Forts. om STABILITET från förra föreläsningen (Nr. 8)

Följande tre sidor om stabilitet är de tre sista sidorna i materialet från föreläsning 8:

Stabilitet – för energifria LTI-system

(Externt) stabilt system: (Insignal-utsignal-stabilt)

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

$\Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$ gäller för stabila **LTI**-system

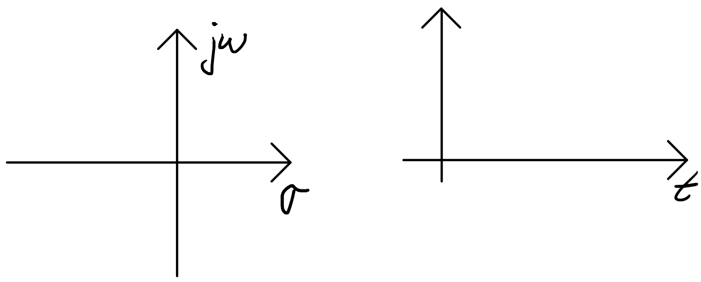
$\Rightarrow \quad \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$

$\left(\mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} \mathcal{L}\{h(t)\} \right) \quad \overset{\sigma=0}{\Rightarrow} \quad \boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}}$

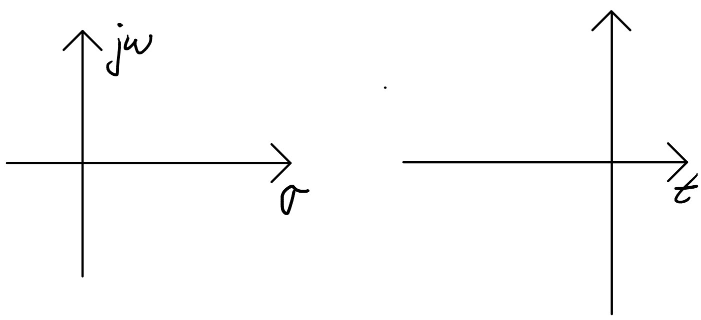
$\Leftrightarrow$ $j\omega$ -axeln ligger i systemfunktionens konvergensområde!

Konsekvens: Systemfunktionen till ett stabilt system har *minst lika många poler som nollställen* – annars ingår inte $\pm j\infty$ i konvergensområdet

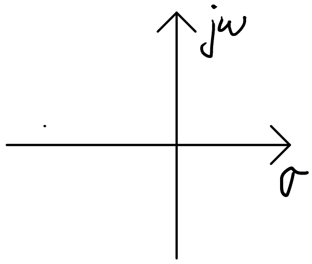
Exempel 1:



Exempel 2:



Exempel 3:



Marginellt stabilt system:

De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \not< \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases}$$

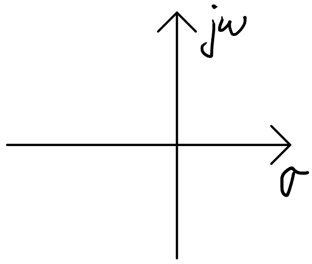
gäller för marginellt stabila **LTI**-system

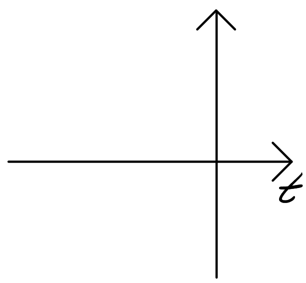
$\Leftrightarrow$

- $H(s)$ har *minst en enkelpol på $j\omega$ -axeln*
- $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$
- $H(s)$ har minst lika många poler som nollställen (egentligen #P ≥ #N–1)

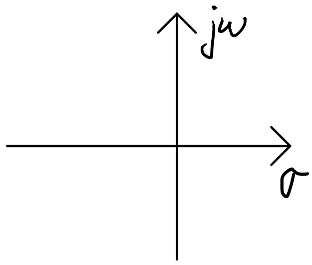
$$\Rightarrow \quad \boxed{H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega,\, s\neq \text{pol}}}$$

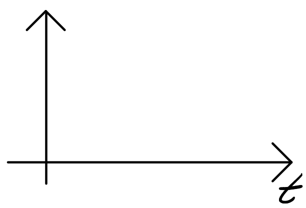
Exempel 1:





Exempel 2:





Instabilt system:

Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt \nless \infty \\ |h(t)| \nless \infty \quad \forall t \end{cases}$$

gäller för instabila **LTI**-system

$\Leftrightarrow$

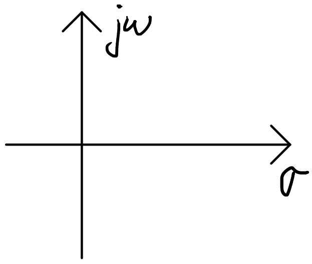
- $j\omega$ -axeln ligger *inte* i konvergensområdet för $H(s)$

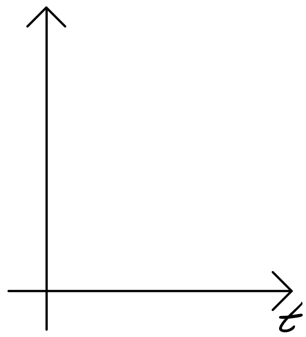
eller

- $j\omega$ -axeln utgör en *rand* till konvergensområdet för $H(s)$ och $H(s)$ har en minst en *multipelpol på* $j\omega$ *-axeln*

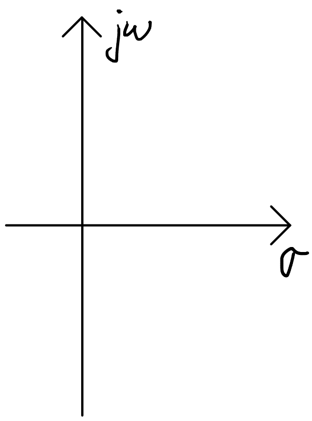
$$\Rightarrow \quad H(\omega) \text{ existerar inte}$$

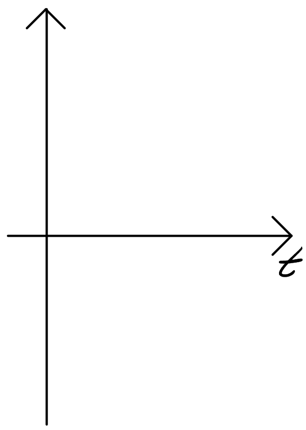
Exempel 1:

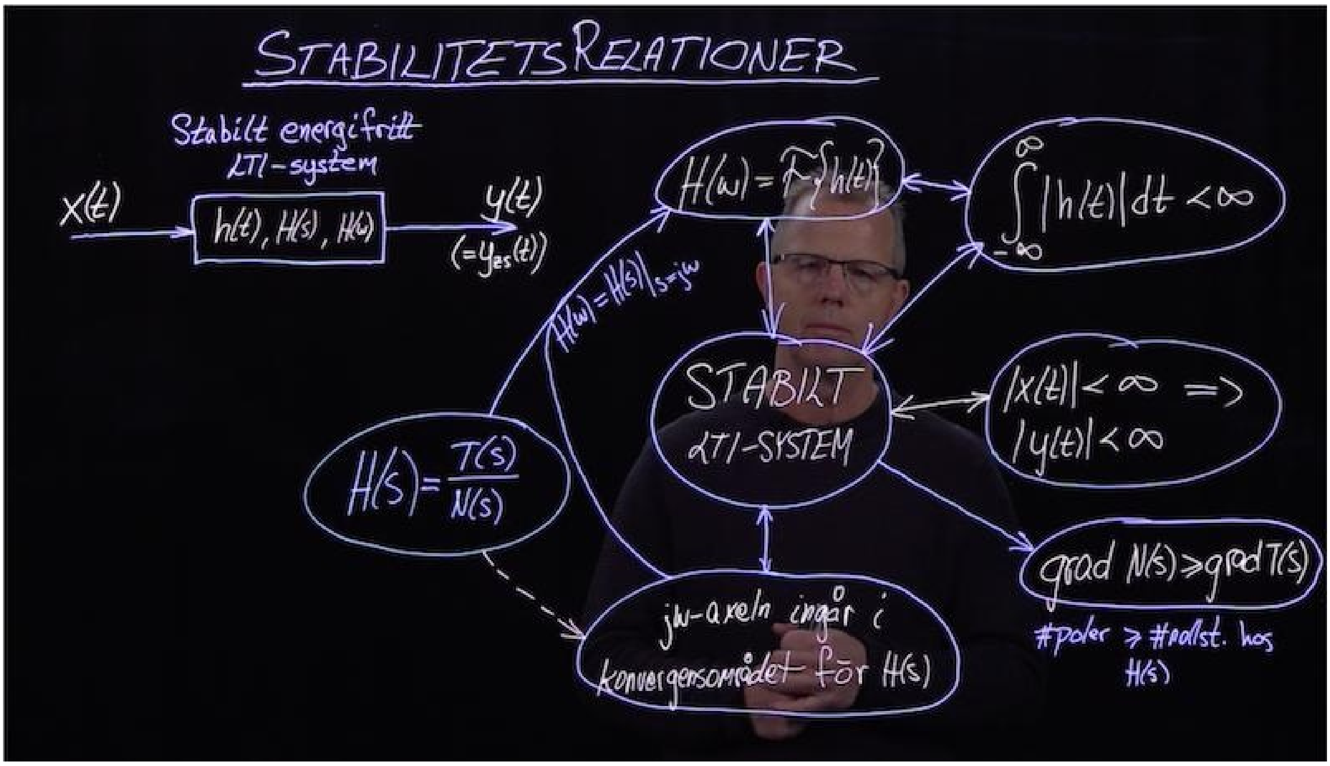




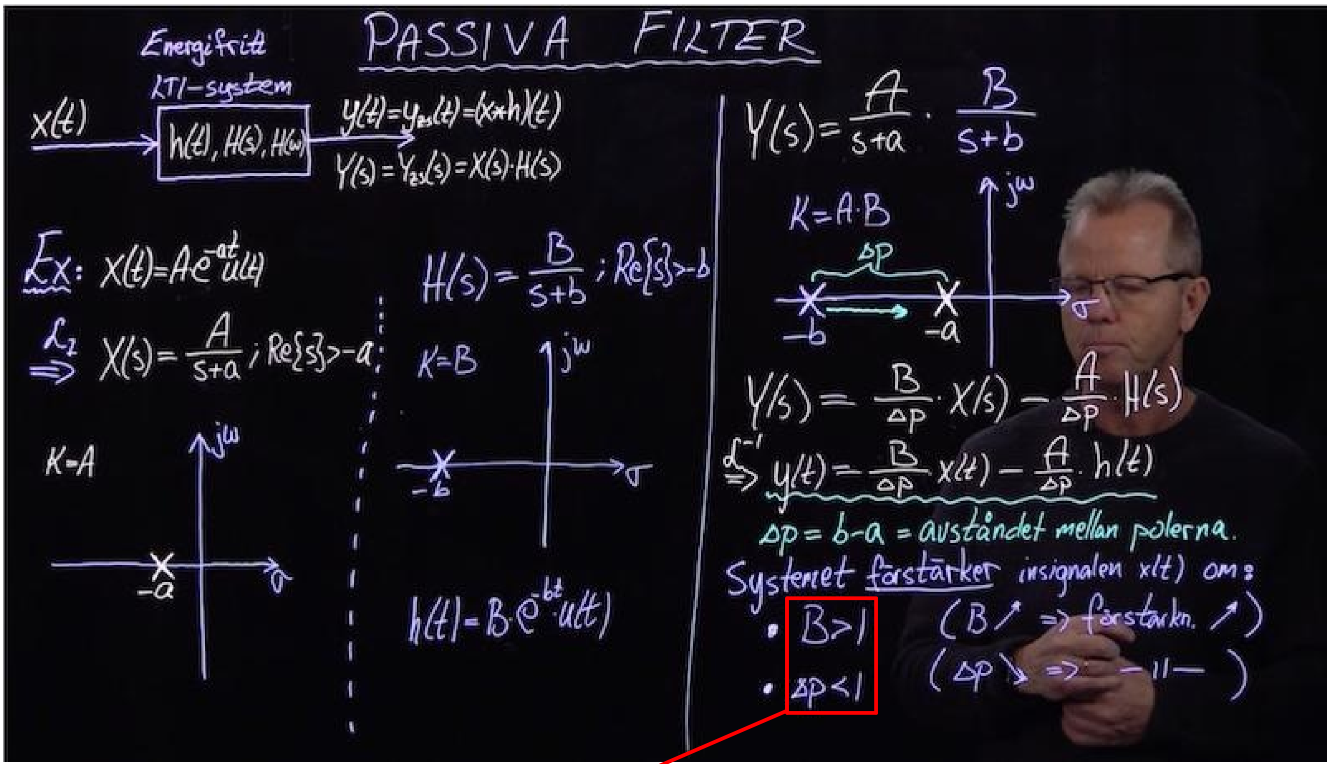
Exempel 2:





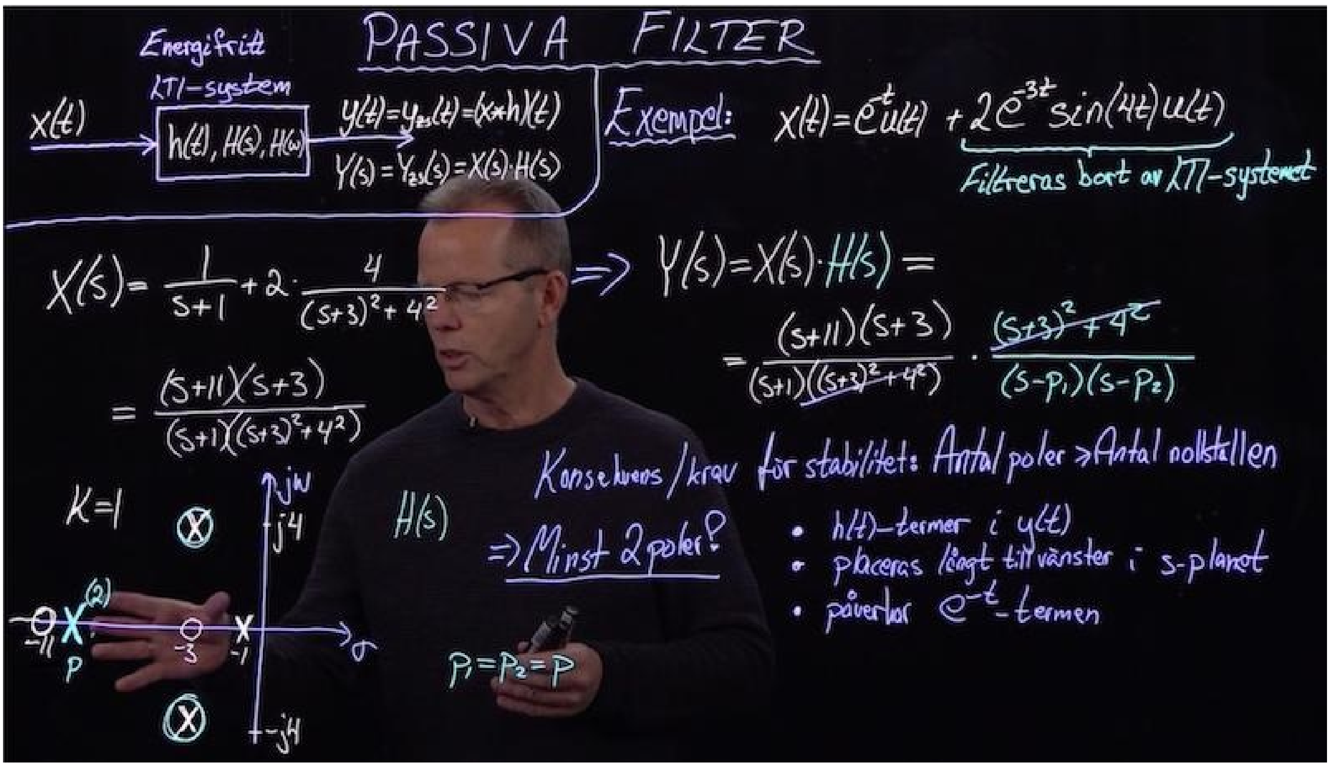

STABILITETSRELATIONER
Stabilt energifritt
LTI-system
x(t)
h(t), H(s), H(ω)
y(t)
(= y_es(t))
H(ω) = F{h(t)}
∫_{-∞}^{∞} |h(t)| dt < ∞
H(ω) = H(s)|_{s=jω}
STABILT
LTI-SYSTEM
|x(t)| < ∞ ⟹
|y(t)| < ∞
H(s) = T(s)/N(s)
grad N(s) ≥ grad T(s)
#poler ≥ #nollst. hos
H(s)
jω-axeln ingår i
konvergensområdet för H(s)

VIDEO 1

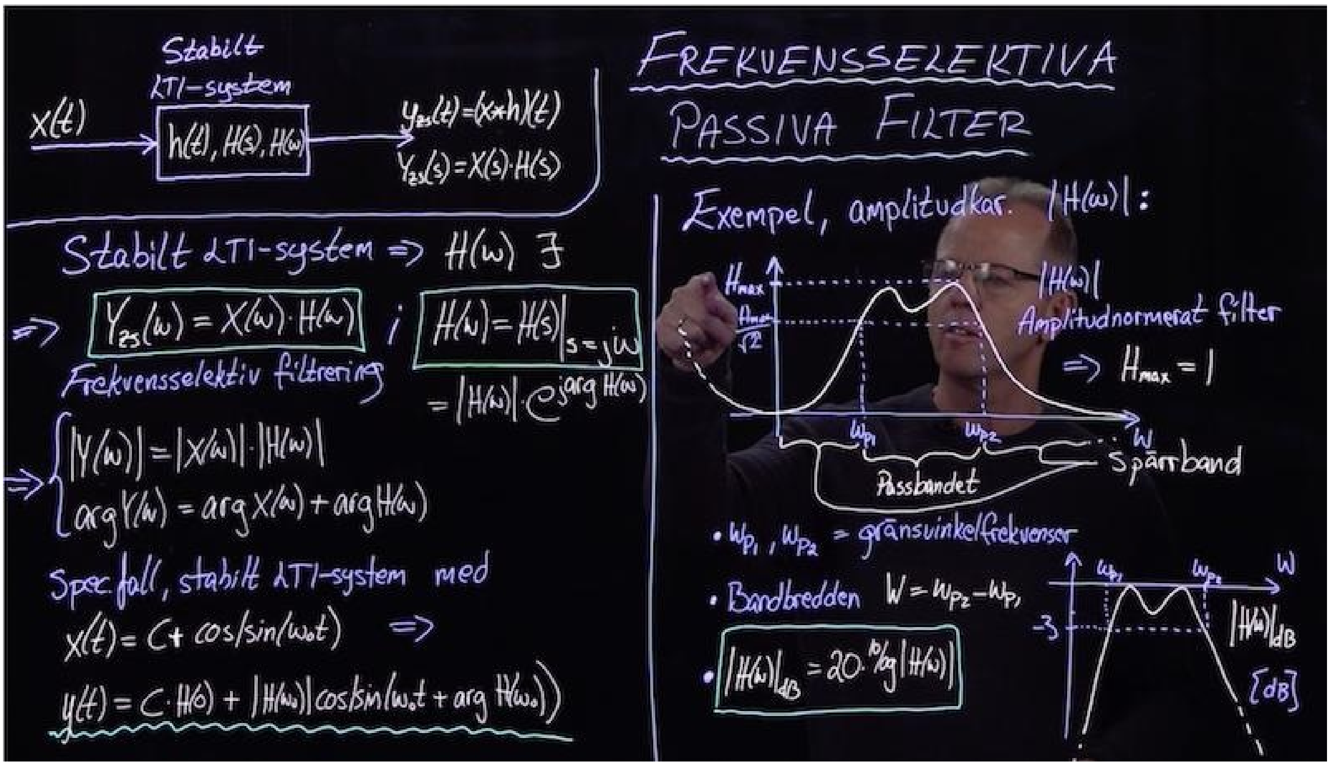


VIDEO 2.1

Bättre, mer korrekt: Förstärkning om $\frac{B}{\Delta p} > 1$ dvs. om $\Delta p < B$



VIDEO 2.2



1. **Hur kan vi få en god förståelse för (en intuitiv tolkning av) hur |H(w)| och arg H(w) ser ut grafiskt utgående från pol-nollställediagrammet för H(s)?**

2. **Hur kan vi själva placera/välja poler och nollställen hos H(s) så vi erhåller önskad amplitudkaraktäristik |H(w)| och faskaraktäristik arg H(w)?**

$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer

Stabilt LTI-system

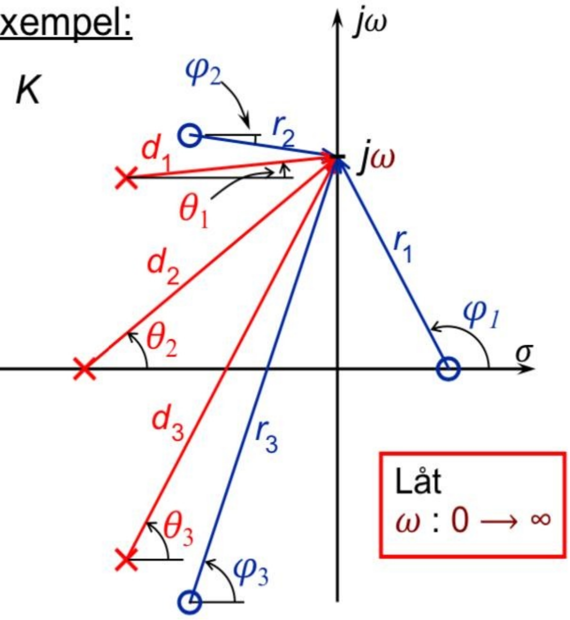
$\Downarrow$

$$H(\omega)=H(s)\big|_{s=j\omega}=\begin{cases} K\cdot\dfrac{(j\omega-n_1)(j\omega-n_2)\cdots(j\omega-n_M)}{(j\omega-p_1)(j\omega-p_2)\cdots(j\omega-p_N)} = K\cdot\dfrac{r_1e^{j\varphi_1}\cdot r_2e^{j\varphi_2}\cdot\ldots\cdot r_Me^{j\varphi_M}}{d_1e^{j\theta_1}\cdot d_2e^{j\theta_2}\cdot\ldots\cdot d_Ne^{j\theta_N}} \\ \\ |H(\omega)|\,e^{j\arg H(\omega)} \end{cases}$$

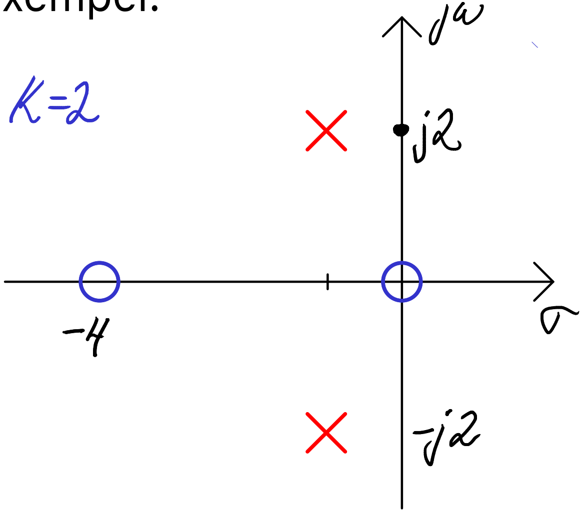
$$|H(\omega)|=|K|\cdot\frac{r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_M}{d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_N}$$

$$\arg H(\omega)=\arg K+(\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_M)-(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_N)$$

Exempel:



Exempel:

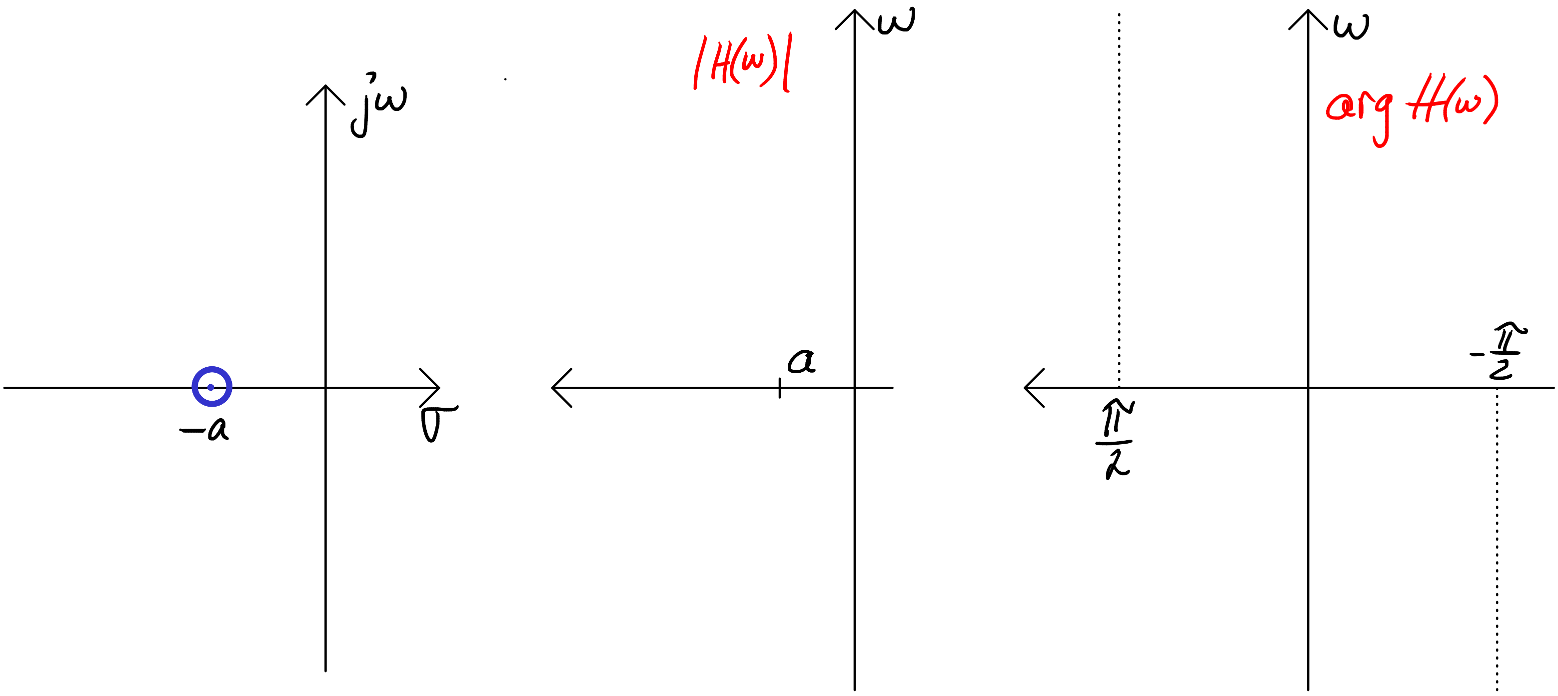


$$H(s)=3\,\frac{s(s+4)}{(s+1)^2+2^2}\quad,\ \mathrm{Re}\{s\}>-1$$

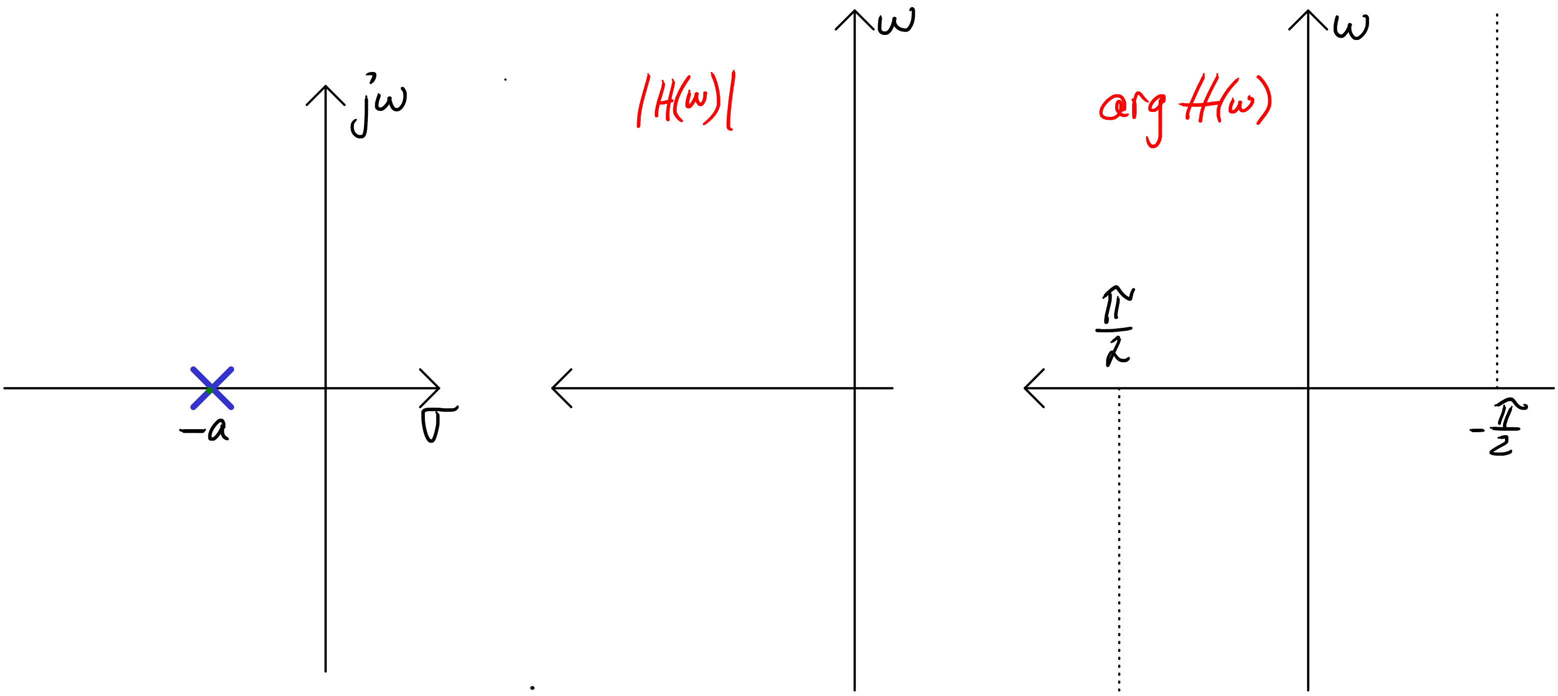
$$x(t)=\cos(2t)\quad\overset{\text{Krav?}}{\Longrightarrow}$$

$$y(t)=|H(2)|\cdot\cos(2t+\arg H(2))$$

$\boxed{H(s) = s + a}$ har nollställe i $s = -a$:

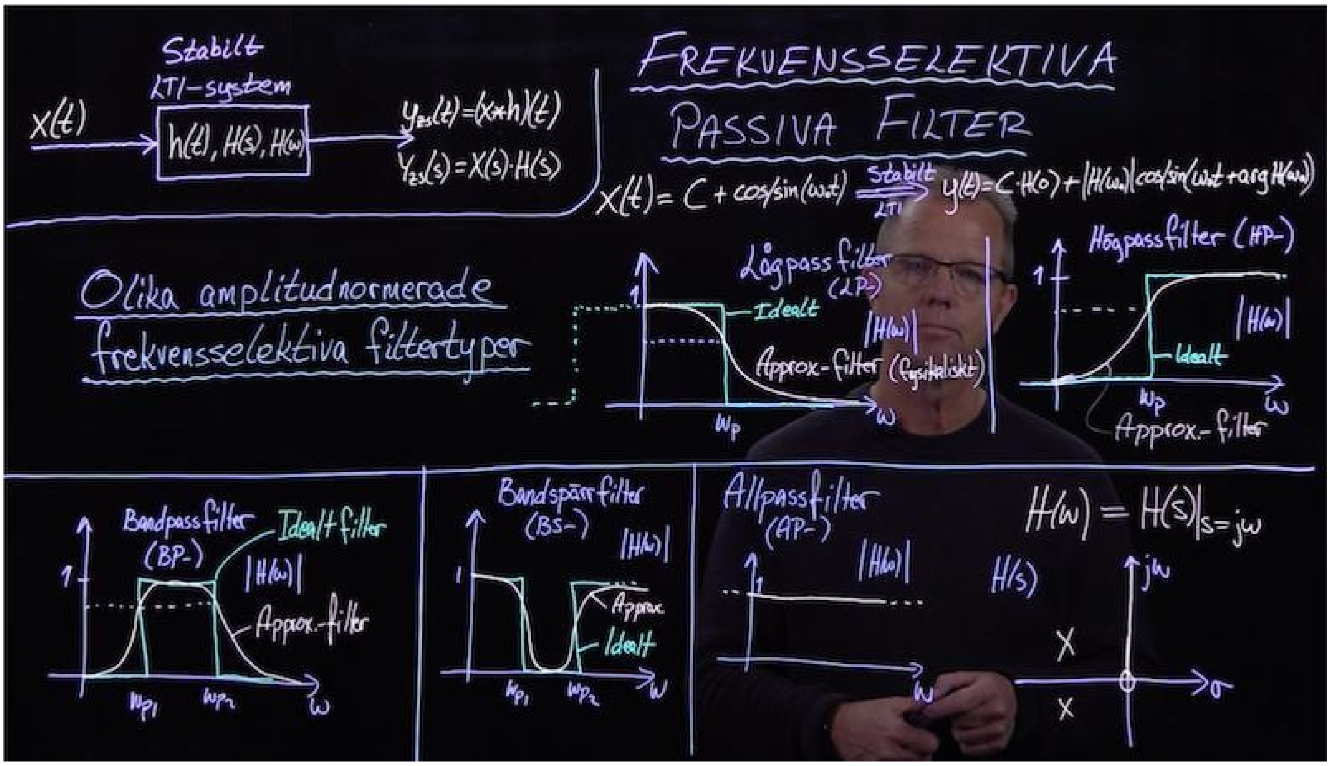


$\boxed{H(s) = \frac{1}{s+a}}$ har pol i $s = -a$:



(Demo i pzchange i båda fallen ovan!)

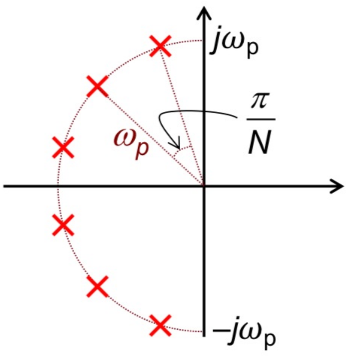
Demo i pzchange av tidigare exempel med $H(s) = 3\dfrac{s(s+4)}{(s+1)^2+2^2}$, $\mathrm{Re}\{s\} > -1$



VIDEO 3.2

Butterworthfilter – (LP-filter)

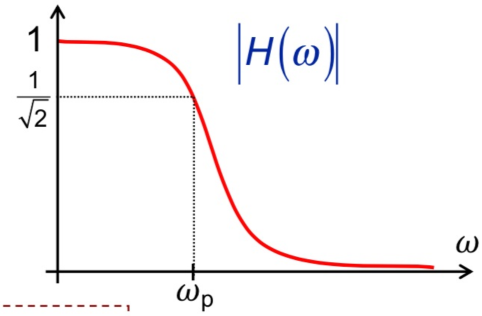
Poler hos *H*(*s*) längs en halvcirkel:



Poler:

$$p_k = \omega_\text{p} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{N}\cdot\frac{k}{2}\right)}$$

$k = 1, 3, 5, \ldots, 2N-1$

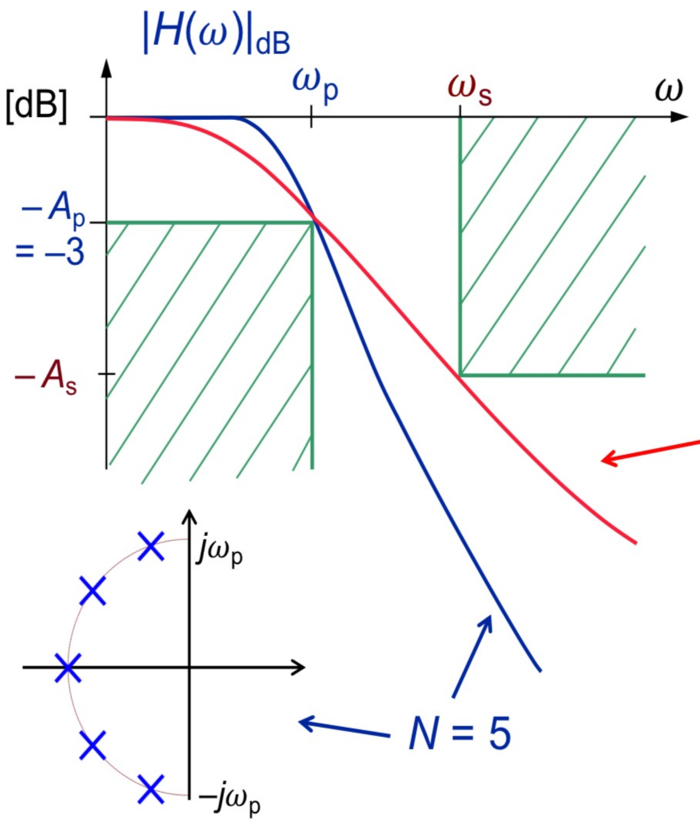


ω_p = 3 dB-gränsvinkelfrekvensen

$$\boxed{H(s) = \frac{\omega_\text{p}{}^N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + \omega_\text{p}{}^N}}$$

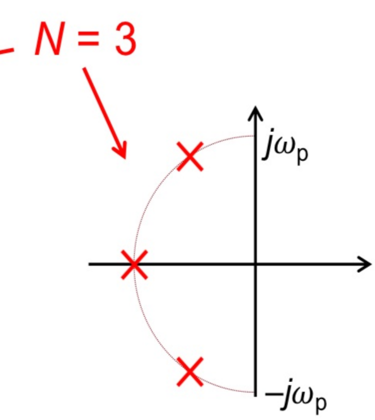
a_i erhålls vanligen från tabell eller genom utveckling av $(s-p_1)(s-p_3)\ldots(s-p_{2N-1})$

$$\boxed{\left|H(\omega)\right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_\text{p}}\right)^{2N}}}}$$

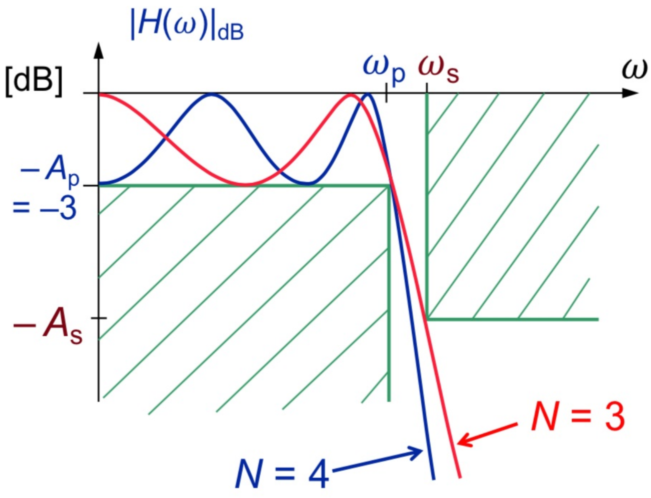


Butterworthfilter har maximalt flat amplitud-karaktäristik i passbandet!

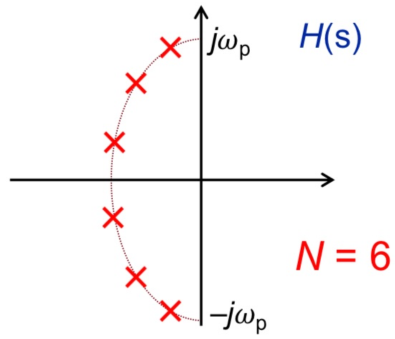
(Butt.filter ger bästa möjliga passbands-approximationen)



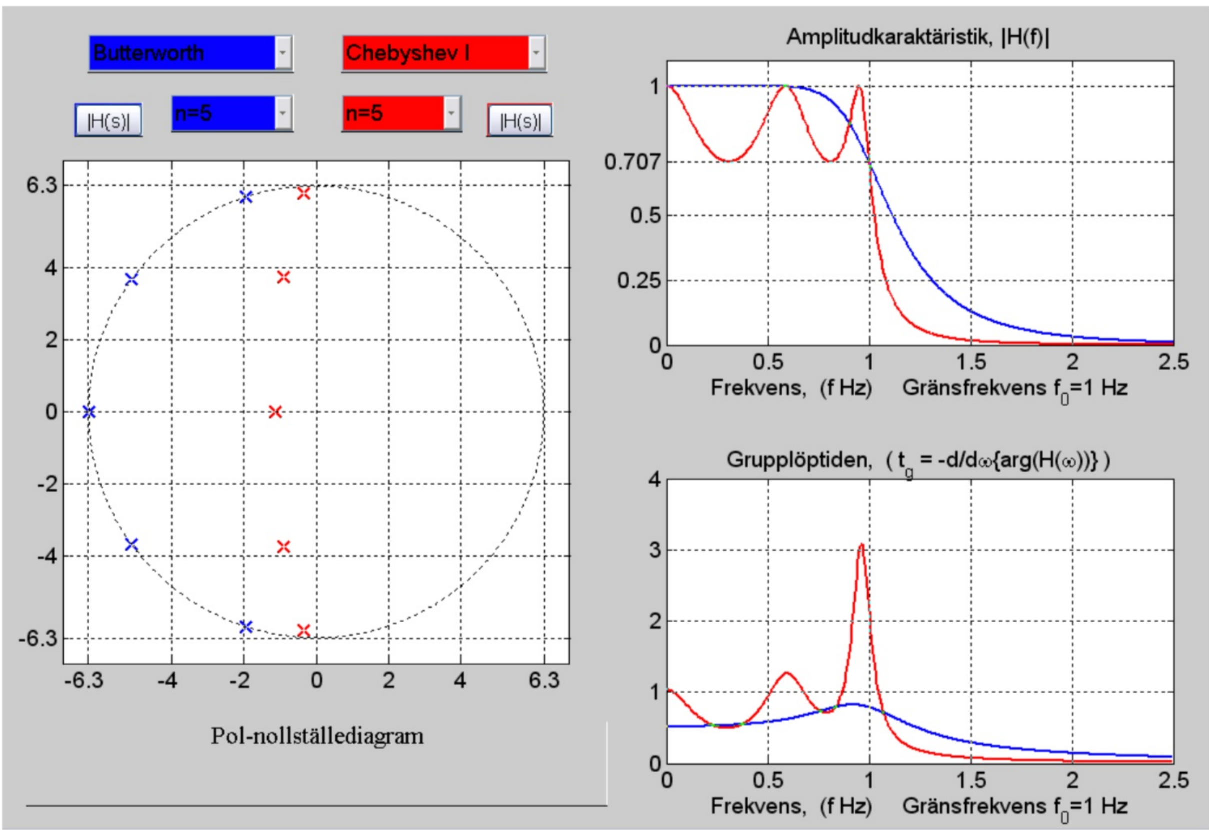
Chebyshev I-filter



- Rippel (A_p dB) i passbandet!
- Optimalt m.a.p. brantheten i övergångsbandet $\omega_p \longrightarrow \omega_s$
- Polerna hos $H(s)$ ligger längs en halv-ellips i VHP

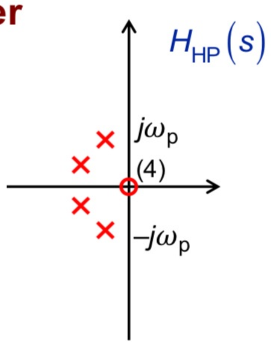


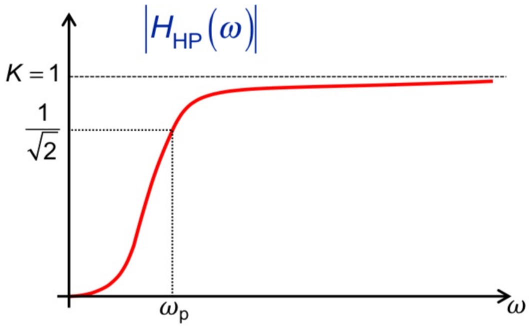
Matlabdemo – Butterworth- & Chebyshevfilter:



Typiska HP- & BP-filter

Högpassfilter





Bandpassfilter