

Signaler & System – Föreläsning 12: z-transformanalys av tidsdiskreta signaler & system

VIDEON,
Del 1

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow \mathcal{Z}\{h[n]\} \rightarrow Y[n] = Y_{zs}[n] = \mathcal{Z}\{X[n]\}$

$X_m[n] \rightarrow Y_m[n]$

Linjärt System: $X[n] = \sum_m a_m X_m[n] \rightarrow Y[n] = \sum_m a_m Y_m[n]$

Ex. på bra val: $X_m[n] = \delta[n-m] \xrightarrow{TT} Y_m[n] = h[n-m]$

$\Rightarrow X[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n] \delta[n-m] \xrightarrow{LTI} Y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[m] h[n-m]$

$X[z] = \sum_m a_m (z_m)^n$ $Y_m[n] = ?$

$Y_m[n] = (z_m)^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z_m)^{n-k} \cdot h[k]$

$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] (z_m)^{-k} \right) \cdot (z_m)^n = H[z_m] \cdot (z_m)^n$

$Y[n] = \sum_m a_m H[z_m] (z_m)^n = \mathcal{Z}\{h[k]\} \Big|_{z=z_m}$

$\Rightarrow Y[n] = \sum_m a_m H[z_m] (z_m)^n$

Andra lämpliga $X_m[n]$?

$X_m[n] = (z_m)^n$

VIDEON,
Del 2

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow \mathcal{Z}\{h[n]\} \rightarrow Y[n] = Y_{zs}[n] = \mathcal{Z}\{X[n]\}$

$X_m[n] \rightarrow Y_m[n]$

$X[z] = \sum_m a_m \frac{(z_m)^n}{X_m[n]} \xrightarrow{LTI} Y[n] = \sum_m a_m \frac{H[z_m] (z_m)^n}{Y_m[n]}$

Summera längs en cirkel C (enl. grafen), över ett kontinuum av komplexvärden z :

$X[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X[z] z^{n-1} dz \xrightarrow{LTI} Y[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X[z] H[z] z^{n-1} dz$

$a_m = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X[z] z^{-1} dz \quad X_m[n] = z^n$

$= \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\}$

$Y[z] = X[z] H[z]$

$X[z] = \mathcal{Z}\{X[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] z^{-n}$

$H[z] = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

$Y[z] = \mathcal{Z}\{Y[n]\}$

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow h[n] \rightarrow Y[n]$
 $X[z] \rightarrow H[z] \rightarrow Y[z]$

$Y[n] = y_{zs}[n] = (X * h)[n]$
 $Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z]$

Systemfunktion: $H[z] := \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]}$

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

EXEMPEL: $X[n] = 1,3 \cdot 0,5^n u[n] - 0,3 \delta[n]$

$h[n] = 2(-0,8)^n u[n]$

$y_{zs}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zs}[z]\}$, där $Y_{zs}[z] = X[z]H[z]$

$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1,3 \cdot 0,5^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0,3 \delta[n] z^{-n}$
 $= 1,3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 \cdot z^{-1})^n = 1,3 \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} - 0,3$

$H[z] = 2 \cdot \frac{z}{z+0,8} \quad |z| > 0,8$

$\Rightarrow \frac{|0,5 \cdot z^{-1}| < 1}{|z| > 0,5} = 1,3 \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} - 0,3 = \frac{1,3z}{z-0,5} - \frac{0,3(z-0,5)}{z-0,5} = \frac{z+0,15}{z-0,5} \quad |z| > 0,5$

Formels: $\begin{cases} \delta^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-\gamma} \quad |z| > |\gamma| \\ \delta[n] \leftrightarrow 1 \end{cases}$

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow h[n] \rightarrow Y[n]$
 $X[z] \rightarrow H[z] \rightarrow Y[z]$

$Y[n] = y_{zs}[n] = (X * h)[n]$
 $Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z]$

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

EXEMPEL: $X[n] = 1,3 \cdot 0,5^n u[n] - 0,3 \delta[n]$

$h[n] = 2(-0,8)^n u[n]$

$Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z] = \frac{(z+0,15) \cdot 2z}{(z-0,5)(z+0,8)} \quad |z| > 0,8$

P.B.U. $Y_{zs}[z] = \frac{Az+B}{z-0,5} + \frac{Cz+D}{z+0,8}$

P.B.U. $\frac{Y_{zs}[z]}{z} = \frac{2z+0,3}{(z-0,5)(z+0,8)} = \frac{1}{z-0,5} + \frac{1}{z+0,8}$

$\Rightarrow Y_{zs}[z] = \frac{z}{z-0,5} + \frac{z}{z+0,8} \quad |z| > 0,8$

Formelsamlingen, Tab... : $y_{zs}[n] = (0,5^n + (-0,8)^n) u[n]$

Energifritt LTI-system

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

$X[n] \rightarrow X[z]$
 $\xrightarrow{h[n] \quad H[z]}$
 $Y[n] = y_{zs}[n] = (X * h)[n]$
 $Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z]$

$Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z] = \frac{(z+0,15) \cdot 2z}{(z-0,5)(z+0,8)}$
 $|z| > 0,8$

POL-NOLLSTÄLLEDIAGRAM

$X[z] = \frac{z+0,15}{z-0,5} \quad |z| > 0,5$
 $H[z] = \frac{2z}{z+0,8} \quad |z| > 0,8$
 $K=1 \cdot 2=2$

$$\left. \begin{aligned} x[n < 0] &= 0 \\ h[n < 0] &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y[n < 0] = 0$$

Beräkning av $y[n]$ vid differensekvationsbeskrivning av systemet

Tidskoninuerligt system

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

Tidsdiskret system

$$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$$

Skriv om på negativ form, $y[n-k]$

$$Ex[n] = x[n+1]$$

Vid kausal insignal till kausalt system \Rightarrow enkelsidiga transformer:

$$\frac{dy(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} sY(s) - y(0^-) \quad \text{osv.}$$

$$y[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-1}Y[z] - y[-1] \quad \text{osv.}$$

$(y[n-1]u[n]) \quad y[n-1](u[n-1]) \Leftrightarrow z^{-1} \cdot Y[z]$

$$\Rightarrow Y(s) = Y_{zi}(s) + X(s) \cdot H(s)$$

$$\Rightarrow Y[z] = Y_{zi}[z] + X[z] \cdot H[z]$$

där $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_{N-j} s^j}{\sum_{i=0}^N a_{N-i} s^i}$

där $H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]} = \frac{\sum_{j=0}^M b_{N-j} z^j}{\sum_{i=0}^N a_{N-i} z^i}$

$$\Rightarrow y(t) \quad (= y_{zi}(t) + x(t) * h(t))$$

$$\Rightarrow y[n] \quad (= y_{zi}[n] + x[n] * h[n])$$

Blockdiagram & Systemrealisering

Samma typ av blockdiagram & direktformsrealiseringar som för tidskontinuerliga LTI-system!

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Tidskontinuerligt system

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow s \cdot X(s)$$

Exempel: $H(z) = \frac{z}{z+0,3} = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$(z+0,3) Y(z) = z X(z) \Rightarrow (1+0,3z^{-1}) Y(z) = X(z)$$

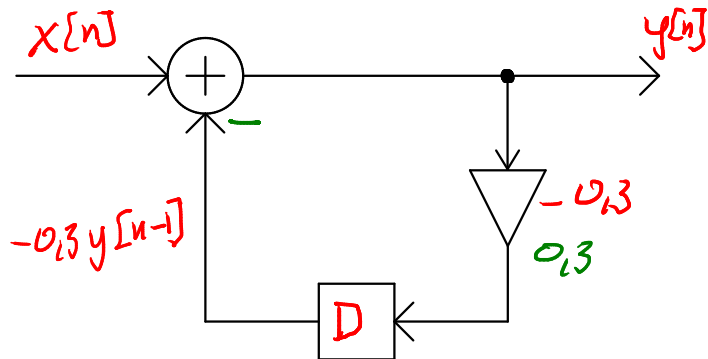
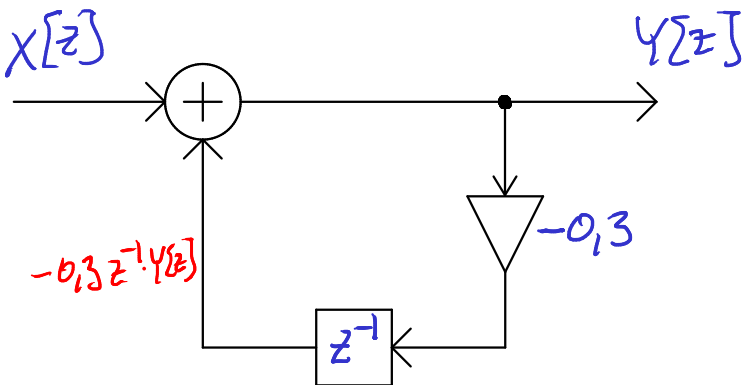
$$Y(z) = X(z) - 0,3 z^{-1} Y(z)$$

Tidsdiskret system

$$x[n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{z} X[z] = z^{-1} X[z]$$

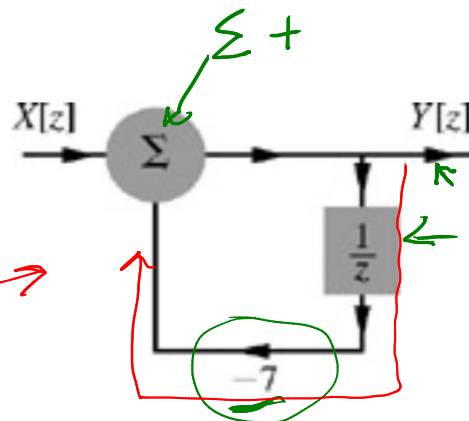
Antag/vidj Karselt
 $\Rightarrow |z| > 0,3$

$$y[n] = x[n] - 0,3 y[n-1]$$



Kursbokens Exempel 5.8:

FIR
 IIR



$$y[n] = f\{x[n-k]\}$$

FIR

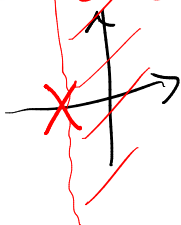
Läs mer själv i kapitel 5.4 och läs på kurswebbsidan om viktning av kurslitteraturen:
 Du behöver bara kunna realisera system av låg ordning i någon form -
 inte specifikt om de olika realiseringsformerna.

Stabilitet – för LTI-system

Tidskontinuerligt system

Stabilt LTI-system \Leftrightarrow $j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$

Bivillkor, $H(s)$: Antal poler \geq Antal nollställen



Tidsdiskret system

Stabilt LTI-system \Leftrightarrow enhetscirkeln ligger i konvergensområdet för $H[z]$

(Antal poler \geq Antal nollställen hos $H[z]$ är inte nödvändigt för stabilitet – men för kausalitet!)

Stabilt LTI $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ ★

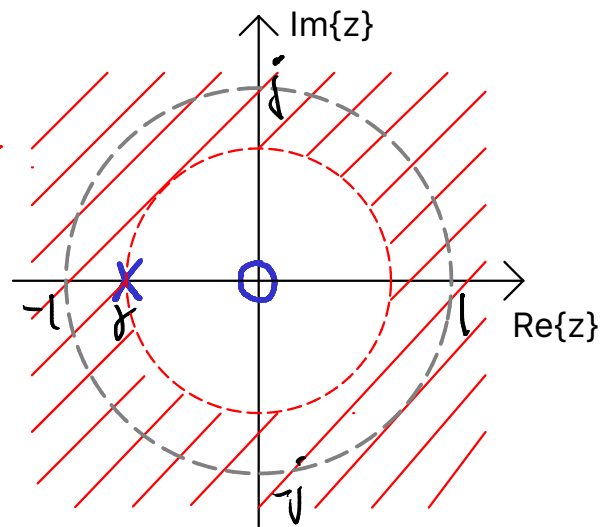
Exempel 1:

$h[n] = \delta^n u[n] \Leftrightarrow H[z] = \frac{z}{z-\delta} ; |z| > |\delta|$

$\sum_n |h[n]| < \infty$ om $|\delta| < 1$

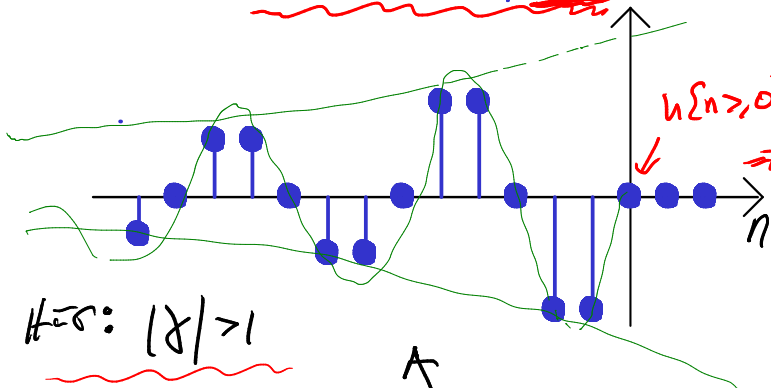
\Rightarrow Polen hos $H[z]$ i $z=\delta$ är inuti enhetscirkeln ($|z|=1$)

Kausalt & stabilt system



Exempel 2:

$h[n] = \delta^n \sin(\Omega_0 n) u[-n] \Leftrightarrow H[z] = \frac{-z\delta \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2\delta \cos(\Omega_0)z + \delta^2} ; |z| < |\delta|$

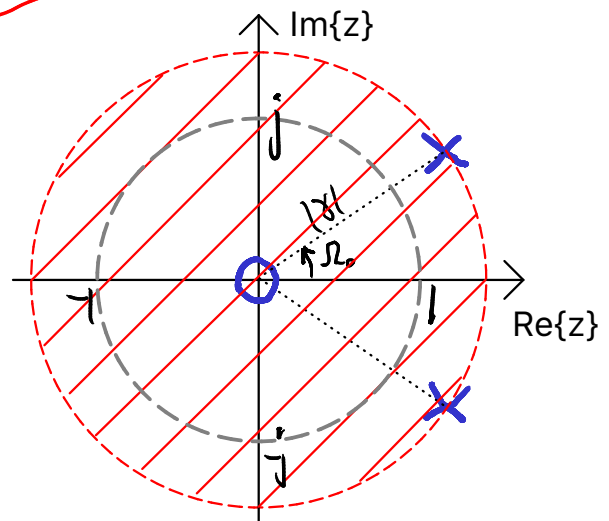


$h[n > 0] = 0 \Rightarrow$ Anti-kausalt system

$H=0: |\delta| > 1$

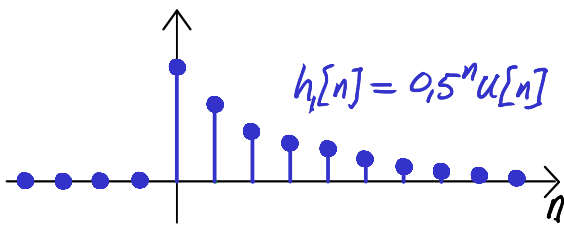
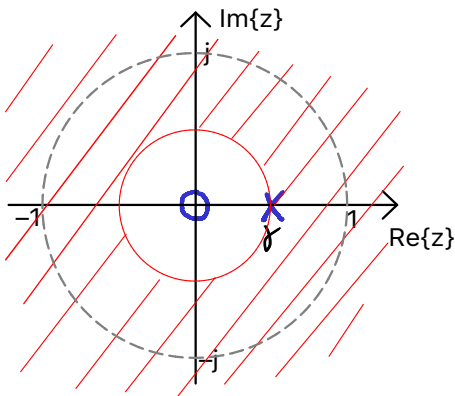


Stabilt LTI-system



Exempel på kausalitetskravet att #poler \geq #nollställen:

$$H_1[z] = \frac{z}{z-0.5} ; |z| > 0.5$$



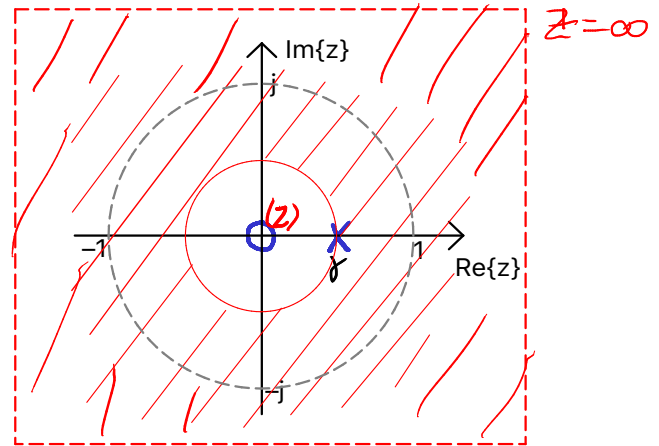
$$h_1[n] = 0.5^n u[n]$$

$$H_2[z] = z \cdot H_1[z] = \frac{z^2}{z-0.5}$$

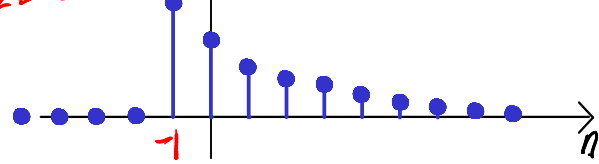
$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} |H_2[z]| = \infty$$

$0.5 < |z| < \infty$

icke-konservativt & instabilt
 $H_2[z]$



$$h_2[n] = h_1[n+1]$$



Marginellt stabilt LTI-system \Leftrightarrow

- Enkelpol(er) hos $H(s)$ på $j\omega$ -axeln
- $j\omega$ -axeln = en rand till konvergensområdet
- Antal poler \geq Antal nollställen
(egentligen #P \geq #N - 1)

Marginellt stabilt LTI-system \Leftrightarrow

- Enkelpol(er) hos $H[z]$ på enhetscirkeln
- Enhetscirkeln = en rand till konvergensområdet

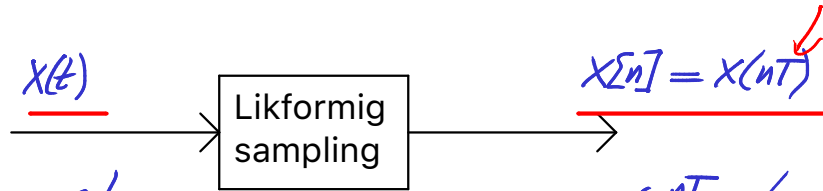
Instabilt LTI-system \Leftrightarrow

- $j\omega$ -axeln ligger *inte* i konvergensområdet
eller
- Multipelpol(er) på $j\omega$ -axeln, som utgör en rand till konvergensområdet

Instabilt LTI-system \Leftrightarrow

- Enhetscirkeln ligger *inte* i konvergensområdet
eller
- Multipelpol(er) på enhetscirkeln, som utgör en rand till konvergensområdet

Frekvensrelationer



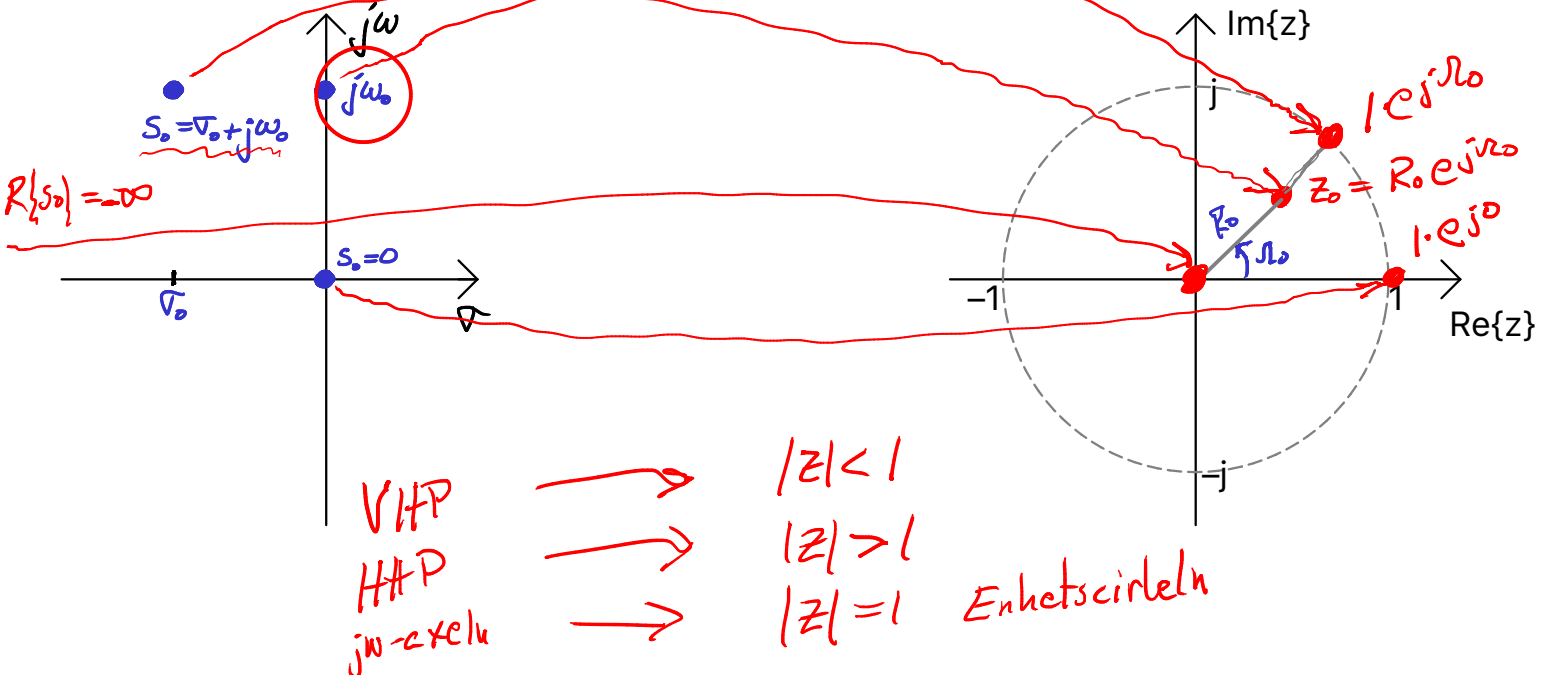
$x(t) = e^{s_0 t}$

$x[n] = e^{s_0 n T} = (e^{s_0 T})^n = \underline{z = e^{s_0 T}} = z_0^n$

$s_0 \rightarrow z_0 = e^{s_0 T} = \underbrace{e^{\sigma_0 T}}_{e^{-\infty} = 0} \cdot \underbrace{e^{j\omega_0 T}}_{\Omega_0} = R_0 \cdot e^{j\Omega_0}$

s-planet

z-planet



$x(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$

Sampling

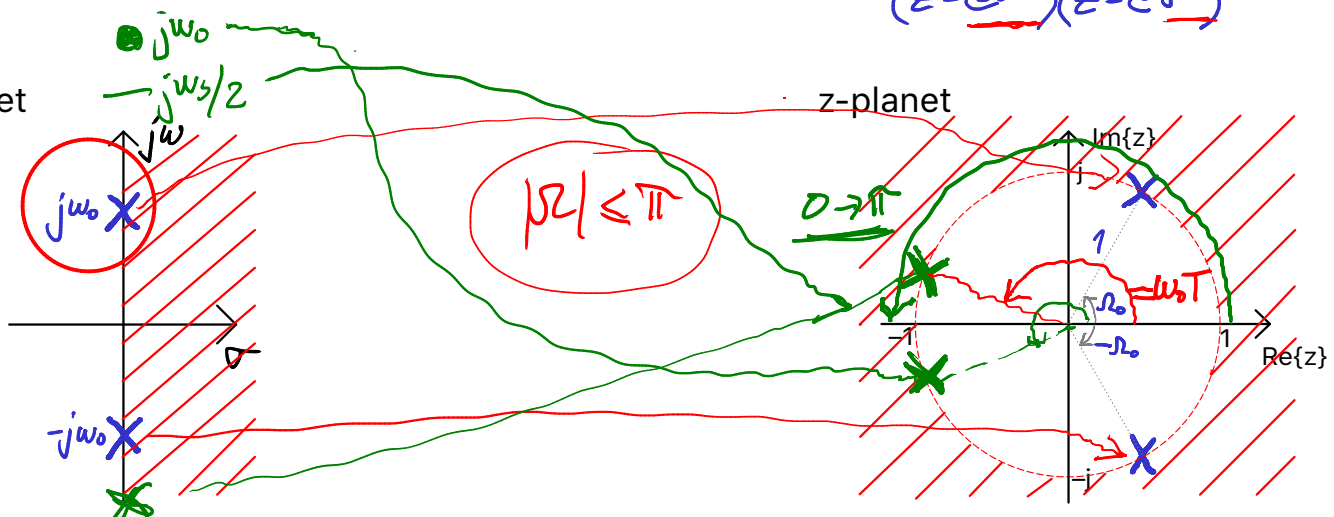
$x[n] = x(nT) = \sin(\Omega_0 n) u[n]$, $\Omega_0 = \omega_0 T$

$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$; $\text{Re}\{s\} > 0$

$\Leftrightarrow X(z) = \frac{z \cdot \sin(\Omega_0)}{(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})}$; $|z| > 1$

s-planet

z-planet



Frekvenssvar/frekvensfunktion för stabila LTI-system

Tidskontinuerligt system

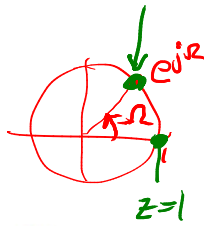
$$\mathcal{H}\{e^{s_0 t}\} = H(s_0) e^{s_0 t}$$

$$\begin{aligned} s=j\omega &\Rightarrow \mathcal{H}\{e^{j\omega_0 t}\} = H(j\omega_0) e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Tidsdiskret system

$$\mathcal{H}\{z_0^n\} = H[z_0] z_0^n$$

$$\begin{aligned} z=e^{j\Omega} &\Rightarrow \mathcal{H}\{e^{j\Omega_0 n}\} = H[e^{j\Omega_0}] e^{j\Omega_0 n} \end{aligned}$$



$C = e^{j0t}$, $\cos \alpha = \text{Re}\{e^{j\alpha}\}$ medför följande samband:

$$\underline{x(t) = C + A \cos(\omega_0 t + \theta)} \Rightarrow \underline{y(t) = C \cdot H(j0) + A |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \theta + \arg H(j\omega_0))}$$

$$\underline{x[n] = C + A \cos(\Omega_0 n + \theta)} \Rightarrow \underline{y[n] = C \cdot H[e^{j0}] + A |H[e^{j\Omega_0}]| \cos(\Omega_0 n + \theta + \arg H[e^{j\Omega_0}])}$$

Systemets frekvensfunktion:

$$\begin{aligned} \underline{H(\omega)} &= \underline{H(s)} \Big|_{s=j\omega} \quad (= H(j\omega)) \\ &= |H(\omega)| e^{j \arg H(\omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{H[\Omega]} &= \underline{H[z]} \Big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (= H[e^{j\Omega}]) \\ &= |H[\Omega]| e^{j \arg H[\Omega]} \end{aligned}$$

med $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{Amplitudkaraktäristik}} \quad |H(\omega)| \quad \text{resp.} \quad |H[\Omega]| \quad \left(\text{alt. } |H(j\omega)| \text{ resp. } |H[e^{j\Omega}]| \right) \\ \underline{\text{Faskaraktäristik}} \quad \arg H(\omega) \quad \text{resp.} \quad \underline{\arg H[\Omega]}, \quad \angle H \quad \left(\text{alt. } \arg H(j\omega) \text{ resp. } \arg H[e^{j\Omega}] \right) \end{array} \right.$

Även det tidsdiskreta LTI-systemet utför en frekvensselektiv filtrering (amplitudskalning och faskförskjutning) av inkommande frekvenssignaler!

$|H[e^{j\Omega}]|$ & $\arg H[e^{j\Omega}]$ från pol-nollställediagram

$H(\omega_0) = H(s) \Big|_{s=j\omega_0}$

$$K \cdot \frac{(e^{j\Omega_0} - n_1)(e^{j\Omega_0} - n_2) \cdots (e^{j\Omega_0} - n_M)}{(e^{j\Omega_0} - p_1)(e^{j\Omega_0} - p_2) \cdots (e^{j\Omega_0} - p_N)} = K \cdot \frac{r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \cdots r_M e^{j\varphi_M}}{d_1 e^{j\theta_1} \cdot d_2 e^{j\theta_2} \cdots d_N e^{j\theta_N}}$$

$H[\Omega_0] = H[z] \Big|_{z=e^{j\Omega_0}} = \frac{|H[\Omega_0]| e^{j \arg H[\Omega_0]}}{}$

$|K| \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdots r_M}{d_1 \cdot d_2 \cdots d_N}$

$\arg K + (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)$

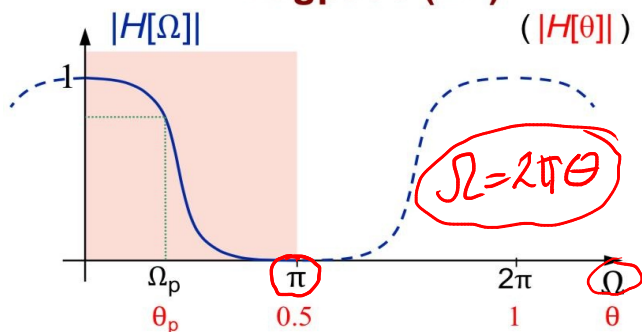
Exempel:

Låt $\Omega_0 : 0 \rightarrow \pi$

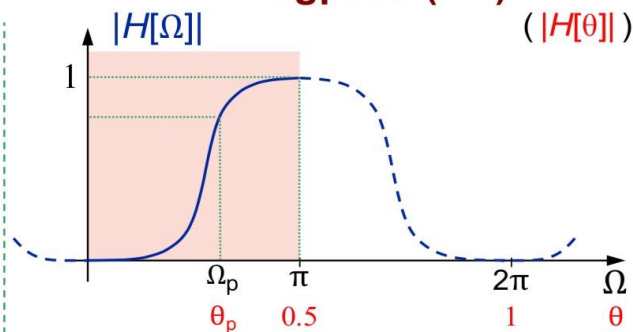
Demonstration i pzchange!

Tidsdiskreta frekvensselektiva filtertyper

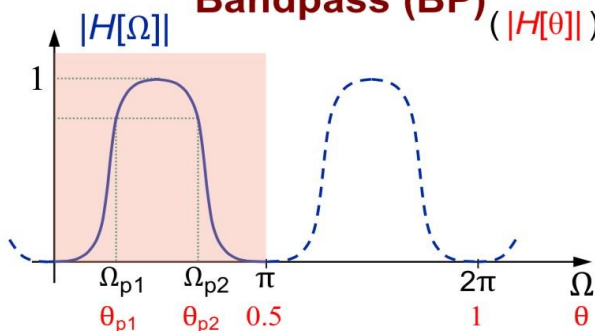
Lågpäss (LP) ($|H[\Omega]|$)



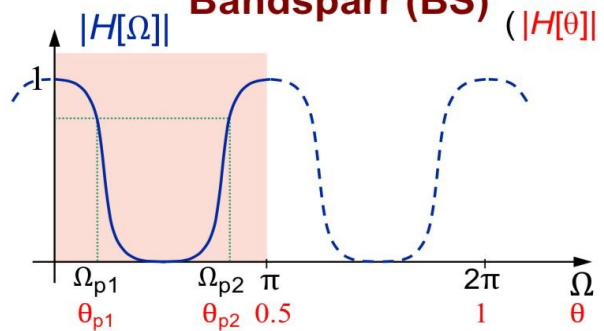
Högpäss (HP) ($|H[\Omega]|$)



Bandpass (BP) ($|H[\Omega]|$)

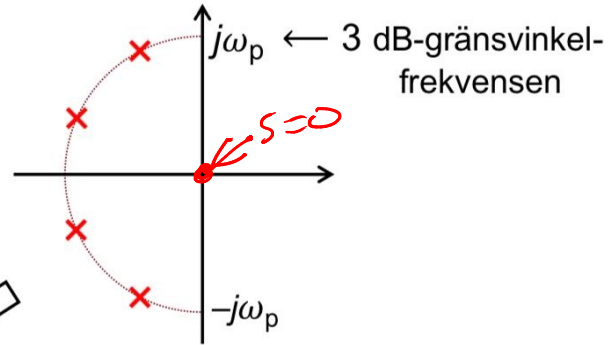


Bandspärr (BS) ($|H[\Omega]|$)

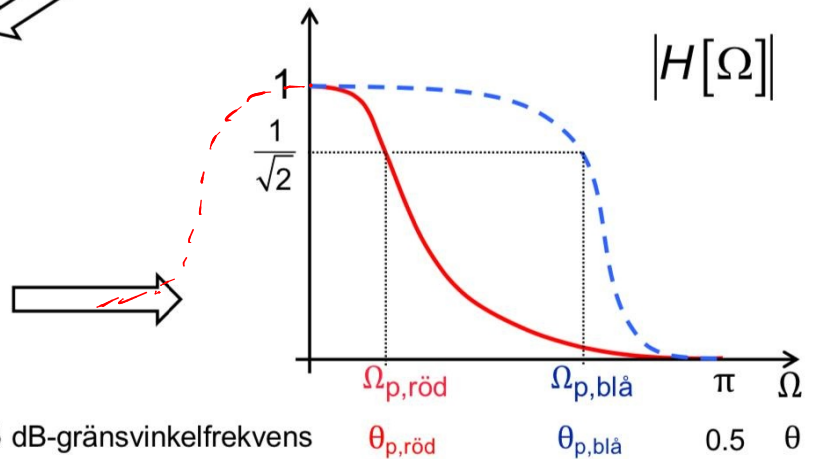
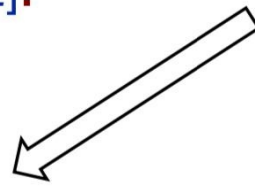
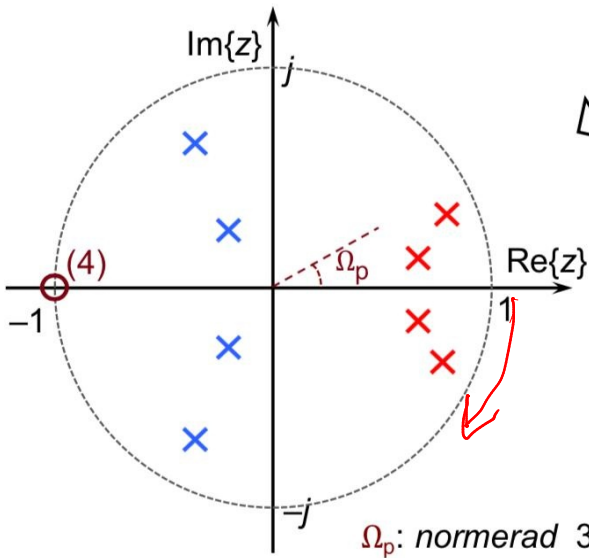


Exempel – poler & nollställen för LP-filter

T.ex. **butterworthfilter** –
 poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel:

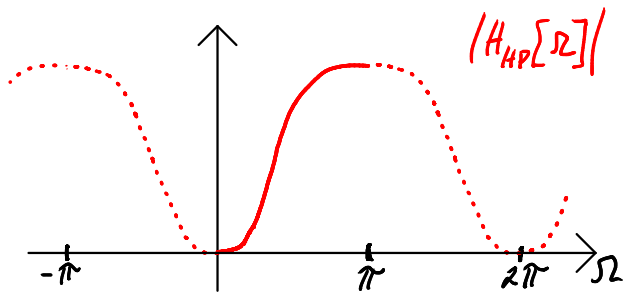
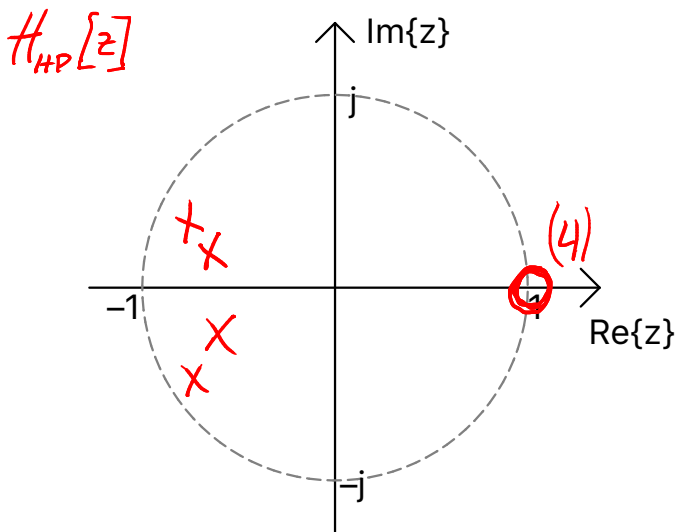


Poler & nollställen hos $H[z]$:

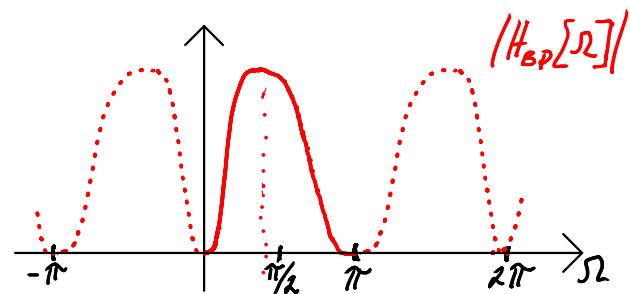
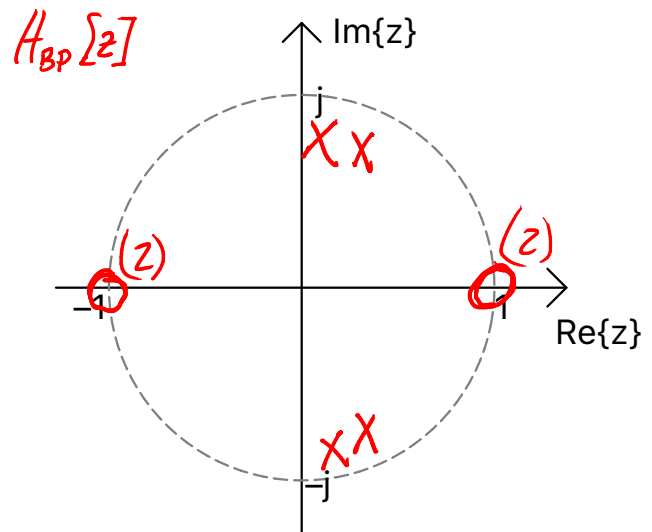


Ω_p : normerad 3 dB-gränsvinkelfrekvens

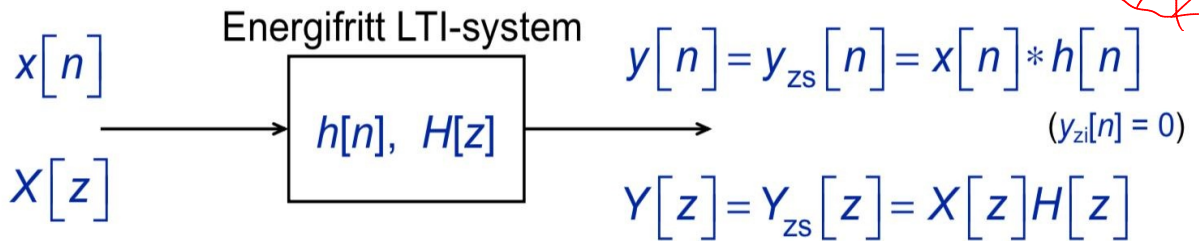
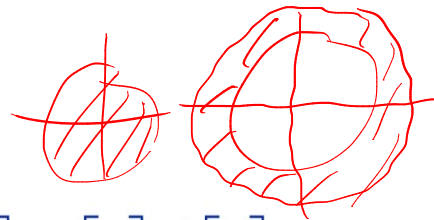
Exempel: Högpasfilter



Exempel: Bandpassfilter



Analys m.h.a. dubbelsidig z-transform



- Om $x[n]$ är **icke-kausalt** ($x[n < 0] \neq 0$) och/eller systemet är **icke-kausalt** ($h[n < 0] \neq 0$) så används den **dubbelsidiga z-transformen!**
- Håll koll på konvergensområdet – använd korrekt transformpar!!
- Repetera – läs själv i **Kap. 5.9!**

Exempel (som jag antagligen inte hinner med på föreläsningen...):

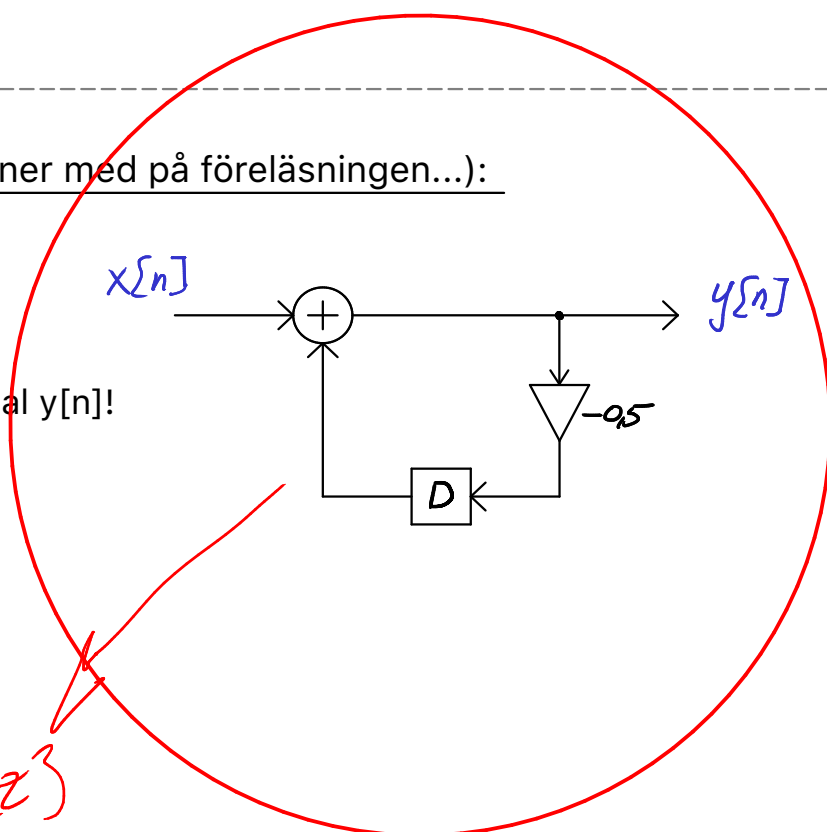
$$x[n] = 0,9^n u[n] + 1,2^n u_0[-n]$$

Beräkna det energifria systemets utsignal $y[n]$!

$$X(z)$$

$$H(z)$$

$$Y(z) = X(z)H(z) \rightarrow y[n]$$



I slutet av föreläsningen sa jag att du rekommenderas att lösa uppgiften själv (eftersom jag, som jag trodde...) inte hann med exemplet på föreläsningen. Utsignalen blir följande:

$$y[n] \approx 0,64 \cdot 0,9^n u[n] + 0,71 \cdot 1,2^n u_0[-n] + 0,06 (-0,5)^n u[n]$$