

Signaler & System – Föreläsning 9: Laplacetransformanalys av LTI-system – Passiva filter

Forts. om STABILITET från förra föreläsningen (Nr. 8)

Följande tre sidor om stabilitet är de tre sista sidorna i materialet från föreläsning 8:

Stabilitet – för energifria LTI-system

(Externt) stabilt system: (Insignal-utsignal-stabilt)

Varje begränsad insignal ger upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \quad \text{gäller för stabila LTI-system}$$

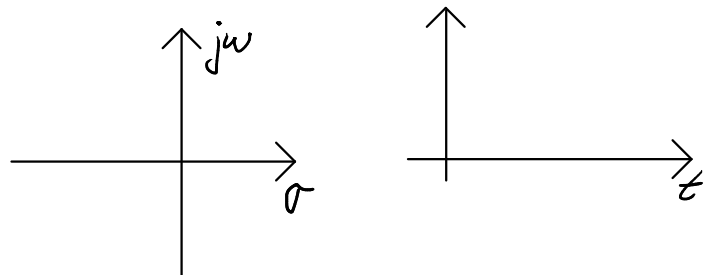
$$\Rightarrow \mathcal{F}\{h(t)\} = H(\omega) \quad \exists$$

$$\left(\mathcal{F}\{h(t)e^{-\sigma t}\} \xrightarrow{s=\sigma+j\omega} \mathcal{L}\{h(t)\} \right) \quad \begin{matrix} \sigma=0 \\ \Rightarrow \end{matrix} \quad \boxed{H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}}$$

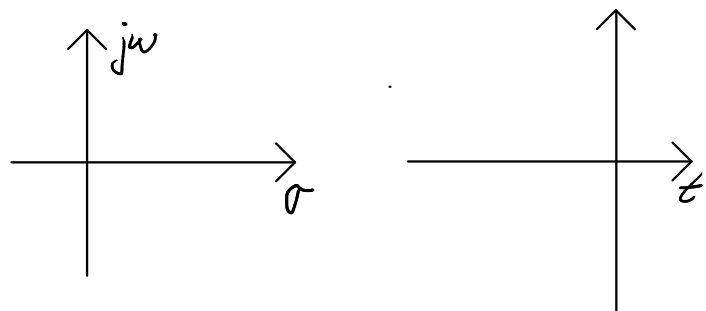
\Leftrightarrow $j\omega$ -axeln ligger i systemfunktionens konvergensområde!

Konsekvens: Systemfunktionen till ett stabilt system har *minst lika många poler som nollställen* – annars ingår inte $\pm j\infty$ i konvergensområdet

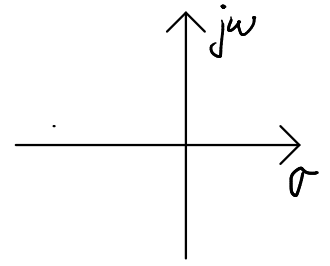
Exempel 1:



Exempel 2:



Exempel 3:



Marginellt stabilt system:

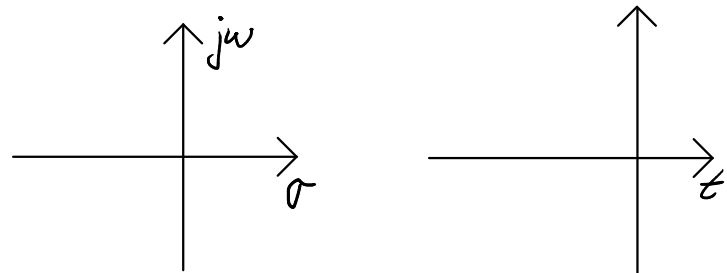
De flesta begränsade insignaler ger upphov till begränsade utsignaler

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ |h(t)| < \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \text{gäller för marginellt stabila LTI-system}$$

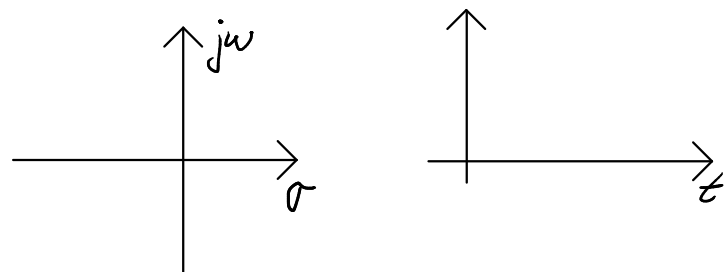
- $$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet H(s) \text{ har minst en enkelpol på } j\omega \text{-axeln} \\ \bullet j\omega \text{-axeln utgör en rand till konvergensområdet för } H(s) \\ \bullet H(s) \text{ har minst lika många poler som nollställen (egentligen } \#P \geq \#N-1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega, s \neq \text{pol}}$$

Exempel 1:



Exempel 2:



Instabilt system:

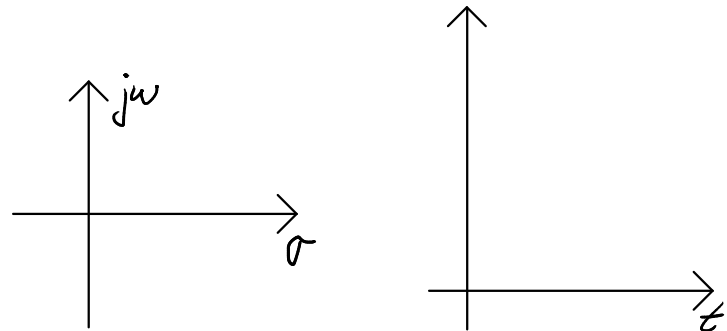
Ingen begränsad nollskild insignal kan ge upphov till en begränsad utsignal

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \neq \infty \\ |h(t)| \neq \infty \quad \forall t \end{cases} \quad \text{gäller för instabila LTI-system}$$

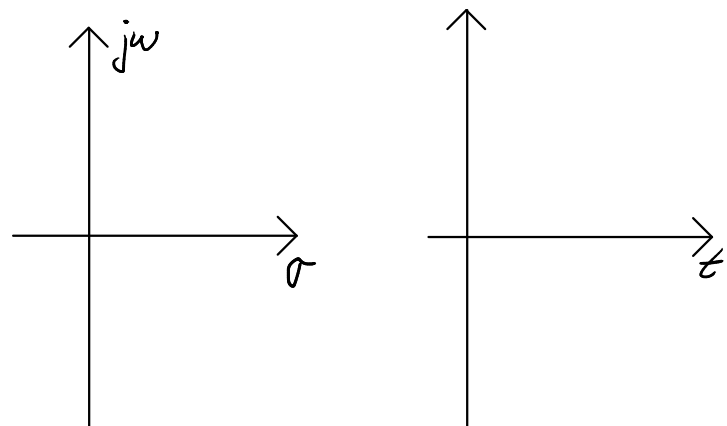
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ } j\omega \text{-axeln ligger } \textit{inte} \text{ i konvergensområdet för } H(s) \\ \textit{eller} \\ \bullet \text{ } j\omega \text{-axeln utgör en } \textit{rand} \text{ till konvergensområdet för } H(s) \\ \text{och } H(s) \text{ har en minst en } \textit{multipelpol} \text{ på } j\omega \text{-axeln} \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(\omega) \text{ existerar inte}$$

Exempel 1:

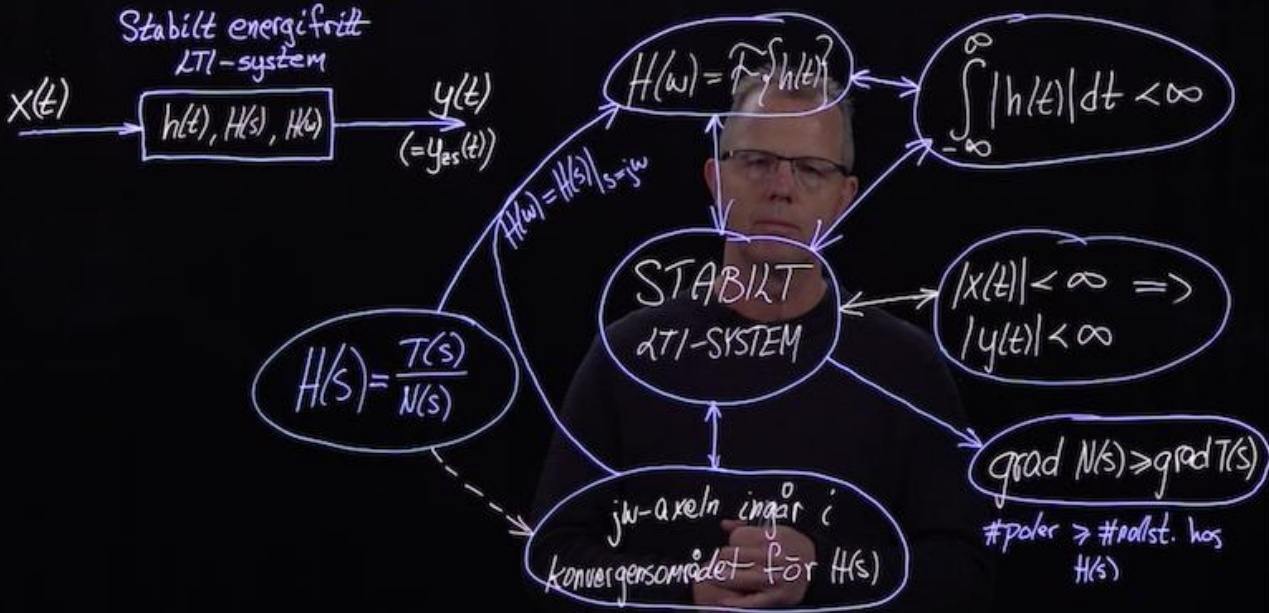


Exempel 2:



STABILITETSRELATIONER

VIDEO 1



Passiva Filter

Energifritt LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y(t) = y_{res}(t) = (x * h)(t)$
 $Y(s) = Y_{res}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Ex: $x(t) = A e^{-at} u(t)$
 $\Rightarrow X(s) = \frac{A}{s+a} ; \text{Re}\{s\} > -a$

$H(s) = \frac{B}{s+b} ; \text{Re}\{s\} > -b$
 $K = B$

$Y(s) = \frac{A}{s+a} \cdot \frac{B}{s+b}$
 $\Rightarrow y(t) = \frac{B}{\Delta p} x(t) - \frac{A}{\Delta p} h(t)$

$\Delta p = b - a = \text{avståndet mellan polerna}$
 Systemet förstärker signalen $x(t)$ om:

- $B > 1$ ($B \uparrow \Rightarrow \text{förstärkn.} \uparrow$)
- $\Delta p < 1$ ($\Delta p \downarrow \Rightarrow \text{förstärkn.} \uparrow$)

Bättre, mer korrekt: Förstärkning om $\frac{B}{\Delta p} > 1$ dvs. om $\Delta p < B$



Passiva Filter

Energifritt LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y(t) = y_{res}(t) = (x * h)(t)$
 $Y(s) = Y_{res}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Exempel: $x(t) = e^t u(t) + 2 e^{-3t} \sin(4t) u(t)$
 Filteras bort av LTI-systemet

$X(s) = \frac{1}{s+1} + 2 \cdot \frac{4}{(s+3)^2 + 4^2} \Rightarrow Y(s) = X(s) \cdot H(s) =$
 $= \frac{(s+1)(s+3)}{(s+1)((s+3)^2 + 4^2)} \cdot \frac{(s+3)^2 + 4^2}{(s-p_1)(s-p_2)}$

Konsekvens/krav för stabilitet: Antal poler \geq Antal nollställen

\Rightarrow Minst 2 poler?

$p_1 = p_2 = p$

- $h(t)$ -termen i $y(t)$
- placeras långt till vänster i s-planot
- påverkar e^{-t} -termen

Stabilit
LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{zs}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{zs}(s) = X(s) \cdot H(s)$

Stabilit LTI-system $\Rightarrow H(\omega) \exists$

$\Rightarrow Y_{zs}(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$; $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$
 Frekvensselektiv filtrering
 $= |H(\omega)| \cdot e^{j \arg H(\omega)}$

$\Rightarrow \begin{cases} |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \\ \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega) \end{cases}$

Spec fall, stabilt LTI-system med
 $x(t) = C + \cos/\sin(\omega_0 t) \Rightarrow$
 $y(t) = C \cdot H(\omega_0) + |H(\omega_0)| \cos/\sin(\omega_0 t + \arg H(\omega_0))$

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

Exempel, amplitudkar. $|H(\omega)|$:

H_{max}
 $\frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$
 $|H(\omega)|$
 Amplitudnormerat filter $\Rightarrow H_{max} = 1$

ω_{p1} ω_{p2}
 Passbandet
 Spännband

- ω_{p1}, ω_{p2} = gränsvinkel frekvenser
- Bandbredden $W = \omega_{p2} - \omega_{p1}$

$|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log |H(\omega)|$

-3
 $|H(\omega)|_{dB}$
 $[\text{dB}]$

1. Hur kan vi få en god förståelse för (en intuitiv tolkning av) hur $|H(\omega)|$ och $\arg H(\omega)$ ser ut grafiskt utgående från pol-nollställediagrammet för $H(s)$?

2. Hur kan vi själva placera/välja poler och nollställen hos $H(s)$ så vi erhåller önskad amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ och faskaraktäristik $\arg H(\omega)$?

$|H(\omega)|$ & $\arg H(\omega)$ från pol-nollställevektorer

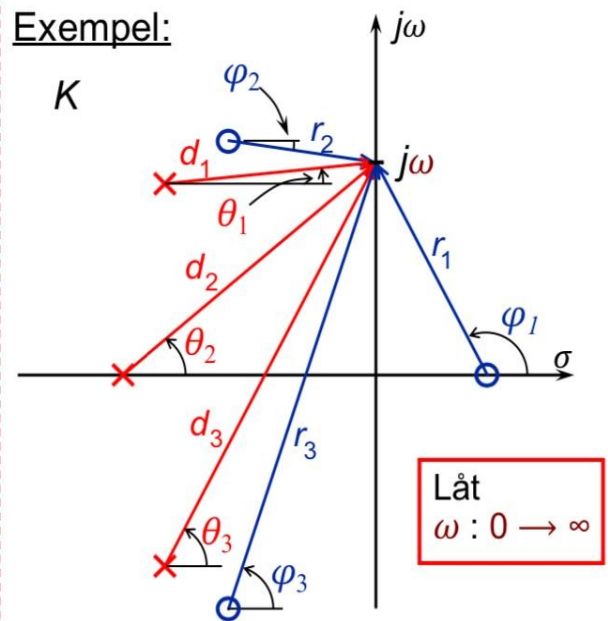
Stabilt LTI-system
 \downarrow
 $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \left\{ \begin{aligned} &K \cdot \frac{(j\omega - n_1)(j\omega - n_2) \cdots (j\omega - n_M)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \cdots (j\omega - p_N)} = K \cdot \frac{r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \cdots r_M e^{j\varphi_M}}{d_1 e^{j\theta_1} \cdot d_2 e^{j\theta_2} \cdots d_N e^{j\theta_N}} \end{aligned} \right.$

$$\underline{|H(\omega)|} e^{j \arg H(\omega)}$$

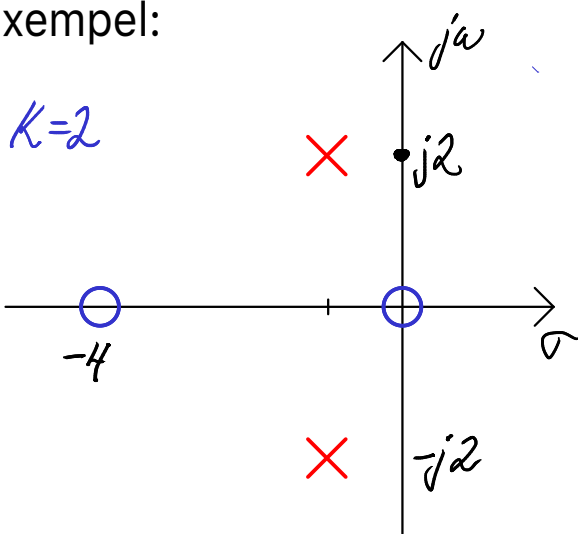
$$|H(\omega)| = |K| \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdots r_M}{d_1 \cdot d_2 \cdots d_N}$$

$$\arg H(\omega) = \arg K + (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)$$

Exempel:



Exempel:

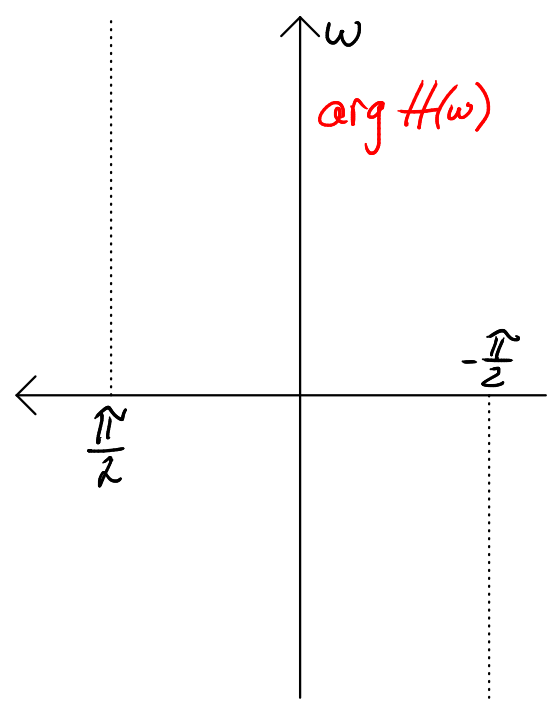
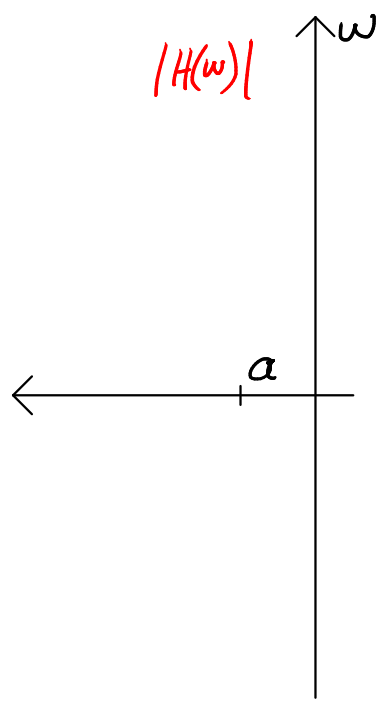
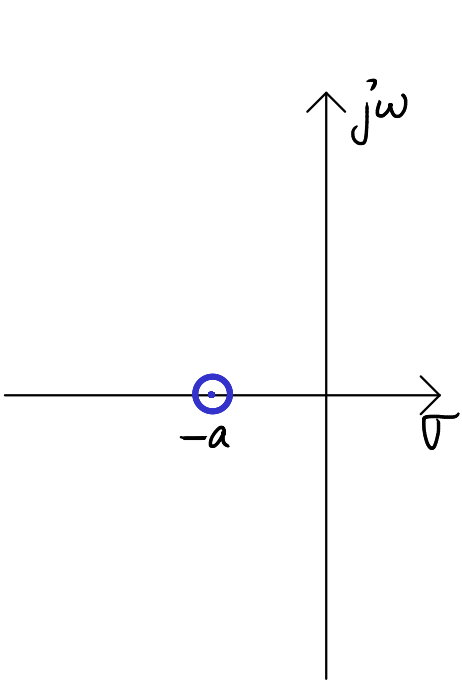


$$H(s) = 3 \frac{s(s+4)}{(s+1)^2 + 2^2}, \text{Re}\{s\} > -1$$

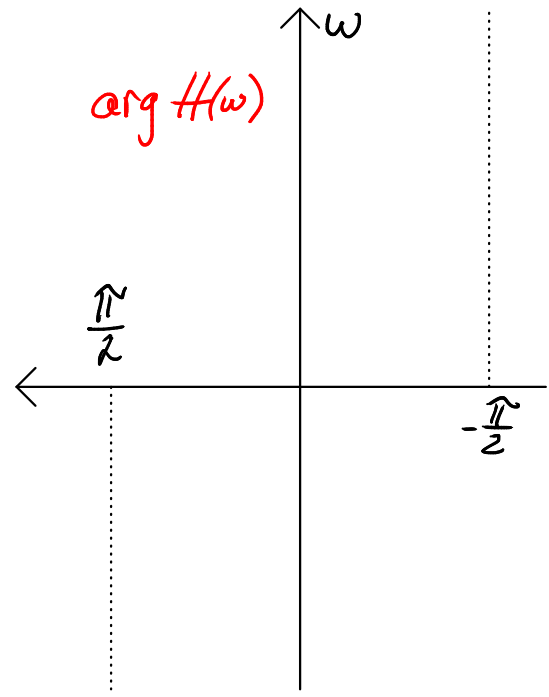
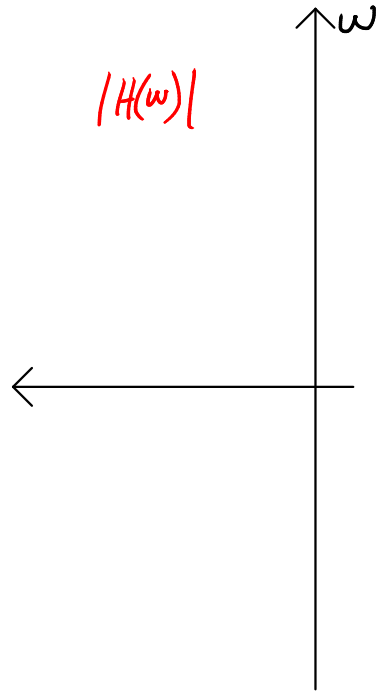
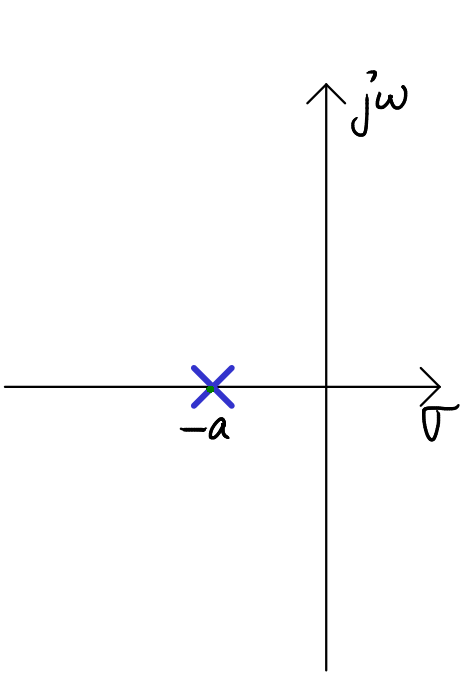
$$x(t) = \cos(2t) \quad \xrightarrow{\text{Krav?}}$$

$$y(t) = |H(2)| \cdot \cos(2t + \arg H(2))$$

$H(s) = s + a$ har nollställe i $s = -a$:



$H(s) = \frac{1}{s + a}$ har pol i $s = -a$:



(Demo i pzchange i båda fallen ovan!)

Demo i pzchange av tidigare exempel med

$$H(s) = 3 \frac{s(s+4)}{(s+1)^2 + 2^2}, \text{Re}\{s\} > -1$$

Stabilit
LTI-system

$x(t) \rightarrow h(t), H(s), H(\omega) \rightarrow y_{\text{res}}(t) = (x * h)(t)$
 $Y_{\text{res}}(s) = X(s) \cdot H(s)$

FREKVENSSELEKTIVA PASSIVA FILTER

$x(t) = C + \cos/\sin(\omega t) \xrightarrow{\text{Stabilit LTI}} y(t) = C \cdot H(0) + |H(\omega)| \cos/\sin(\omega t + \arg H(\omega))$

Olika amplitudnormerade frekvensselektiva filtertyper

Lågpass filter (LP-)
 - Idealt
 - Approx-filter (Equiriblickit) $|H(\omega)|$

Högpass filter (HP-)
 - Idealt $|H(\omega)|$
 - Approx-filter

Bandpass filter (BP-)
 - Idealt filter $|H(\omega)|$
 - Approx-filter

Bandspärfilter (BS-)
 - Approx. $|H(\omega)|$
 - Idealt

Allpassfilter (AP-)
 $|H(\omega)|$

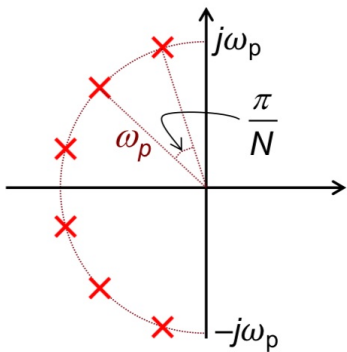
$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

$H(s)$ $j\omega$ σ

VIDEO 3.2

Butterworthfilter – (LP-filter)

Poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel:

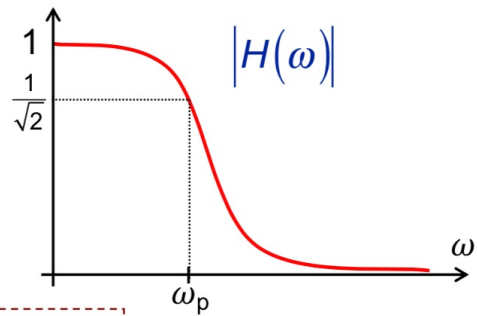


Poler:

$$p_k = \omega_p \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{N}\right)}$$

$$k = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1$$

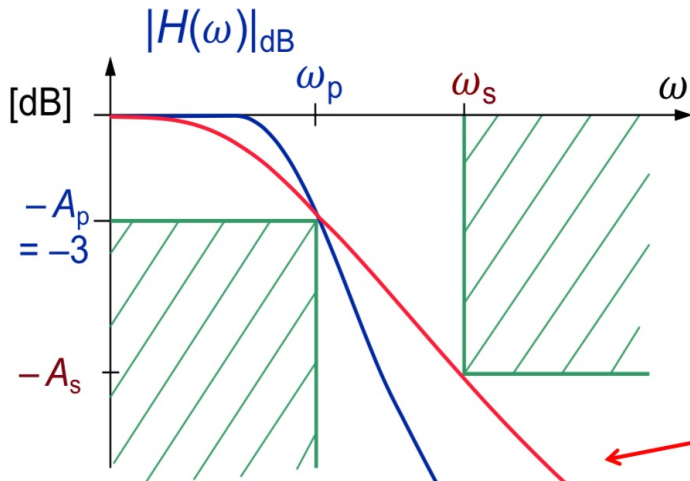
$\omega_p = 3$ dB-gränsvinkelfrekvensen



$$H(s) = \frac{\omega_p^N}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s + \omega_p^N}$$

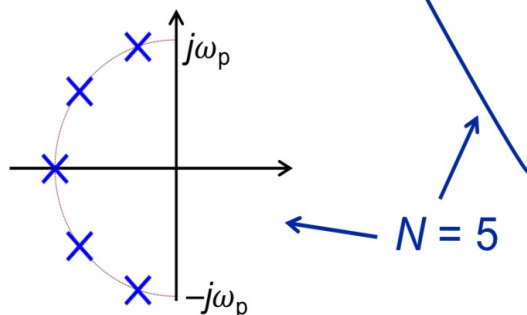
a_i erhålls vanligen från tabell eller genom utveckling av $(s-p_1)(s-p_3)\dots(s-p_{2N-1})$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$



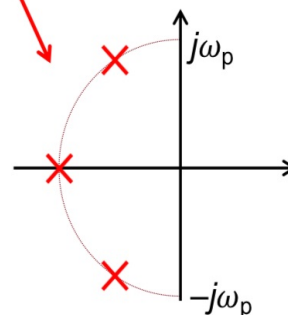
Butterworthfilter har maximalt flat amplitud-karaktäristik i passbandet!

(Butt.filter ger bästa möjliga passbands-approximationen)



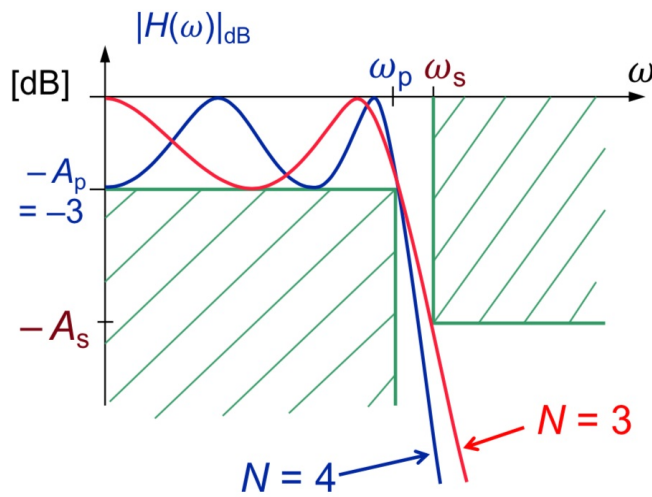
$N = 5$

$N = 3$

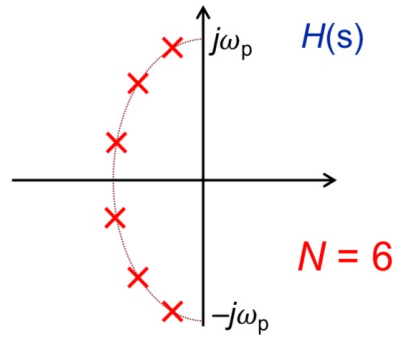


$-j\omega_p$

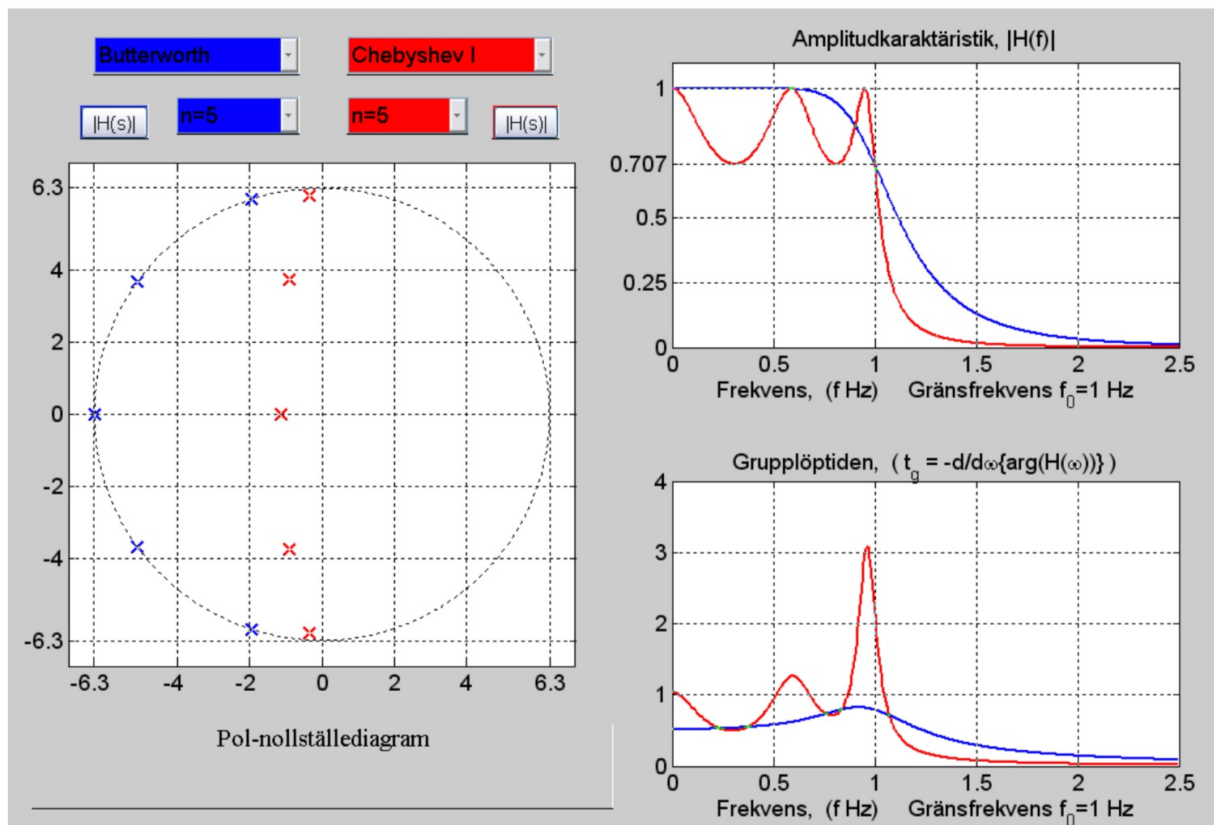
Chebyshev I-filter



- Rippel (A_p dB) i passbandet!
- Optimalt m.a.p. brantheten i övergångsbandet $\omega_p \rightarrow \omega_s$
- Polerna hos $H(s)$ ligger längs en halv-ellips i VHP

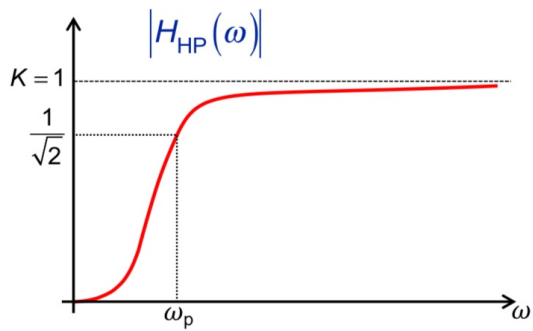
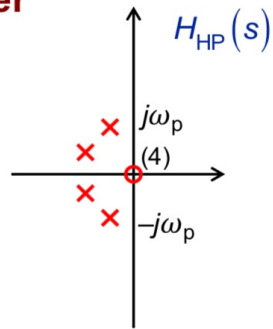


Matlabdemo – Butterworth- & Chebyshevfilter:



Typiska HP- & BP-filter

Högpasfilter



Bandpassfilter

