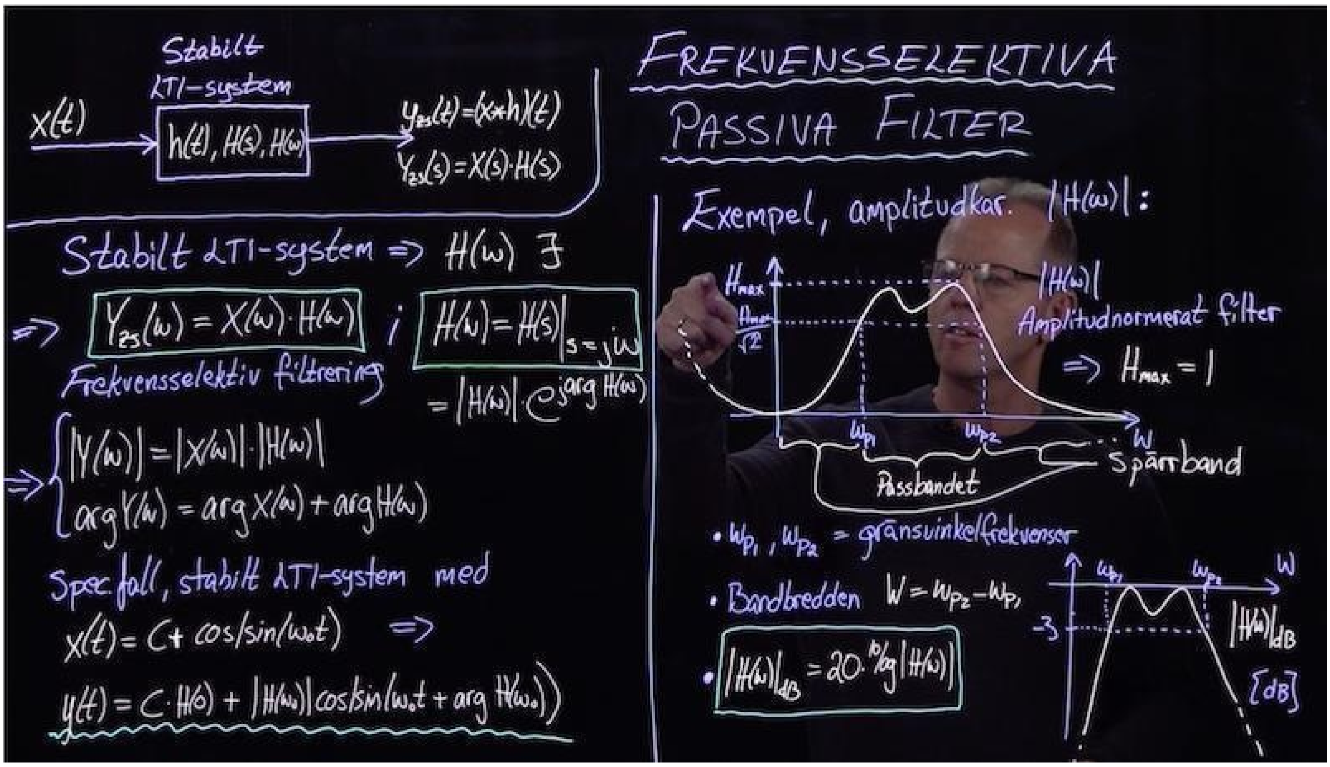
Signaler & System – Föreläsning 10:

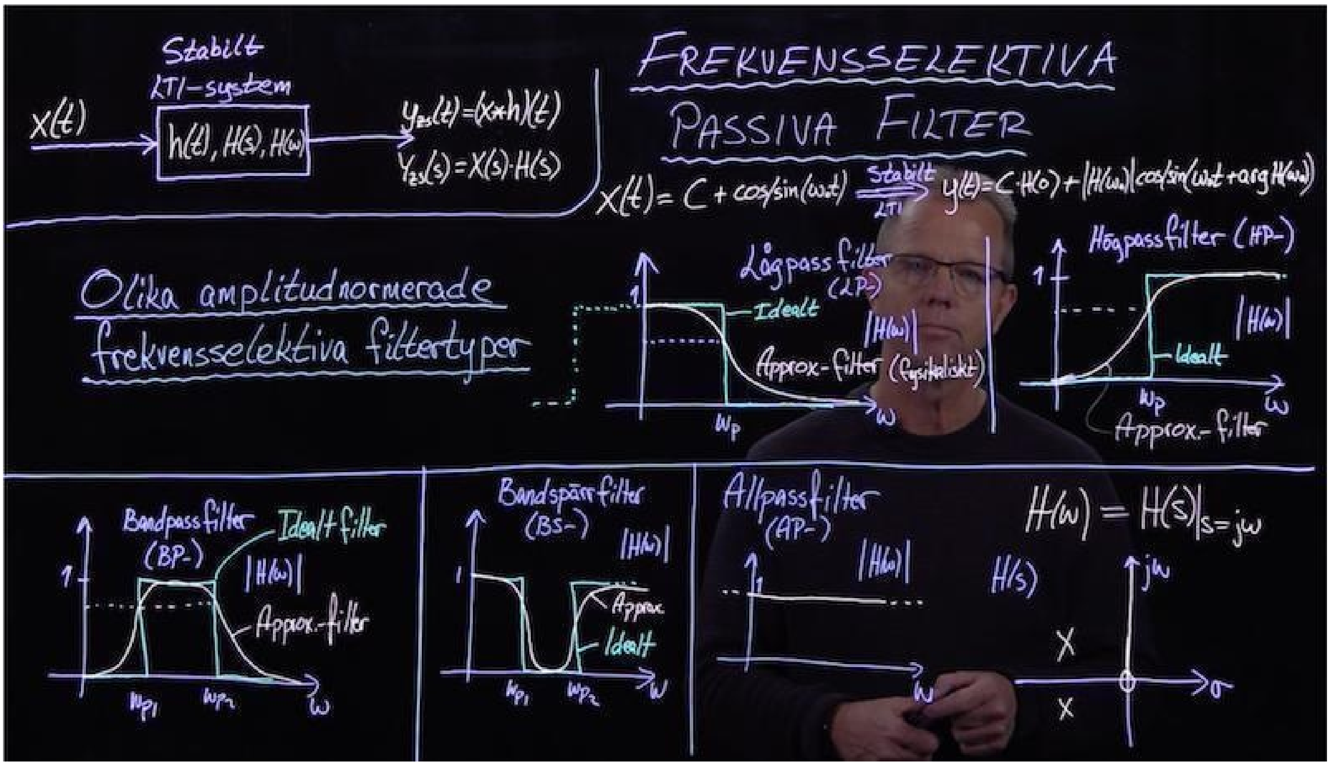
- **Laplacetransformanalys av LTI-system – Frekvensselektiva filter**
- **Tidsdömänanalys av tidsdiskreta signaler & system**

---

från förra föreläsningen:



VIDEO 3.1



VIDEO 3.2

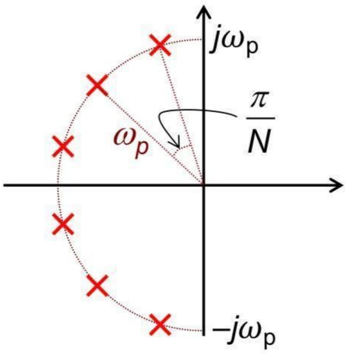
1. **Hur kan vi få en god förståelse för (en intuitiv tolkning av) hur |H(w)| och arg H(w) ser ut grafiskt utgående från pol-nollställediagrammet för H(s)?**

2. **Hur kan vi själva placera/välja poler och nollställen hos H(s) så vi erhåller önskad amplitudkaraktäristik |H(w)| och faskaraktäristik arg H(w)?**

Demonstration i pzchange inför Butterworthfilter

Butterworthfilter – (LP-filter)

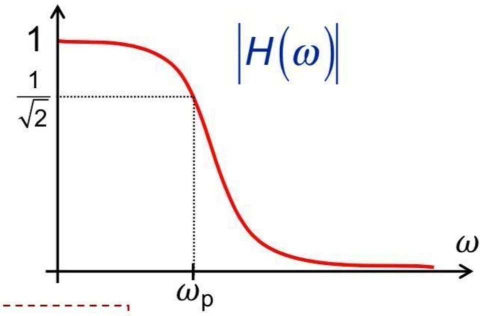
Poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel:



Poler:

$$p_k = \omega_p \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{N}\cdot\frac{k}{2}\right)}$$

$k = 1, 3, 5, \ldots, 2N-1$

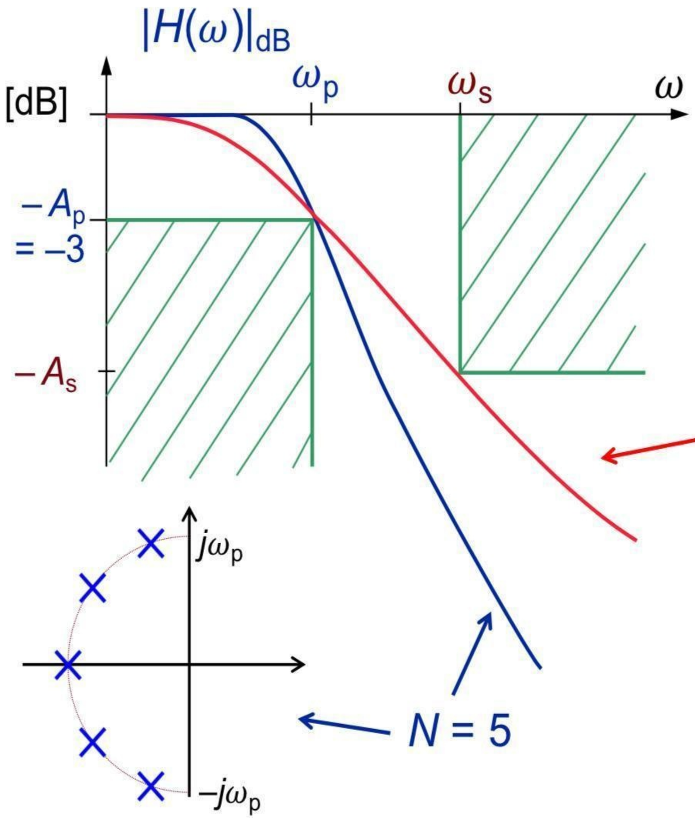


ω_p = 3 dB-gränsvinkelfrekvensen

$$H(s) = \frac{\omega_p^{\,N}}{s^N + a_1 s^{N-1} + \cdots + a_{N-1}s + \omega_p^{\,N}}$$

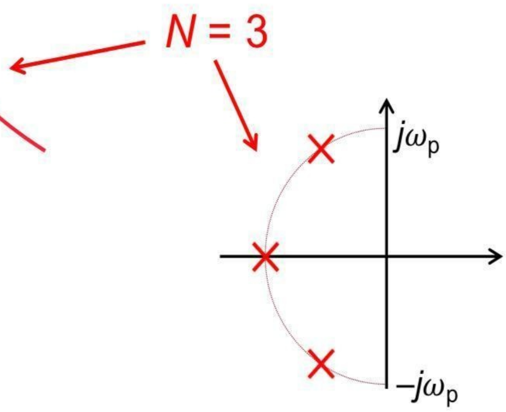
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^{2N}}}$$

a_i erhålls vanligen från tabell eller genom utveckling av $(s-p_1)(s-p_3)\ldots(s-p_{2N-1})$

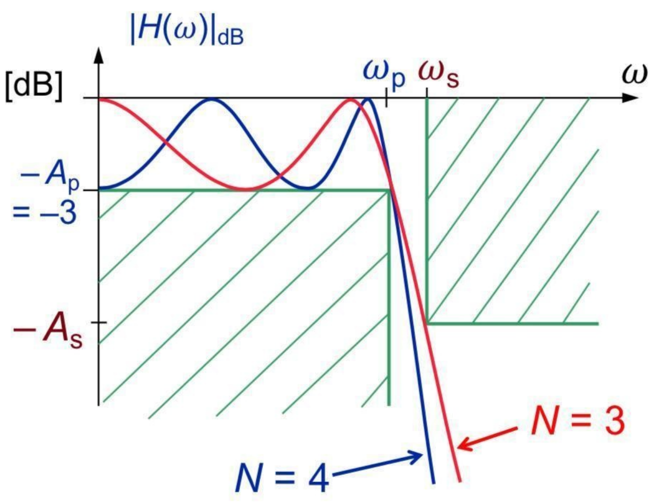


Butterworthfilter har maximalt flat amplitud-karaktäristik i passbandet!

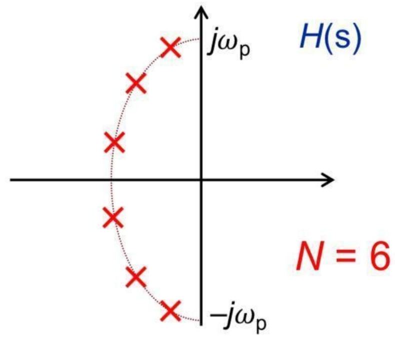
(Butt.filter ger bästa möjliga passbands-approximationen)



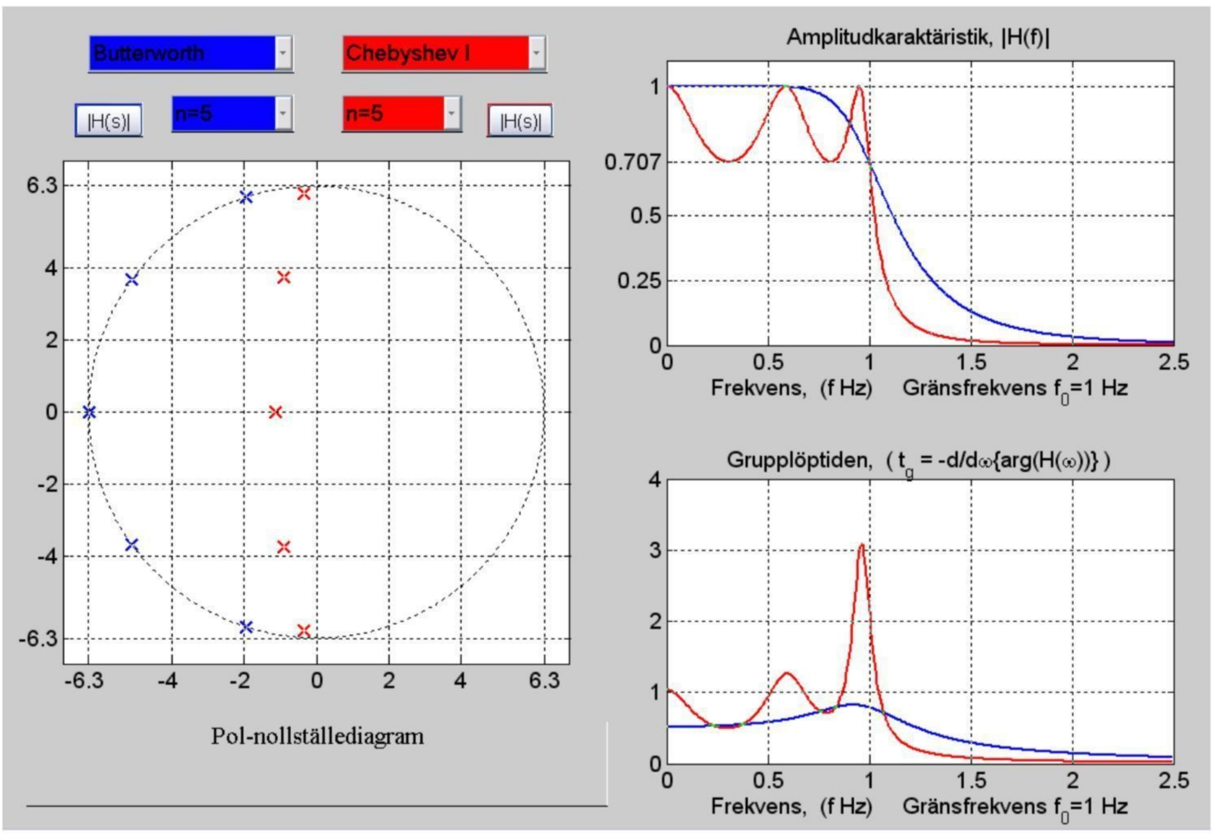
Chebyshev I-filter



- Rippel (A_p dB) i passbandet!
- Optimalt m.a.p. brantheten i övergångsbandet $\omega_p \longrightarrow \omega_s$
- Polerna hos $H(s)$ ligger längs en halv-ellips i VHP

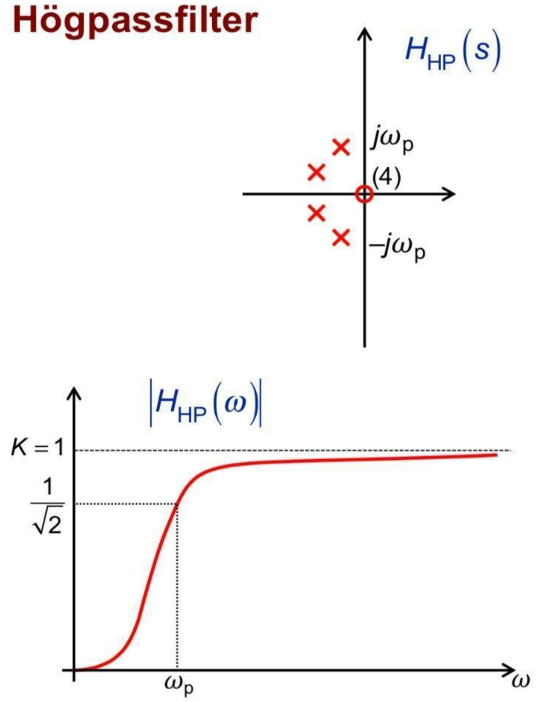


Matlabdemo – Butterworth- & Chebyshevfilter:

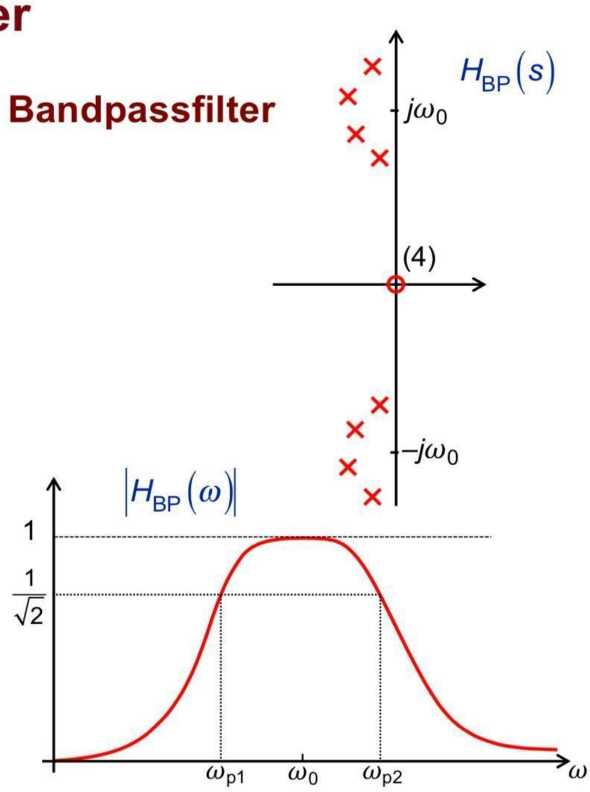


Typiska HP- & BP-filter

Högpassfilter

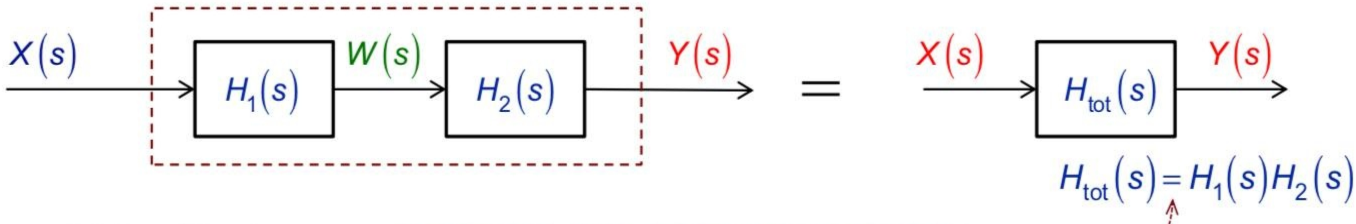


Bandpassfilter



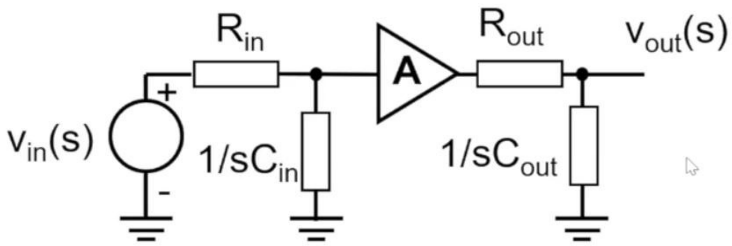
Systemsammankopplingar – kap. 4.5

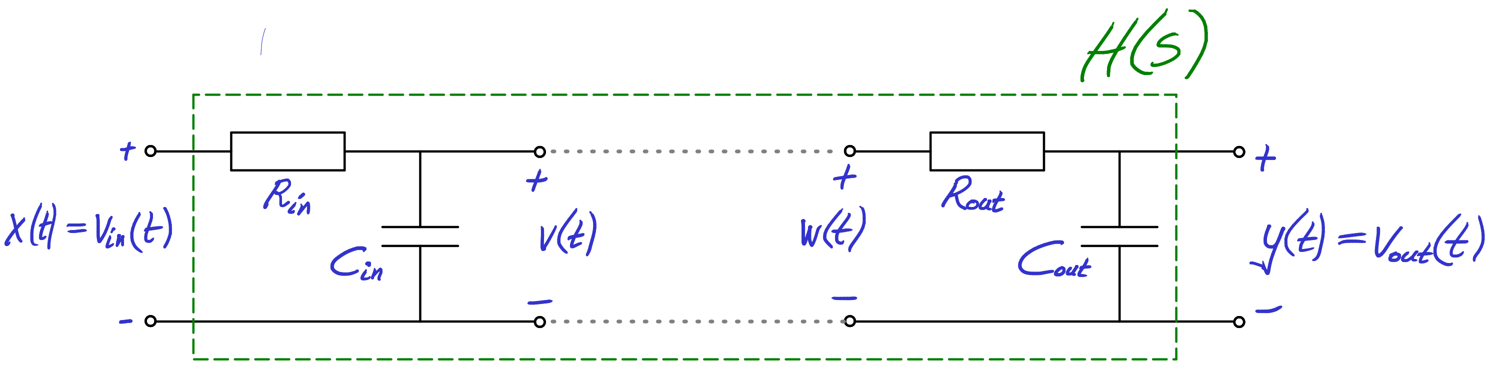
Kaskadkoppling



OBS: gäller bara om **system H_2 *inte belastar* system H_1**!

Jämför med Atilas exempel på kaskadkopplade system på gästföreläsningen i tisdags:





$$\Rightarrow H_1(s) = \frac{V(s)}{V_{in}(s)} \qquad \Rightarrow H_2(s) = \frac{V_{out}(s)}{W(s)}$$

$$V_{out}(s) = \left[V_{in}(s) \frac{\frac{1}{sC_{in}}}{R_{in} + \frac{1}{sC_{in}}} A \right] \frac{\frac{1}{sC_{out}}}{R_{out} + \frac{1}{sC_{out}}} = V_{in}(s) A \left(\frac{1}{sC_{in}R_{in} + 1} \right) \left(\frac{1}{sC_{out}R_{out} + 1} \right)$$

$$\frac{V_{out}(s)}{V_{in}(s)} = A \frac{1}{(sC_{in}R_{in} + 1)(sC_{out}R_{out} + 1)} = A \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_{in}} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_{out}} + 1 \right)}$$

Kretsberäkningar, linjära *RLMC*-nät

METODIK, beräkna godtycklig nätspänning / -ström:

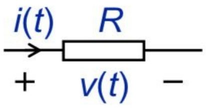
Steg 1–3 = Gör om nätet till ekvivalent **operatorschema**

1)

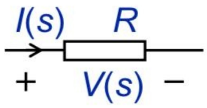
Om nätförändringar sker vid $t = t_0$ (här antas $t_0 = 0$) $\Rightarrow$ Betrakta alla källor som inkopplade vid $t = t_0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\left\{x(t-t_0)u(t-t_0)\right\} = X(s)e^{-st_0}$

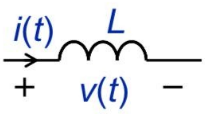
2)

3) Ersätt passiva nätelement med komplexa **impedanser**:



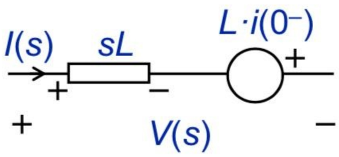
$$v(t) = R \cdot i(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{V(s) = R \cdot I(s)}$$



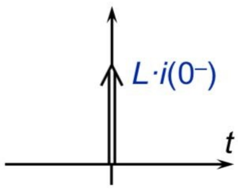


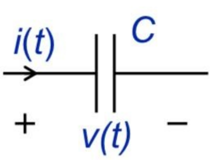
$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V(s) = sL \cdot I(s) - L \cdot i(0^-)}$$



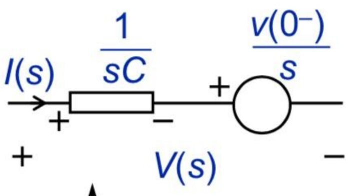
$L \cdot i(0^-)$ motsvarar en impulsformad spänning med styrkan $L \cdot i(0^-)$ i tidsplanet ($\mathcal{L}^{-1}\{K\} = K \cdot \delta(t)$):



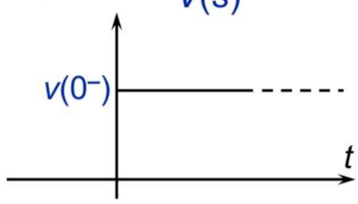


$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{V(s) = \frac{1}{sC} \cdot I(s) + \frac{v(0^-)}{s}}$$



$v(0^-)/s$ motsvarar en stegformad spänning med höjden $v(0^-)$ i tidsplanet ($\mathcal{L}^{-1}\left\{K/s\right\} = K \cdot u(t)$):

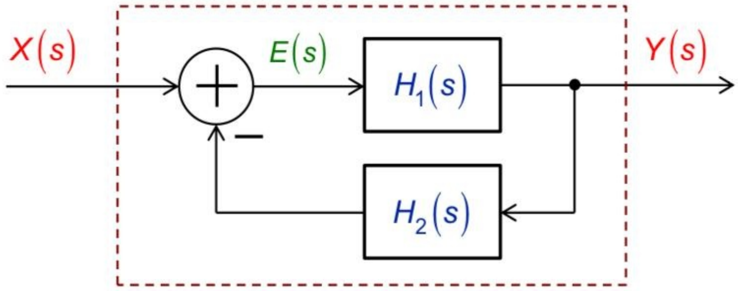


4) Likströmsteori $\Longrightarrow$ Sökt storhets laplacetransform ($Y(s)$)

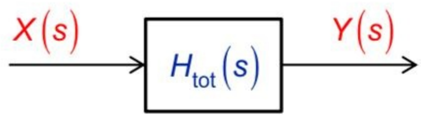
5) Inverstransformera $\Longrightarrow$ Sökt storhets tidsuttryck ($y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{ Y(s) \}$)

Nu går vi tillbaka till kaskadkopplingsexemplet två sidor tidigare och slutför resonemanget där...)

Återkoppling



=

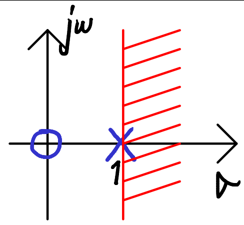


$$H_{tot}(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Används vanligen för **stabilisering/reglering** av system samt för att göra det totala systemet **tåligare mot parametervariationer** (se även kap. 4.7)

Exempel på stabilisering av ett kausalt instabilt LTI-system genom återkoppling:

$H_1(s) = \frac{s}{s-1}$, $Re\{s\} > 1$



Korrigering i efterhand: Systemfunktionen ska vara H1(s) = $\frac{1}{s-1}$
dvs. tag bort nollstället!

Analys m.h.a. dubbelsidig laplacetransform

Energifritt LTI-system

$$x(t) \quad X(s) \longrightarrow \boxed{h(t),\ H(s)} \longrightarrow \quad y_{zs}(t) = x(t) * h(t) \quad Y_{zs}(s) = X(s)H(s)$$

($y_0(t) = 0$)

- Om $x(t)$ är icke-kausal ($x(t<0) \neq 0$) och/eller systemet är icke-kausalt ($h(t<0) \neq 0$) så används den **dubbelsidiga laplacetransformen**!

- Håll koll på konvergensområdet – använd korrekt transformpar!!

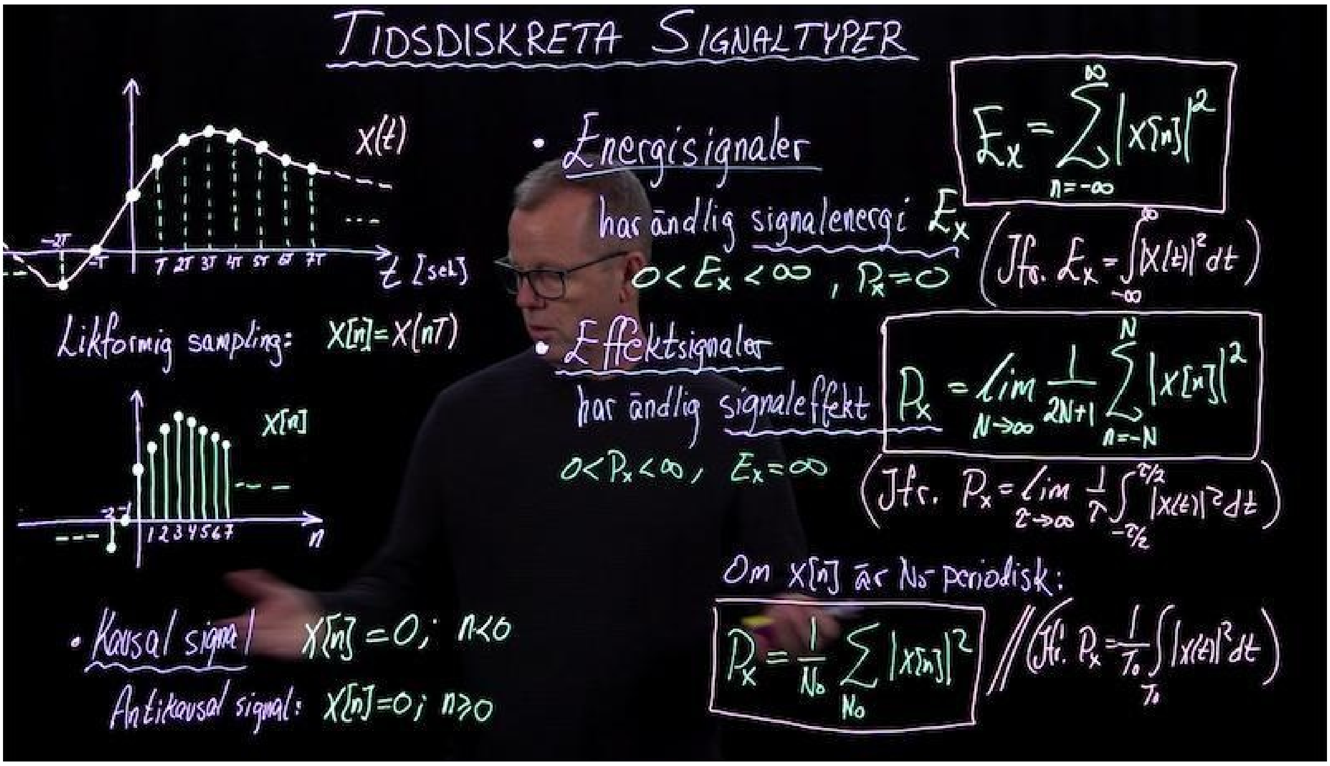
- Repetera – läs själv i **Kap. 4.11**!

- OBS – tänk på:

  För ett **stabilt** LTI-system ingår $j\omega$-axeln i konv.området för $H(s)$

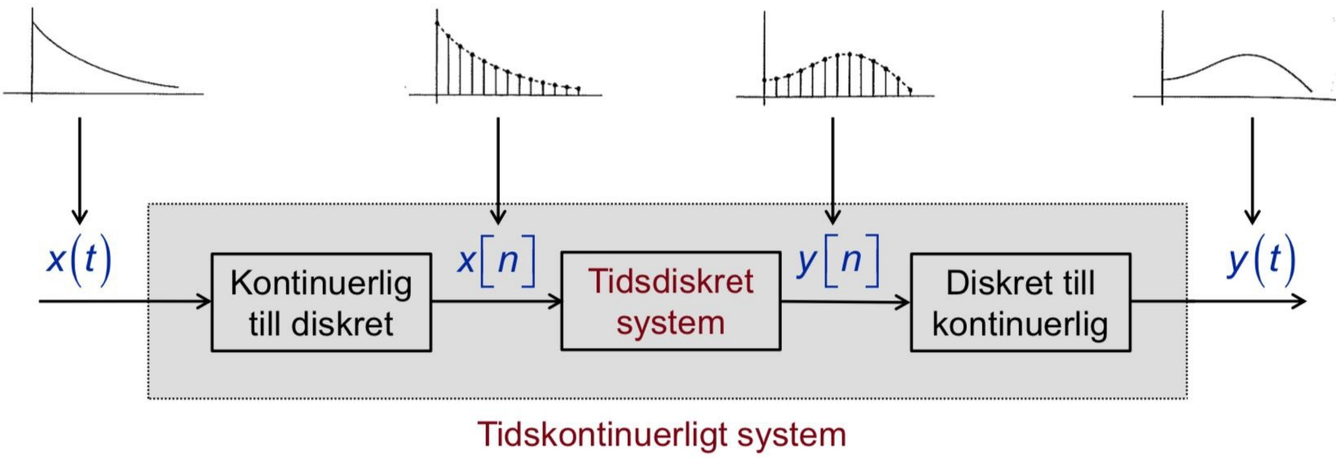
  $\Longrightarrow$ om systemet även är ***icke-kausalt***, så har $H(s)$ minst en pol i ***höger*** *halvplan*

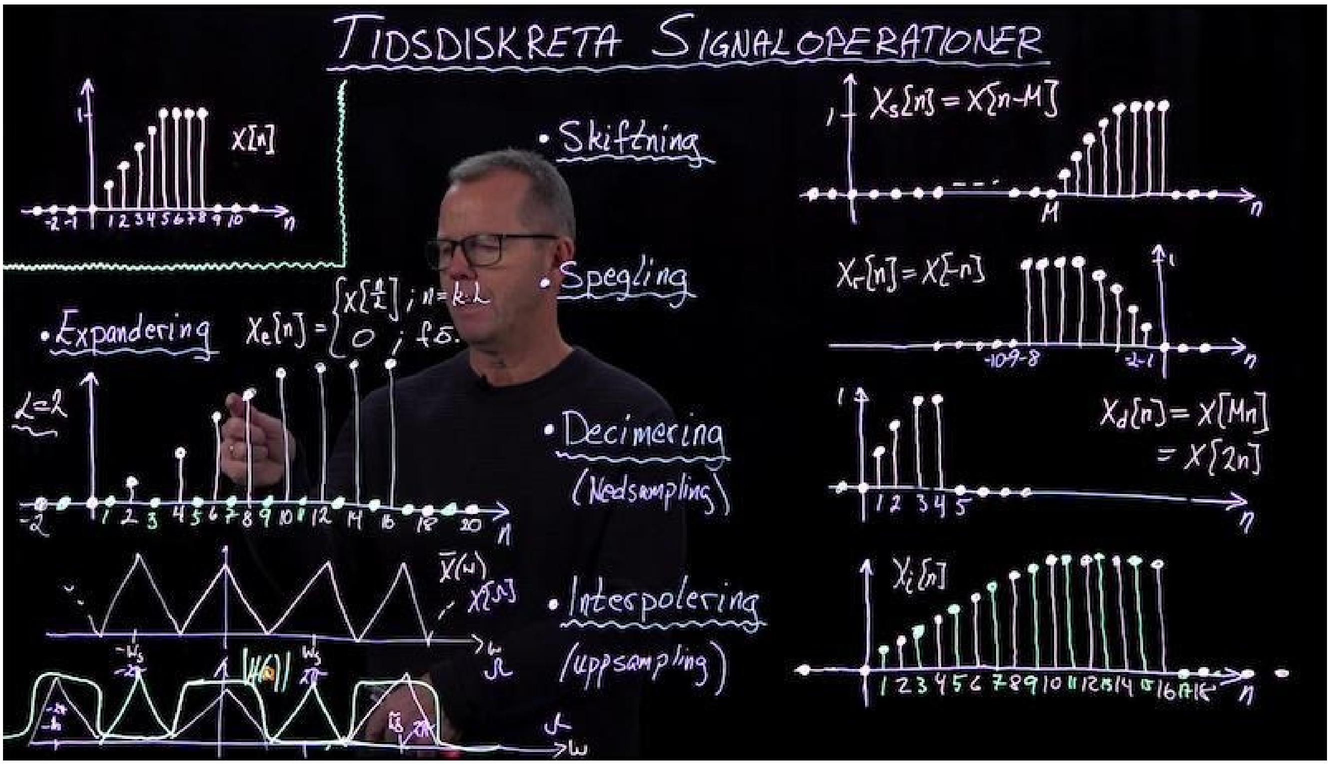
Tidsdomänanalys av tidsdiskreta signaler & system



VIDEO 1

Tidskontinuerlig signalbehandling m.h.a. ett tidsdiskret system

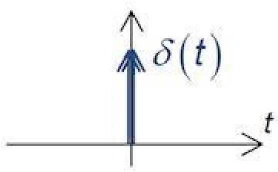
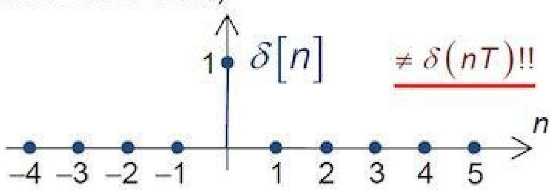


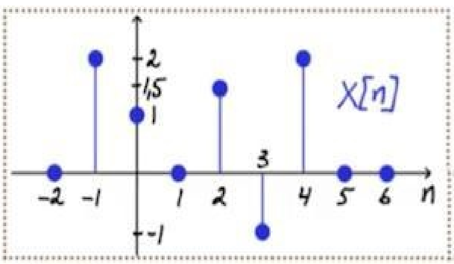


VIDEO 2

Tidsdiskreta signalmodeller

VIDEO 3.1

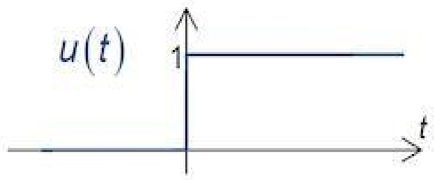
Tidskontinuerligt	Tidsdiskret
$x(t)$	$x[n]$
Diracimpulsen (enhetsimpulsen)	Enhetsimpulssekvensen (Kroneckers delta)
	 $\neq \delta(nT)$!!
$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$	$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$



$$x[n] = 2\delta[n+1] + \delta[n] + 1{,}5\delta[n-2] - \delta[n-3] + 2\delta[n-4]$$

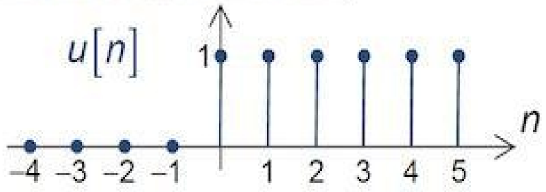
$x(t) \longrightarrow$ **Likformig sampling** $\longrightarrow x[n] = x(nT)$ $\quad T$ = sampelperioden

Enhetssteget



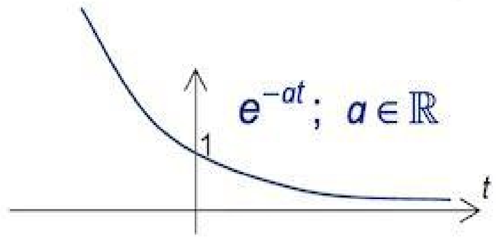
$$u(t) = \begin{cases} 1; & t \geq 0 \\ 0; & t < 0 \end{cases}$$

Enhetsstegsekvensen

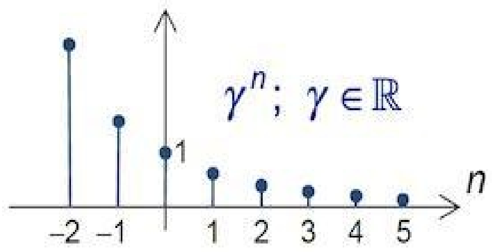


$$u[n] = \begin{cases} 1; & n \geq 0 \\ 0; & n < 0 \end{cases}$$

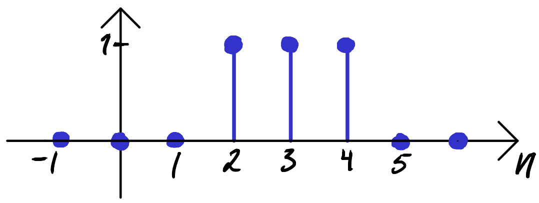
Reella exponentialfunktionen



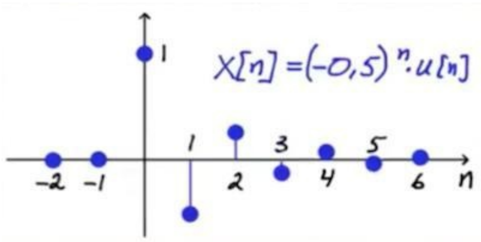
Reella exponentialsekvensen

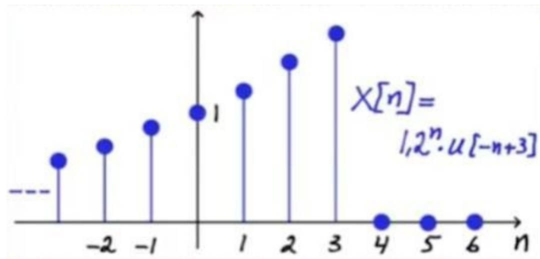


$$e^{-at}\Big|_{t=nT} = e^{-anT} = \left(e^{-aT}\right)^n = \gamma^n$$



$$x[n] = u[n-2] - u[n-6] = \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4]$$





Komplexa exponentialfunktionen

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

Periodtid: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

(Förväxla inte T_0 med sampelperioden T)

Komplexa exponentialsekvensen

$$e^{j\omega_0 nT} = /\Omega = \omega T/ = e^{j\Omega_0 n}$$
$$= \cos(\Omega_0 n) + j\sin(\Omega_0 n)$$

Cosinus-sekvensen   Sinus-sekvensen

Ω: Normerad vinkelfrekvens [rad]

Om $x[n] = \cos(\Omega_0 n)$ är N-periodisk

$\Rightarrow x[n+N] = x[n]$ dvs.

$\cos(\Omega_0(n+N)) = \cos(\Omega_0 n + \Omega_0 N) = \cos(\Omega_0 n)$

$\Rightarrow \Omega_0 N = k\cdot 2\pi$

Dvs. om $\frac{2\pi}{\Omega_0} \in \mathbb{Q}$ $\left(\frac{N}{k}\right)$ $\Rightarrow$

$\cos(\Omega_0 n)$ (& $\sin(\Omega_0 n)$ & $e^{j\Omega_0 n}$) har period

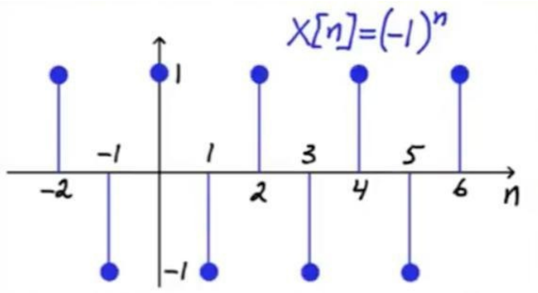
$\boxed{N = k\cdot\frac{2\pi}{\Omega_0}}$ för något $k \in \mathbb{N}$

$\cos(\Omega_0 n) = /-\pi < \Omega_1 \le \pi/ = \cos((\Omega_1 + m\cdot 2\pi)n)$
$= \cos(\Omega_1 n + m\cdot n\cdot 2\pi) = \cos(|\Omega_1| n)$

$\therefore$ Den största praktiska normerade vinkelfrekvensen Ω är π rad

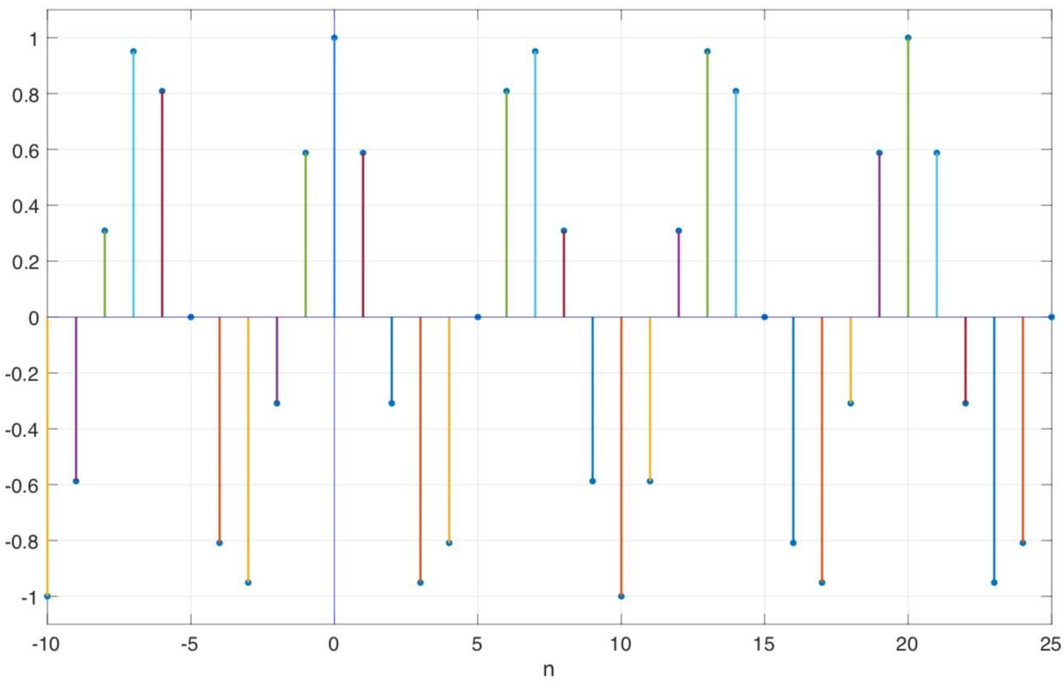
$$e^{j\Omega_0 n}\Big|_{\Omega_0=\pi} = \begin{cases} \cos(\pi n) + j\sin(\pi n) = \cos(\pi n) \\ e^{j\pi n} = (e^{j\pi})^n = (-1)^n \end{cases}$$

Den alternerande enhetssekvensen:



Exempel

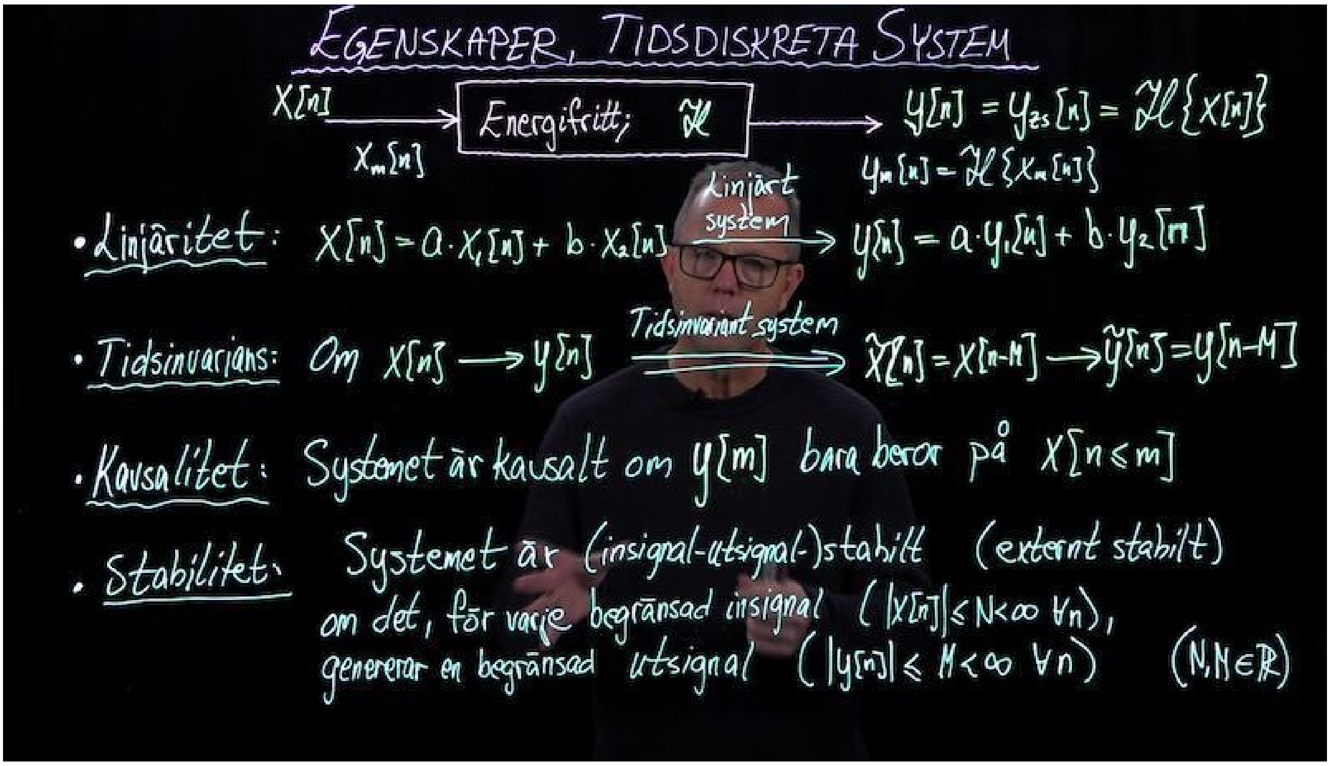
cos(0,3πn)   (2π/0,3π = 20/3 => Period N =20, Periodisk upprepning efter k = 3 perioder av cosinusen)



Period

$N = 3\cdot\frac{2\pi}{\Omega_0}$

$= 3\cdot\frac{2\pi}{0,3\pi} = 20$



VIDEO 4

Tidsdiskreta system – bankkontoexempel

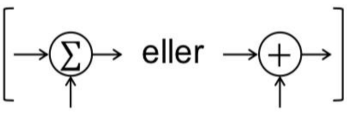
(= Exempel 3.4 i boken)

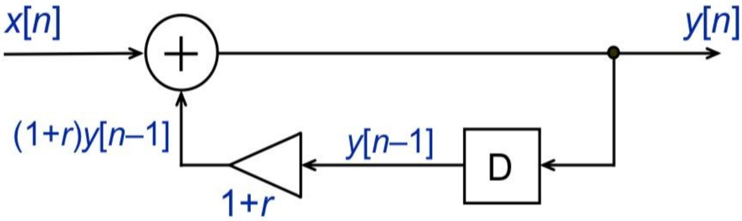
Kontohändelser sker med tidsintervall T (t.ex. = 1 mån):

- $x[n]$ = insättning (>0) eller uttag (<0) vid tillfälle n (= *tidpunkt* nT)
- $y[n]$ = kontosaldo direkt efter ev. insättning/uttag vid tillfälle n
- r = inlåningsränta i SEK per period T

$$\Rightarrow \quad \underline{y[n]} = y[n-1] + r \cdot y[n-1] + x[n] = \underline{(1+r)y[n-1] + x[n]}$$

Realisering:
(flödesschema)





Differensekvationsbeskrivning av tidsdiskreta system

- Differensekvation på **negativ form** (boken: "*alternative form*"):

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_Ny[n-N]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+\cdots+b_Nx[n-N]$$

TidsInvariant system: $n \longrightarrow n+N$

- Differensekvation på **positiv form** (boken: "*advanced form*"):

$$y[n+N]+a_1y[n+N-1]+\cdots+a_Ny[n]=b_0x[n+N]+b_1x[n+N-1]+\cdots+b_Nx[n]$$

Avanceringsoperatorn *E*: $Ey[n]=y[n+1], \quad E^ky[n]=y[n+k]$

$$\Rightarrow \quad \left(E^N+a_1E^{N-1}+\cdots+a_N\right)y[n]=\left(b_0E^N+b_1E^{N-1}+\cdots+b_N\right)x[n]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Q[E]y[n]=P[E]x[n]}$$

Exempel: Ett tidsdiskret LTI-system med insignal x[n] och utsignal y[n] som beskrivs av följande differensekvation:

$$y[n] + y[n-1] = x[n]$$