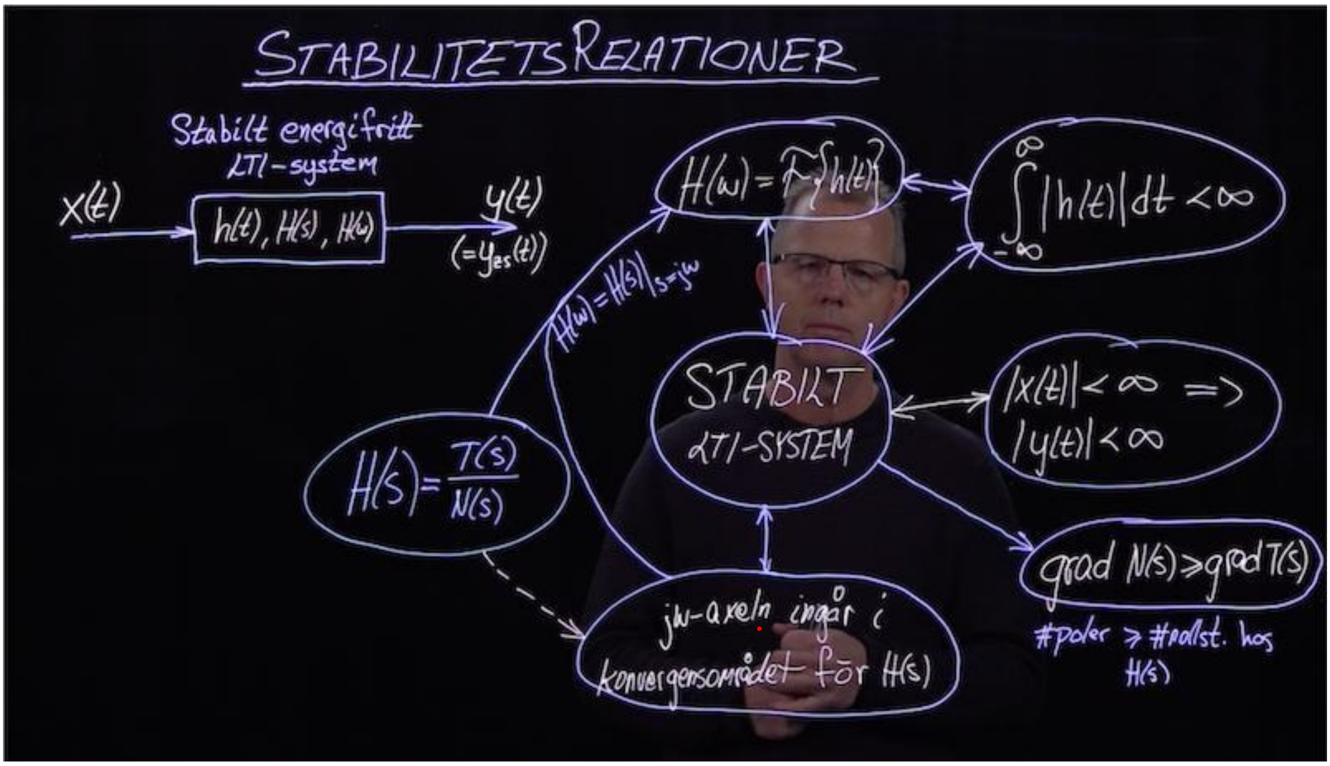
$h(t) = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot t \cdot \sin(3t)\,u(t)$





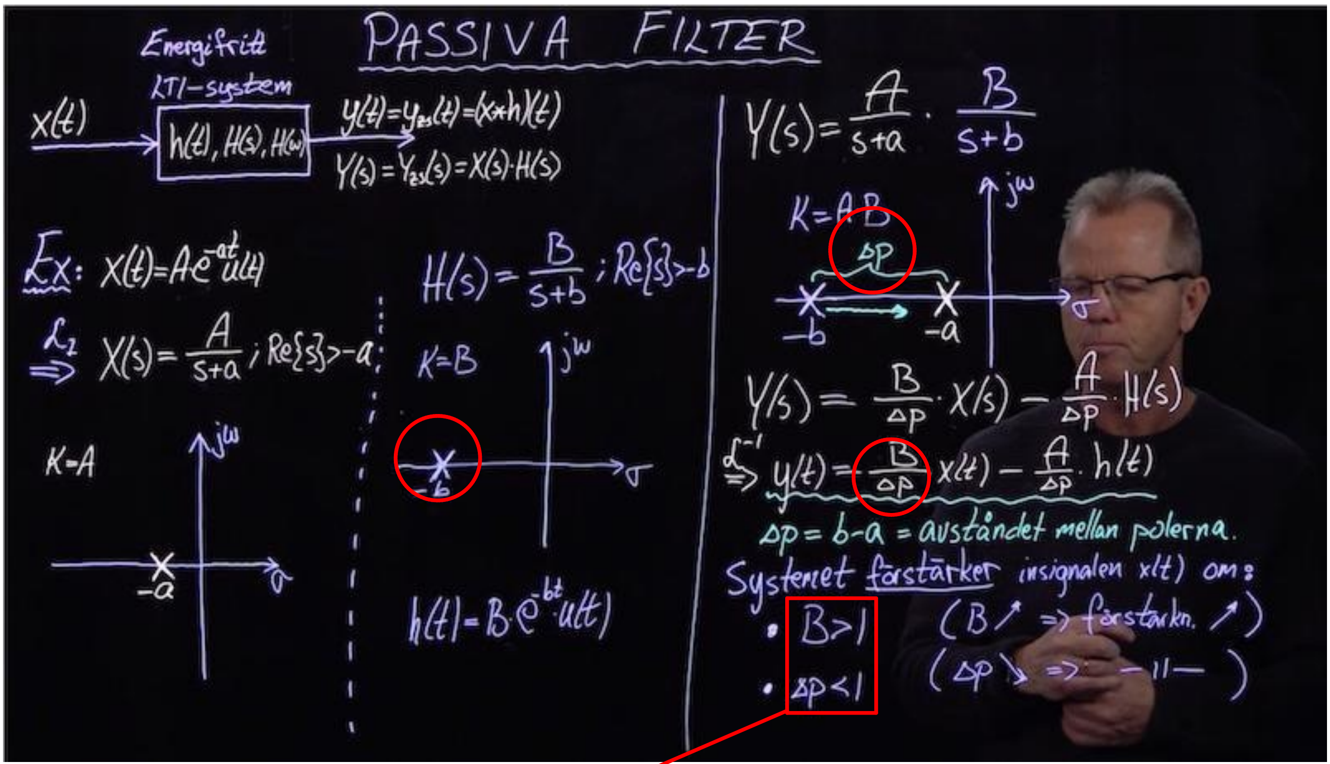
Kausalitet $\longrightarrow$ Konv.omr $\longrightarrow$ stabilitet




STABILITETSRELATIONER
Stabilt energifritt
LTI-system
$x(t)$
$h(t), H(s), H(\omega)$
$y(t)$
$(=y_{es}(t))$
$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$
$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$
STABILT
LTI-SYSTEM
$|x(t)| < \infty \Rightarrow$
$|y(t)| < \infty$
$H(s) = \frac{T(s)}{N(s)}$
grad $N(s) \geq$ grad $T(s)$
$j\omega$-axeln ingår i
konvergensområdet för $H(s)$
#poler ≥ #nollst. hos
$H(s)$

VIDEO 1

VIDEO 2.1



Bättre, mer korrekt: Förstärkning om $\left|\frac{B}{\Delta p}\right| > 1$ dvs. om $|\Delta p| < |B|$

$E_y \leq E_x$

$x(t) = e^{-90t}u(t)$

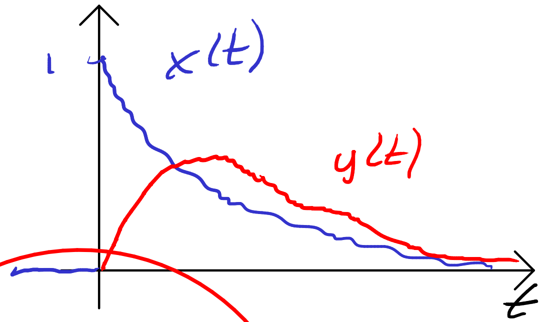
$H(s) = \frac{100}{s+100}$

$h(t) = 100e^{-100t}u(t)$

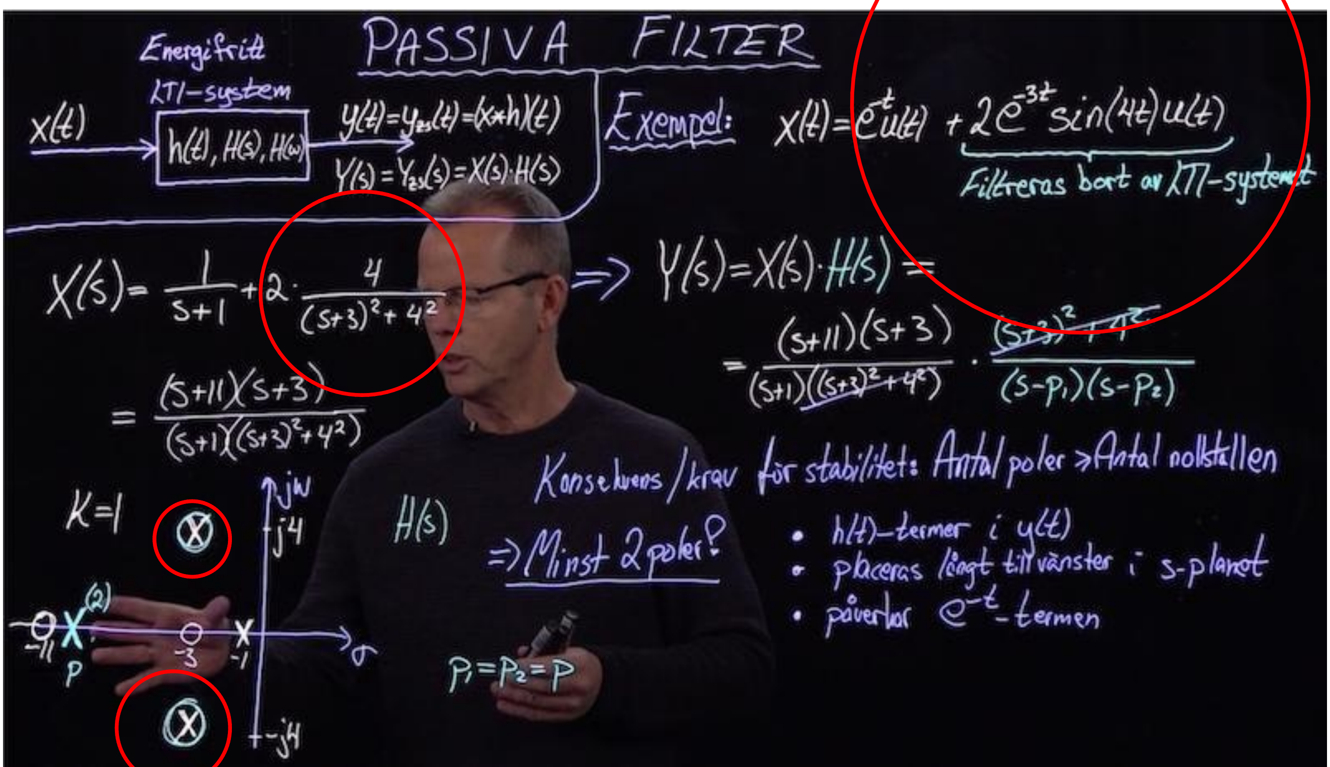
$y(t) = (10e^{-90t} - 10e^{-100t})u(t)$

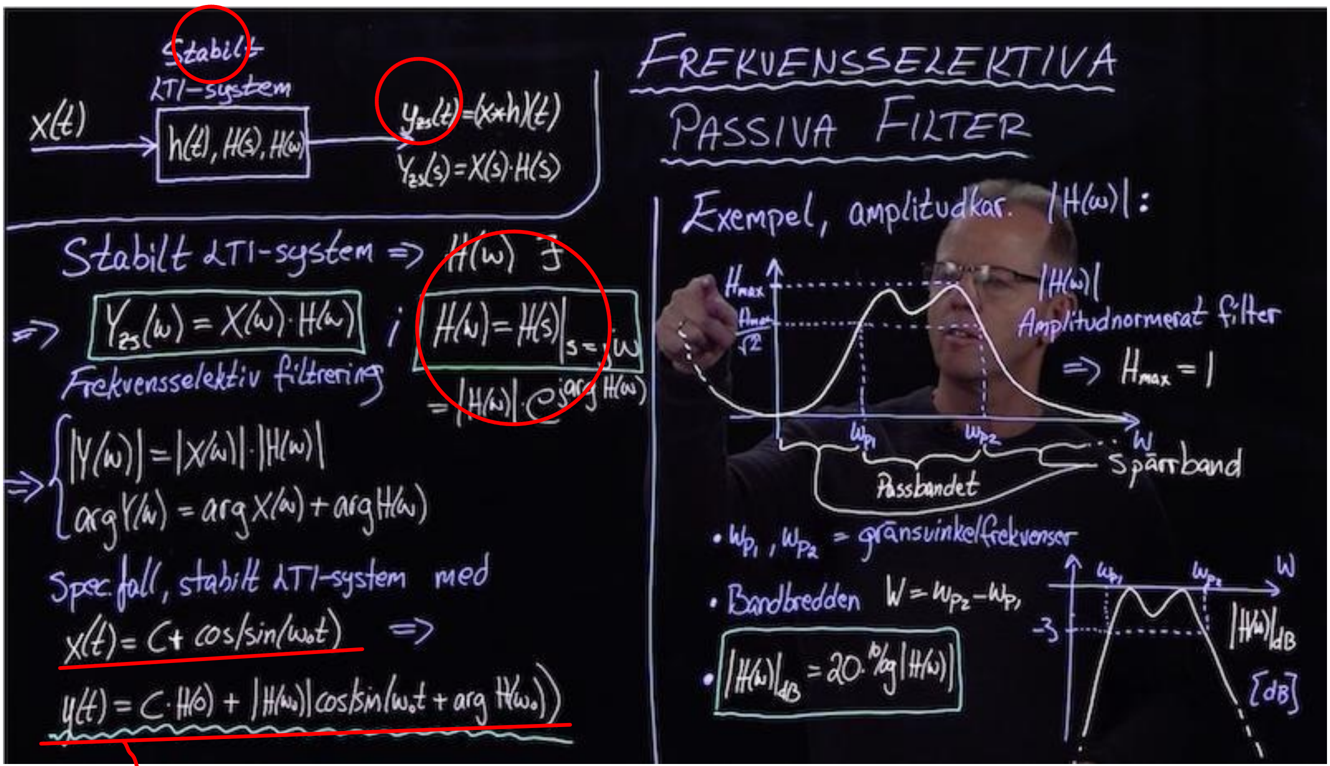
$\frac{B}{\Delta p} = 10$

$E_y \approx 54\%$ av E_x



VIDEO 2.2

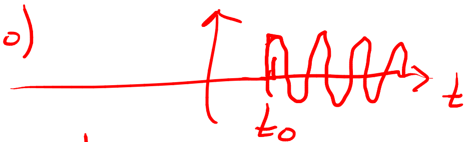




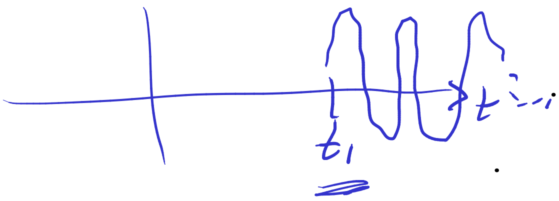
VIDEO 3.1

$y_{part}(t)$

$x(t) = \cos(\omega_0 t)\, u(t - t_0)$



$y_{zs}(t) = \underbrace{y_{transient}(t)}_{h\text{-termer}} + |H(\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))\, u(t - t_1)$



t_1 bestäms av t_0 & $h(t)$

$h(t) \neq 0$ vid $t = 0$ ⇒

$h(t<0) = 0$ $\quad t_1 = t_0$

---

1. Hur kan vi få en god förståelse för (en intuitiv tolkning av) hur |H(w)| och arg H(w) ser ut grafiskt utgående från pol-nollställediagrammet för H(s)?

2. Hur kan vi själva placera/välja poler och nollställen hos H(s) så vi erhåller önskad amplitudkaraktäristik |H(w)| och faskaraktäristik arg H(w)?

$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer

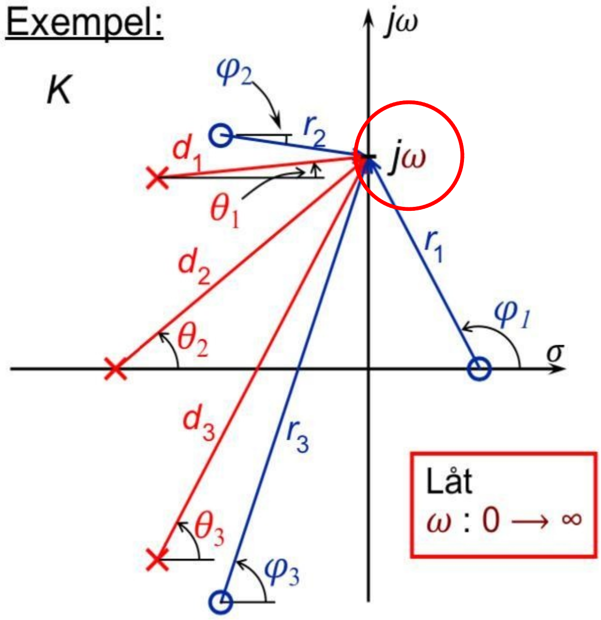
Stabilt LTI-system
$\Downarrow$

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = \begin{cases} K\cdot\dfrac{(j\omega-n_1)(j\omega-n_2)\cdots(j\omega-n_M)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_N)} = K\cdot\dfrac{r_1e^{j\varphi_1}\cdot r_2e^{j\varphi_2}\cdot\ldots\cdot r_Me^{j\varphi_M}}{d_1e^{j\theta_1}\cdot d_2e^{j\theta_2}\cdot\ldots\cdot d_Ne^{j\theta_N}} \\ |H(\omega)|\,e^{j\arg H(\omega)} \end{cases}$$

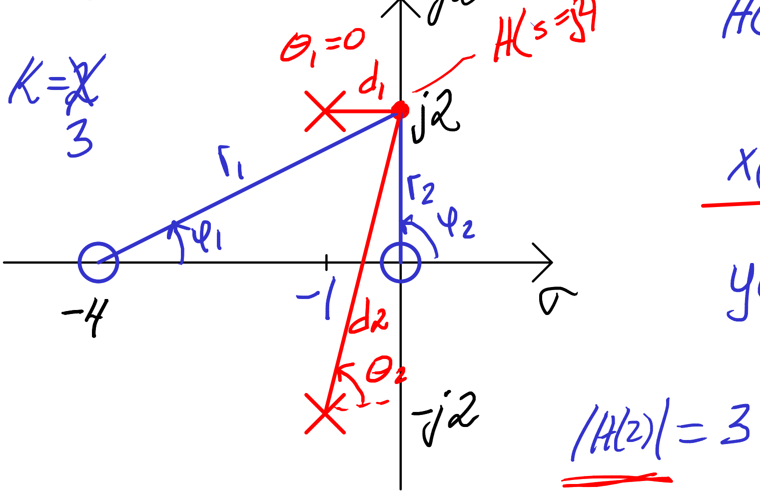
$$\boxed{|H(\omega)| = |K|\cdot\frac{r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_M}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_N}}$$

$$\boxed{\arg H(\omega) = \arg K + (\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_M) - (\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_N)}$$

Exempel:



Exempel: $\overline{N}_1 = r_1\cdot e^{j\varphi_1}$



$$H(s) = 3\,\frac{s(s+4)}{(s+1)^2+2^2}\ ,\ Re\{s\} > -1$$

$$x(t) = \cos(2t)$$

Krav? $\Longrightarrow$ Stabilt LTI-system

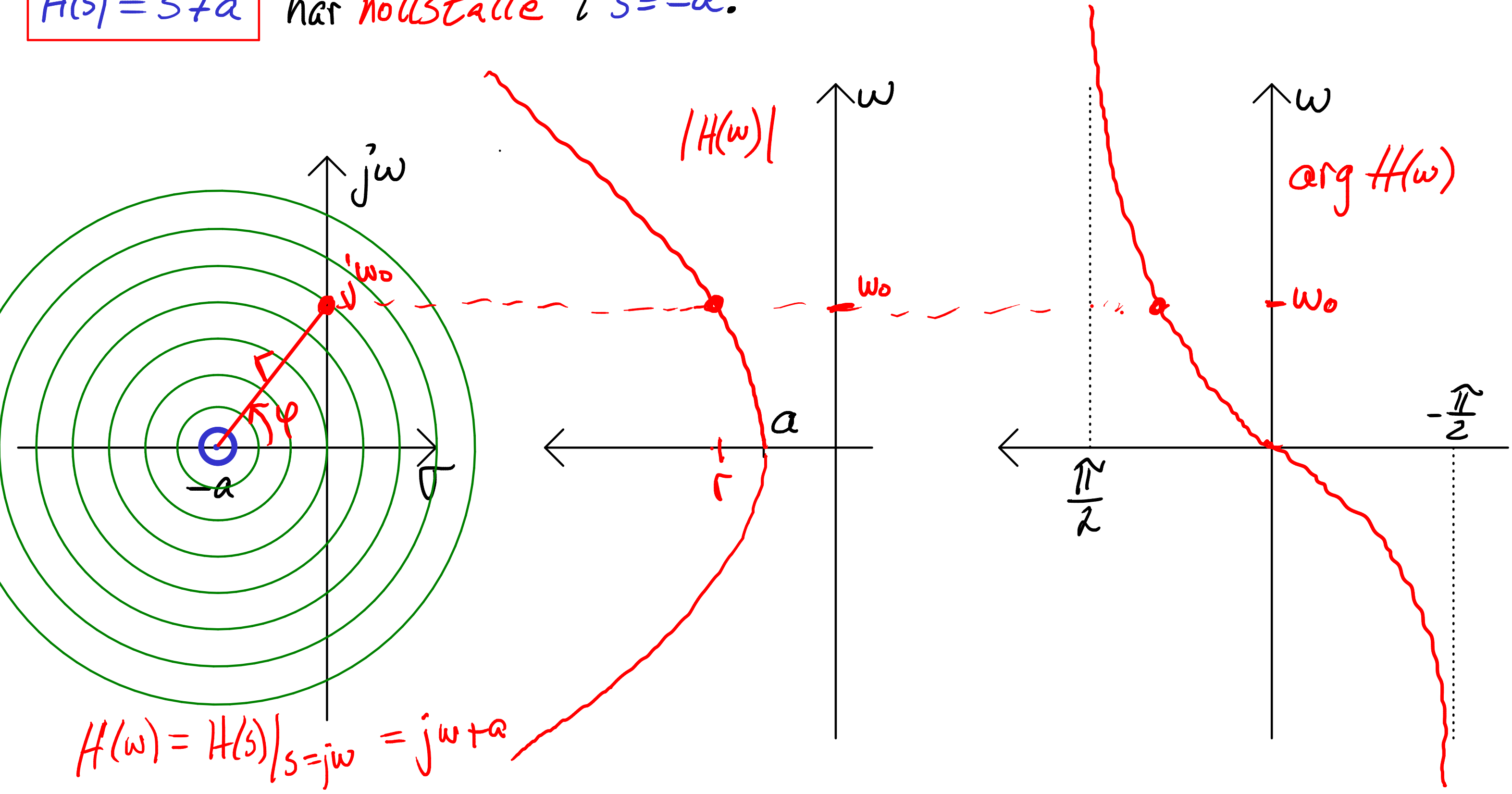
$$y(t) = |H(2)|\cdot\cos(\underset{\uparrow\ \omega_0=2}{2}t + \arg H(2))$$

$$|H(2)| = 3\cdot\frac{r_1\cdot r_2}{d_1\cdot d_2} = 3\,\frac{\sqrt{4^2+2^2}\cdot 2}{1\cdot\sqrt{1^2+4^2}} \approx 6{,}5$$

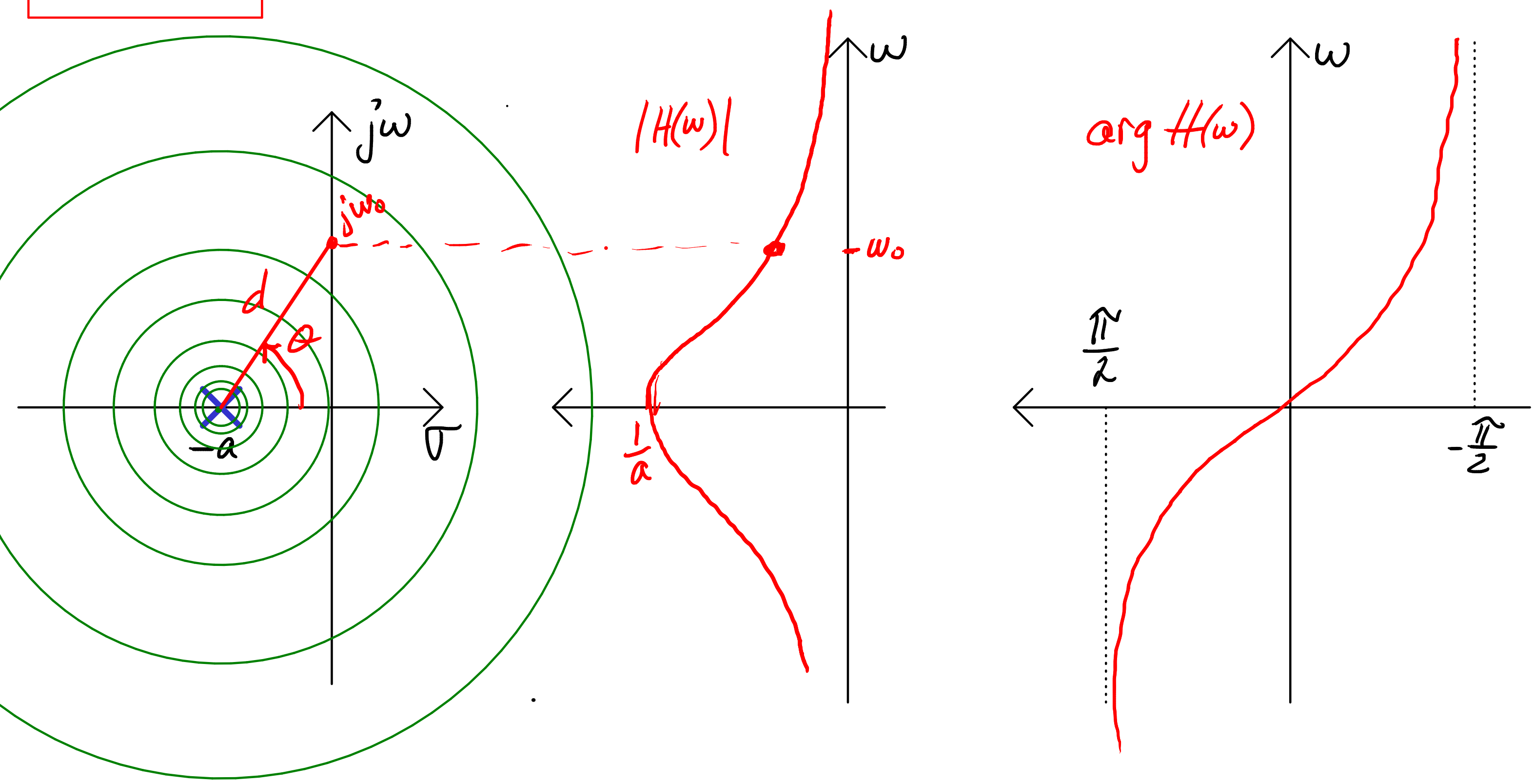
$$\arg H(2) = \arg 3 + \varphi_1 + \varphi_2 - \theta_1 - \theta_2$$
$$= 0 + \arctan\frac{2}{4} + \frac{\pi}{2} - 0 - \arctan\frac{4}{1} \approx 0{,}71\text{ rad}$$
$$\equiv 0{,}71 - 2\pi \approx -5{,}6\text{ rad}\ (\approx 321^\circ)$$

$$y(t) \approx 6{,}5\cos(2t + 0{,}71)$$

$\boxed{H(s) = s+a}$ har nollställe i $s=-a$:



$\boxed{H(s) = \dfrac{1}{s+a}}$ har pol i $s=-a$:

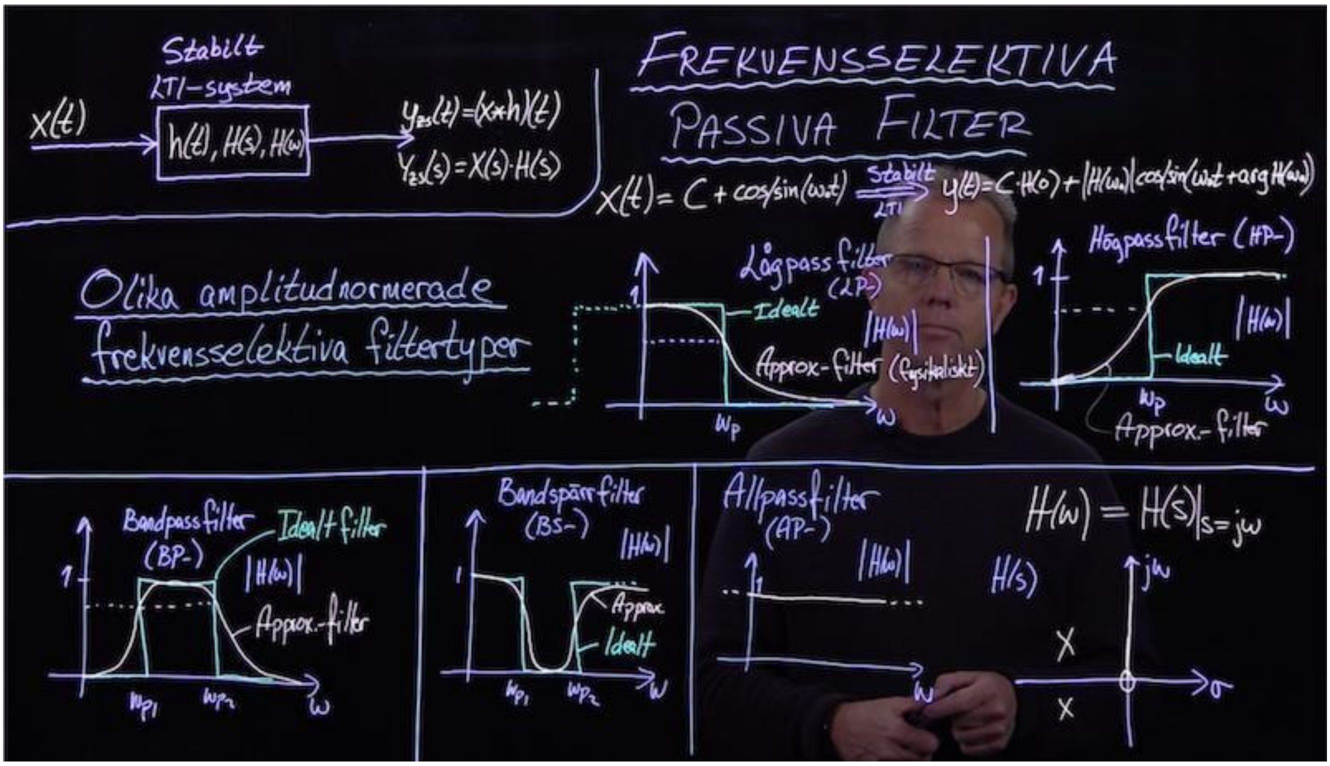


(Demo i pzchange i båda fallen ovan!)

Demo i pzchange av tidigare exempel med $H(s) = 3\dfrac{s(s+4)}{(s+1)^2+2^2}$, $Re\{s\} > -1$

Kommentar efter föreläsningen:

Det blev inget demo i pzchange baserat på denna systemfunktion H(s).
Jag improviserade i stället utgående från exemplen på föregående sida.



VIDEO 3.2