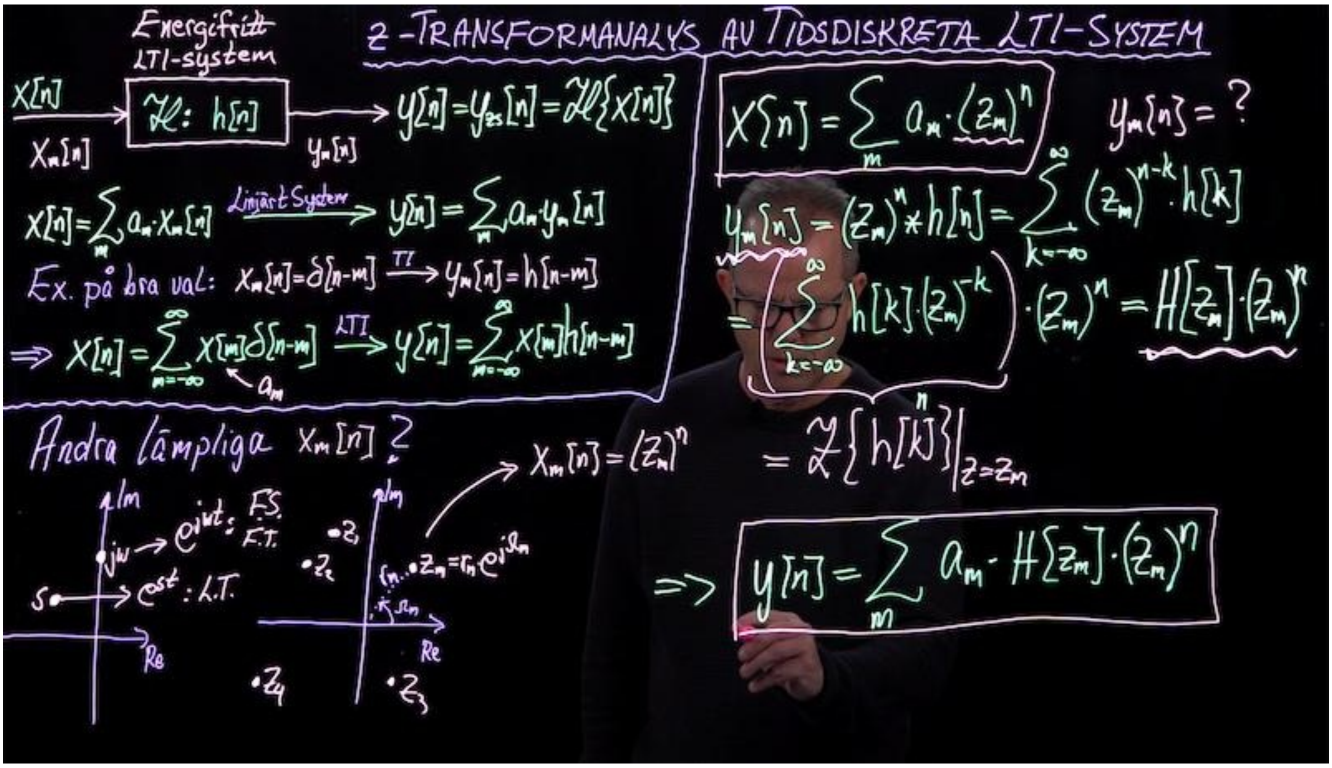
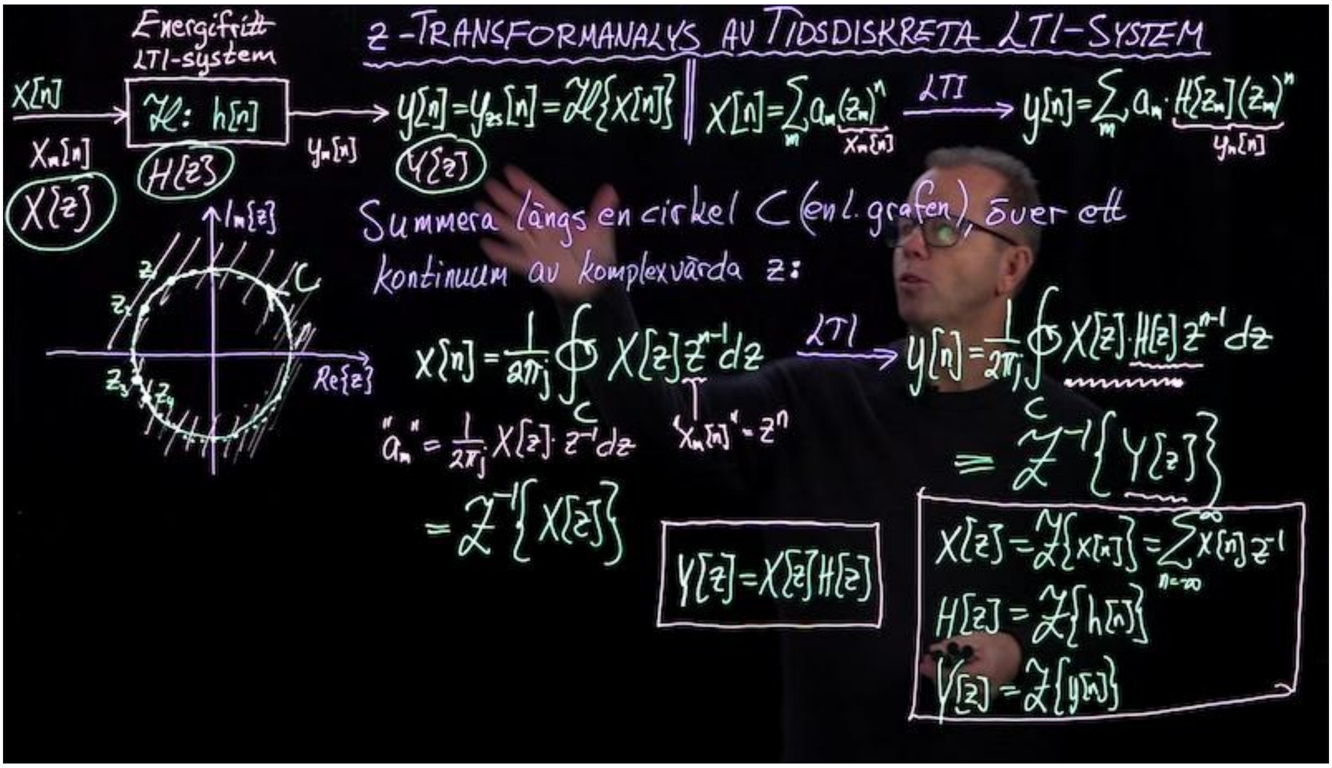
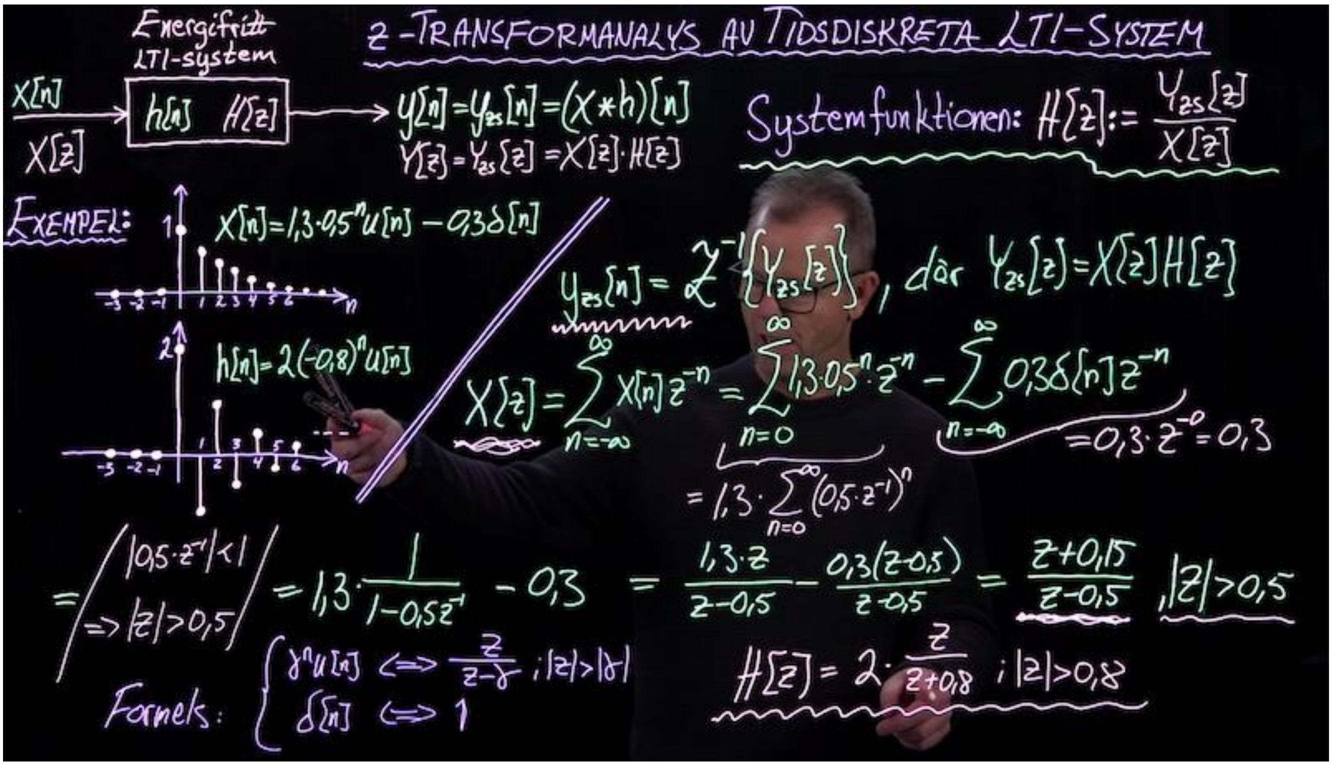
Signaler & System – Föreläsning 12:
z-transformanalys av tidsdiskreta signaler & system



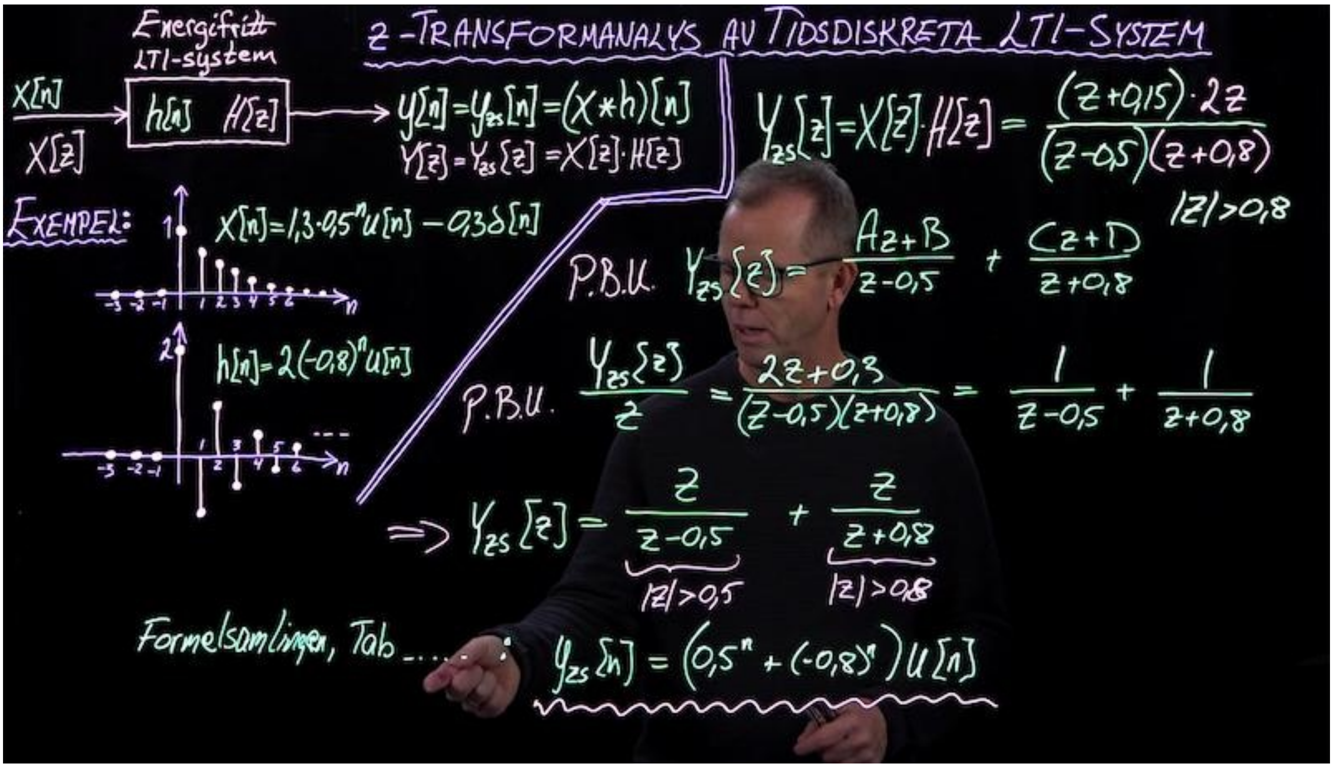
VIDEON, Del 1



VIDEON, Del 2

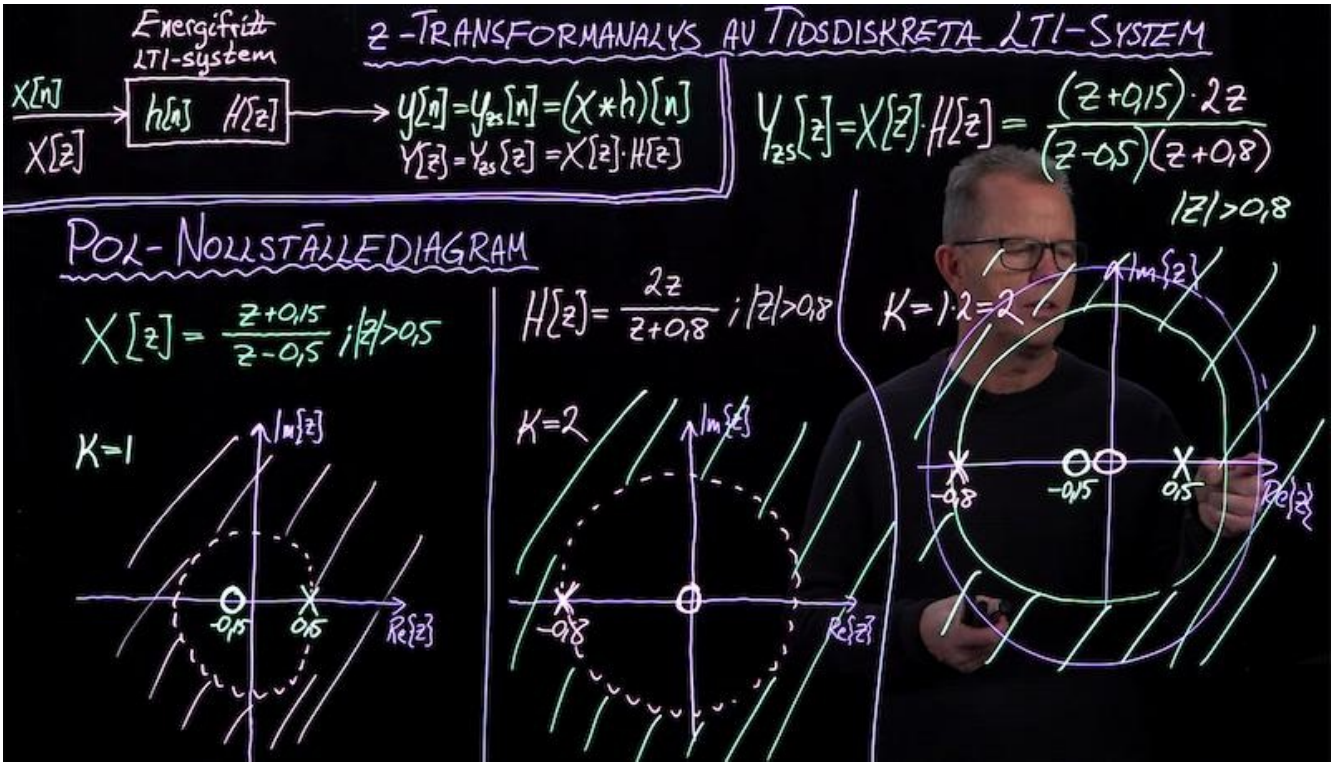


VIDEON, Del 3



VIDEON, Del 4

VIDEON, Del 5



$$\left.\begin{array}{l} x[n<0]=0 \\ h[n<0]=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y[n<0]=0$$

Beräkning av $y[n]$ vid differensekvationsbeskrivning av systemet

$Ex[n] = x[n+1]$

Tidskoninuerligt system		Tidsdiskret system
$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$	1	$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$
	2	Skriv om på negativ form, $y[n-k]$

Vid kausal insignal till kausalt system $\Rightarrow$ *enkelsidiga transformer*:

Ska vara "+"

$\dfrac{dy(t)}{dt} \overset{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} sY(s) - y(0-)$ osv.	3	$y[n-1] \overset{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} z^{-1}Y[z] - y[-1]$ osv. $(y[n-1]u[n])$ $y[n-1]u[n-1] \Leftrightarrow z^{-1}\cdot Y[z]$
$\Rightarrow Y(s) = Y_{zi}(s) + X(s)\cdot H(s)$ där $H(s) = \dfrac{P(s)}{Q(s)} = \dfrac{\sum_{j=0}^{M} b_{N-j}s^j}{\sum_{i=0}^{N} a_{N-i}s^i}$	4	$\Rightarrow Y[z] = Y_{zi}[z] + X[z]\cdot H[z]$ där $H[z] = \dfrac{P[z]}{Q[z]} = \dfrac{\sum_{j=0}^{M} b_{N-j}z^j}{\sum_{i=0}^{N} a_{N-i}z^i}$
$\Rightarrow y(t) \quad \left(= y_{zi}(t) + x(t)*h(t)\right)$	5	$\Rightarrow y[n] \quad \left(= y_{zi}[n] + x[n]*h[n]\right)$

Blockdiagram & Systemrealisering

Samma typ av blockdiagram & direktformsrealiseringar som för tidskontinuerliga LTI-system!

$H\{z\} = \dfrac{Y_{zs}\{z\}}{X\{z\}}$

Tidskontinuerligt system

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Leftrightarrow s \cdot X(s)$$

Tidsdiskret system

$$x[n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{z}X[z] = z^{-1}X[z]$$

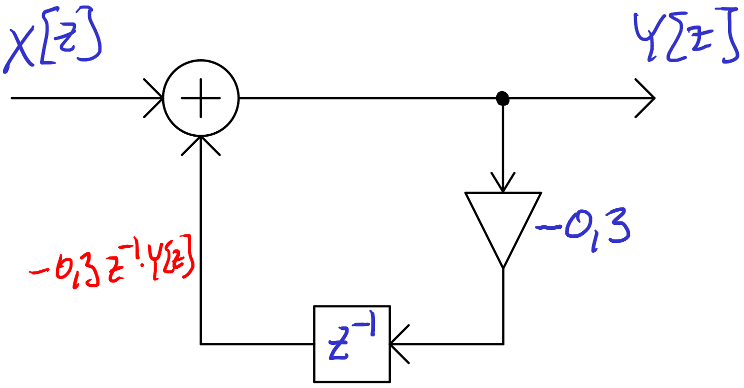
Exempel: $H\{z\} = \dfrac{z}{z+0,3} = \dfrac{Y\{z\}}{X\{z\}}$

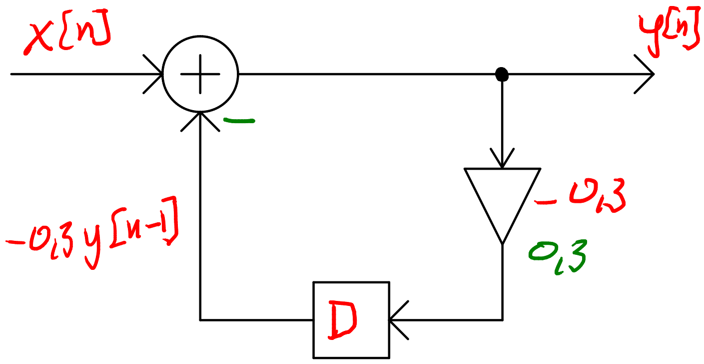
Antag/välj Kausalt $\Rightarrow |z| > 0,3$

$$(z+\cancel{x}^{0,3})\,Y\{z\} = z\,X\{z\} \Rightarrow (1+0,3z^{-1})Y\{z\} = X\{z\}$$

$$Y\{z\} = X\{z\} - 0,3\,z^{-1}Y\{z\} \Rightarrow$$

$$y[n] = x[n] - 0,3\,y[n-1]$$

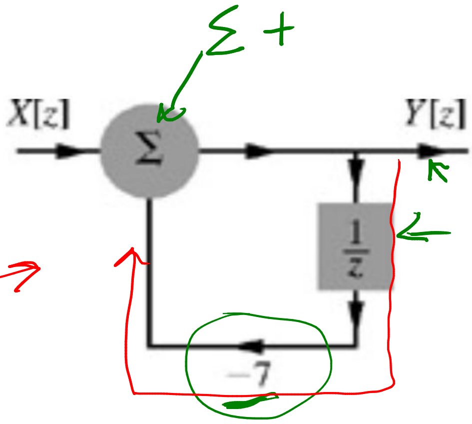




Kursbokens Exempel 5.8:

FIR

IIR



FIR
$y[n] = f\{x[n-k]\}$

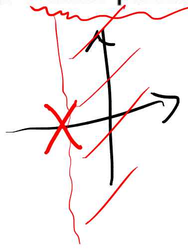
Läs mer själv i kapitel 5.4 och läs på kurswebbsidan om viktning av kurslitteraturen:
Du behöver bara kunna realisera system av låg ordning i någon form –
inte specifikt om de olika realiseringsformerna.

Stabilitet – för LTI-system

Tidskontinuerligt system

Stabilt LTI-system ⇔ $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$

Bivillkor, $H(s)$: Antal poler ≥ Antal nollställen



Tidsdiskret system

Stabilt LTI-system ⇔ enhetscirkeln ligger i konvergensområdet för $H[z]$

(Antal poler ≥ Antal nollställen hos $H[z]$ är *inte* nödvändigt för stabilitet – men för *kausalitet*!)

$$\text{Stabilt LTI} \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

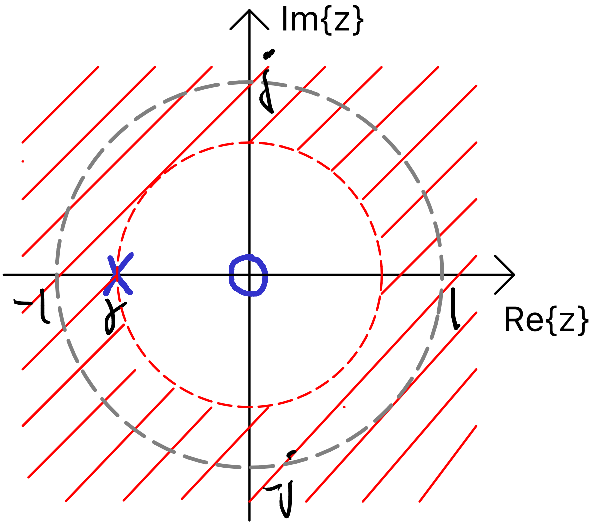
Exempel 1:

$$h[n] = \gamma^n u[n] \iff H[z] = \frac{z}{z-\gamma} \;\; i \;\; |z| > |\gamma|$$

$\sum_n |h[n]| < \infty$ om $|\gamma| < 1$

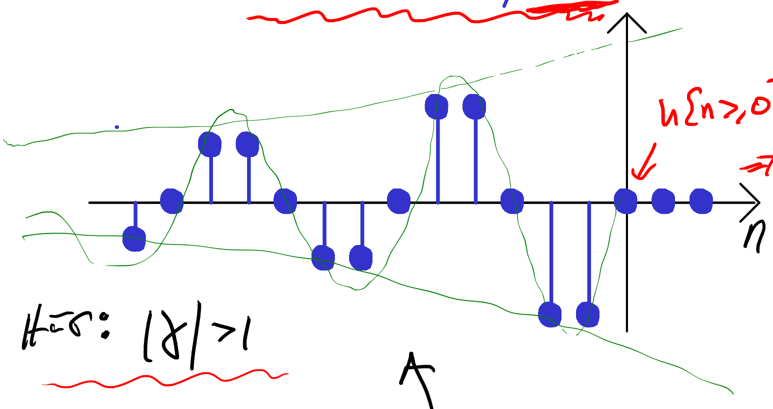
$\Rightarrow$ Polen hos $H[z]$ i $z = \gamma$ är innanför enhetscirkeln $(|z| = 1)$

Kausalt & stabilt system



Exempel 2:

$$h[n] = \gamma^n \sin(\Omega_0 n)\, u_0[-n] \iff H[z] = \frac{-z\gamma\sin(\Omega_0)}{z^2 - 2\gamma\cos(\Omega_0)z + \gamma^2} \;\; ; \;\; |z| < |\gamma|$$

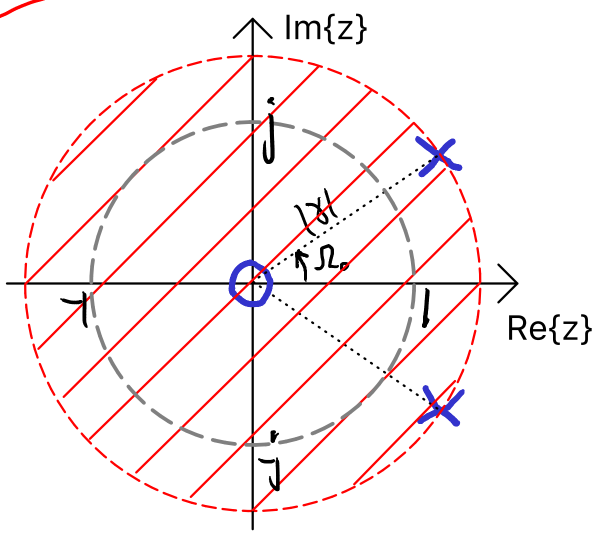


$h[n>0] = 0$

$\Rightarrow$ Anti-kausalt system

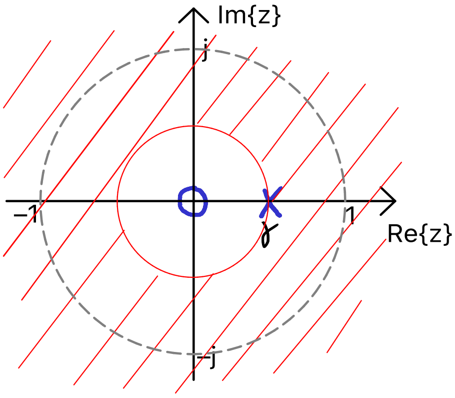
Här: $|\gamma| > 1$

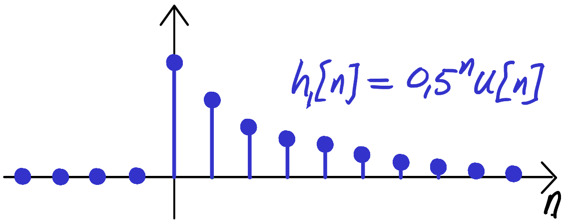
Stabilt LTI-system



Exempel på kausalitetskravet att #poler ≥ #nollställen:

$$H_1[z] = \frac{z}{z-0{,}5}\ ;\ |z|>0{,}5$$





$$h_1[n] = 0{,}5^n u[n]$$

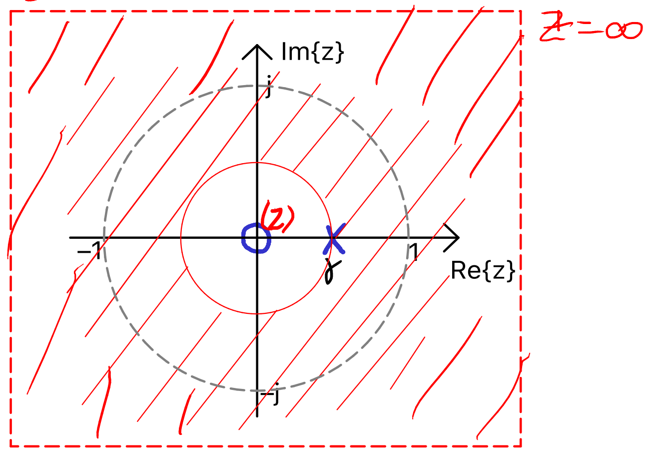
$$H_2\{z\} = z \cdot H_1\{z\} = \frac{z^2}{z-0{,}5}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to\infty} |H_2\{z\}| = \infty$$

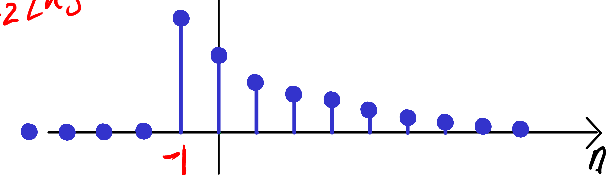
$0{,}5<|z|<\infty$

Icke-kausalt & stabilt

$H_2\{z\}$



$h_2\{n\} = h_1\{n+1\}$



Marginellt stabilt LTI-system ⇔
- Enkelpol(er) hos $H(s)$ på $j\omega$ -axeln
- $j\omega$-axeln = en *rand* till konvergensområdet
- Antal poler ≥ Antal nollställen

(*egentligen* $\#P \geq \#N - 1$)

Marginellt stabilt LTI-system ⇔
- Enkelpol(er) hos $H[z]$ på enhetscirkeln
- Enhetscirkeln = en *rand* till konvergensområdet

Instabilt LTI-system ⇔
- $j\omega$-axeln ligger *inte* i konvergensområdet

  eller
- Multipelpol(er) på $j\omega$-axeln, som utgör en *rand* till konvergensområdet

Instabilt LTI-system ⇔
- Enhetscirkeln ligger *inte* i konvergensområdet

  eller
- Multipelpol(er) på enhetscirkeln, som utgör en *rand* till konvergensområdet

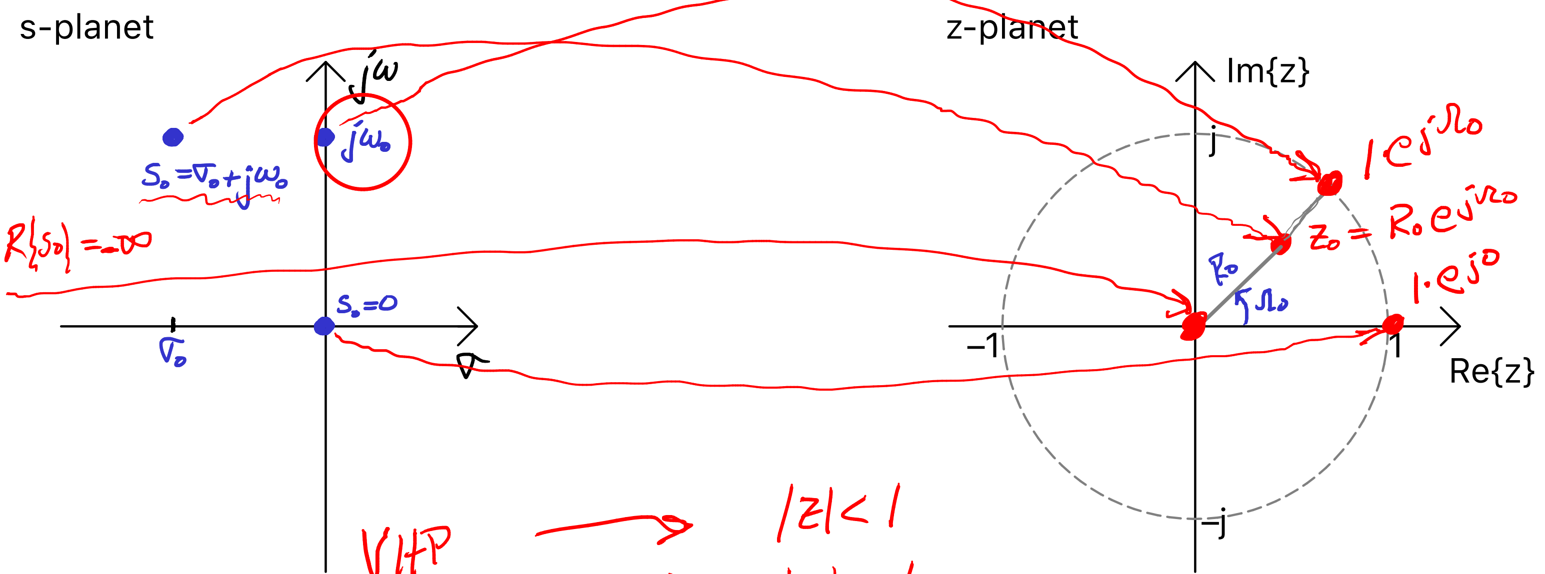
Frekvensrelationer

$x(t)$ → **Likformig sampling** → $x[n] = x(nT)$

$$x(t) = e^{s_0 t}$$

$$x[n] = e^{s_0 nT} = \left(e^{s_0 T}\right)^n = \left/ z = e^{sT} \right/ = z_0^{\,n}$$

$$s_0 \rightarrow z_0 = e^{s_0 T} = \underbrace{e^{\sigma_0 T}}_{e^{-\infty}=0} \cdot e^{j\underbrace{\omega_0 T}_{\Omega_0}} = R_0 \cdot e^{j\Omega_0}$$



VHP → $|z| < 1$

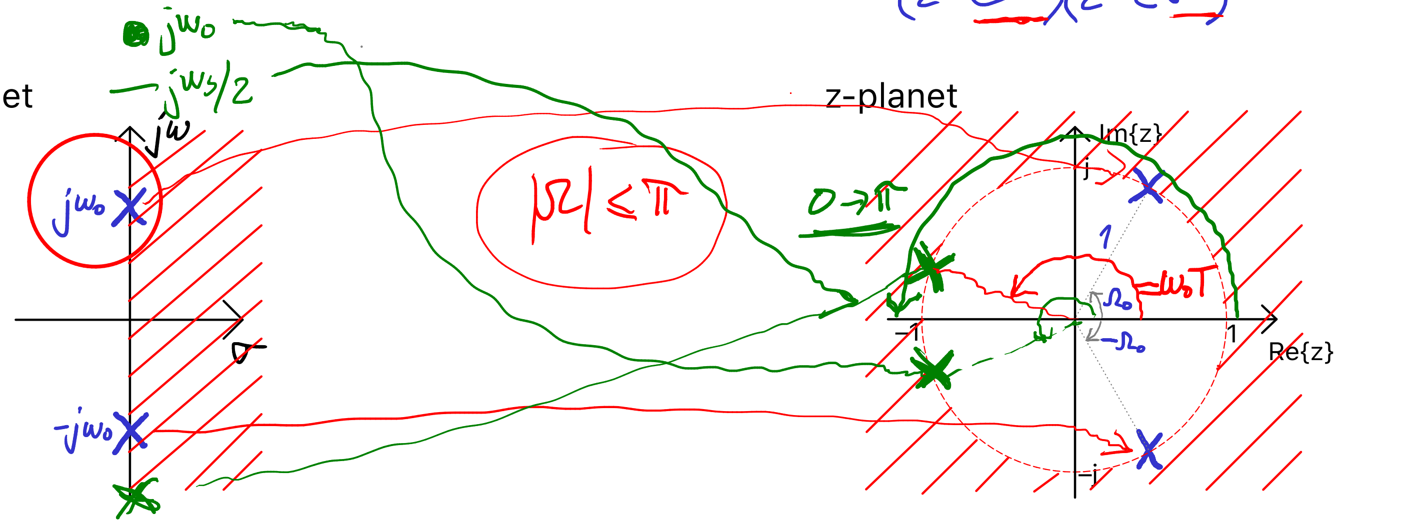
HHP → $|z| > 1$

$j\omega$-axeln → $|z| = 1$ Enhetscirkeln

$$x(t) = \sin(\omega_0 t)u(t) \xrightarrow{\text{Sampling}} x[n] = x(nT) = \sin(\Omega_0 n)u[n] \,, \quad \Omega_0 = \omega_0 T$$

37,4π

$$\Longleftrightarrow X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \;;\; Re\{s\} > 0 \qquad \Longleftrightarrow X[z] = \frac{z \cdot \sin(\Omega_0)}{(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})} \;;\; |z| > 1$$



Frekvenssvar/frekvensfunktion för stabila LTI-system

Tidskontinuerligt system

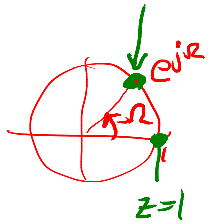
$$\mathcal{H}\{e^{s_0 t}\} = H(s_0)e^{s_0 t}$$

$s = j\omega$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}\{e^{j\omega_0 t}\} = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Tidsdiskret system

$$\mathcal{H}\{z_0^n\} = H[z_0]z_0^n$$



$z = e^{j\Omega}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}\{e^{j\Omega_0 n}\} = H[e^{j\Omega_0}]e^{j\Omega_0 n}$$

$C = e^{j0t}$, $\cos\alpha = \mathrm{Re}\{e^{j\alpha}\}$ medför följande samband:

$$x(t) = C + A\cos(\omega_0 t + \theta) \quad \Rightarrow \quad y(t) = C \cdot H(j0) + A|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \arg H(j\omega_0))$$

$$x[n] = C + A\cos(\Omega_0 n + \theta) \quad \Rightarrow \quad y[n] = C \cdot H[e^{j0}] + A|H[e^{j\Omega_0}]|\cos(\Omega_0 n + \theta + \arg H[e^{j\Omega_0}])$$

Systemets frekvensfunktion:

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} \quad (= H(j\omega))$$
$$= |H(\omega)|e^{j\arg H(\omega)}$$

$$H[\Omega] = H[z]\big|_{z=e^{j\Omega}} \quad (= H[e^{j\Omega}])$$
$$= |H[\Omega]|e^{j\arg H[\Omega]}$$

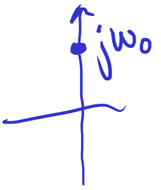
med

- Amplitudkaraktäristik $|H(\omega)|$ resp. $|H[\Omega]|$ (alt. $|H(j\omega)|$ resp. $|H[e^{j\Omega}]|$)
- Faskaraktäristik $\arg H(\omega)$ resp. $\arg H[\Omega]$, $\angle H$ (alt. $\arg H(j\omega)$ resp. $\arg H[e^{j\Omega}]$)

Även det tidsdiskreta LTI-systemet utför en **frekvensselektiv filtrering** (amplitudskalning och fasförskjutning) av inkommande frekvenssignaler!

$|H[e^{j\Omega}]|$ & $\arg H[e^{j\Omega}]$ från pol-nollställediagram

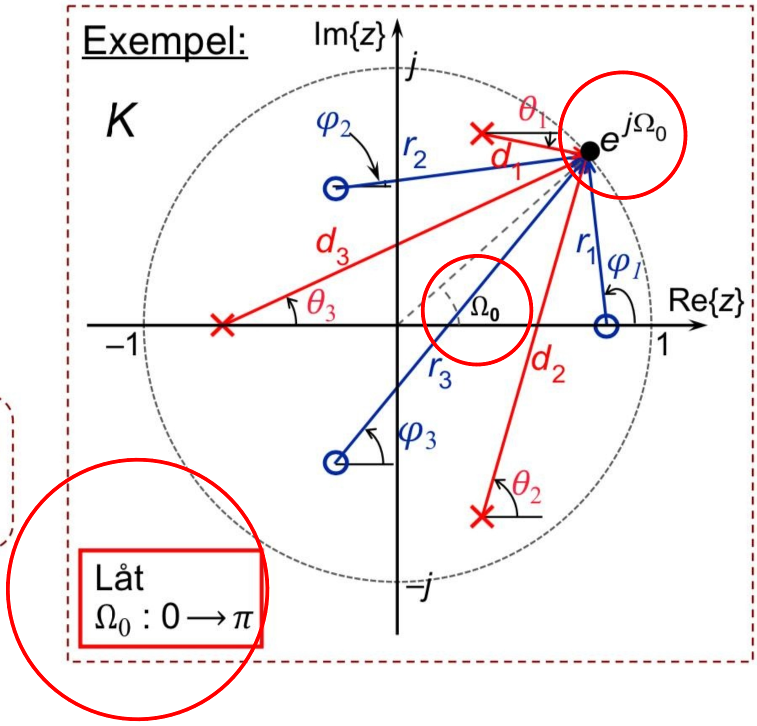
$H(w_0) = H(s)\big|_{s=jw_0}$



$$H[\Omega_0] = H[z]\big|_{z=e^{j\Omega_0}} = \begin{cases} K \cdot \dfrac{(e^{j\Omega_0}-n_1)(e^{j\Omega_0}-n_2)\cdots(e^{j\Omega_0}-n_M)}{(e^{j\Omega_0}-p_1)(e^{j\Omega_0}-p_2)\cdots(e^{j\Omega_0}-p_N)} = K \cdot \dfrac{r_1e^{j\varphi_1}\cdot r_2e^{j\varphi_2}\cdot\cdots\cdot r_Me^{j\varphi_M}}{d_1e^{j\theta_1}\cdot d_2e^{j\theta_2}\cdot\cdots\cdot d_Ne^{j\theta_N}} \\ \underline{|H[\Omega_0]|}\, e^{j\underline{\arg H[\Omega_0]}} \end{cases}$$

$$|K| \cdot \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_M}{d_1 \cdot d_2 \cdot \cdots \cdot d_N}$$

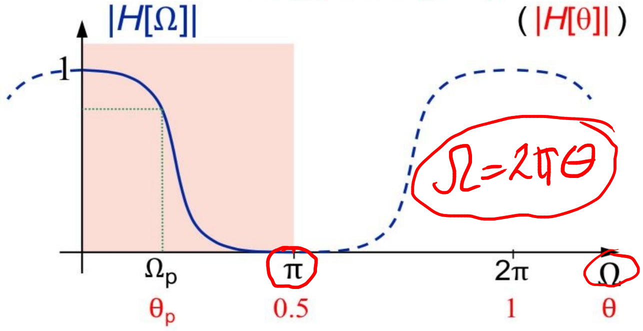
$$\arg K + (\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M) - (\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_N)$$



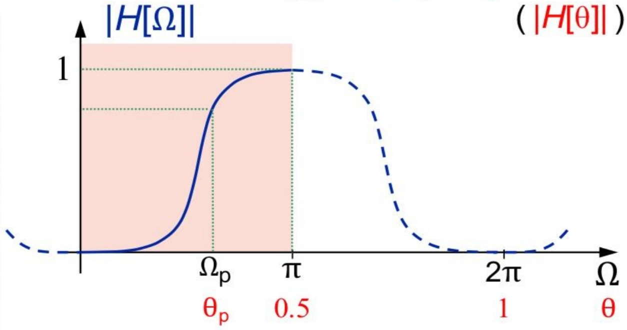
Demonstration i pzchange!

Tidsdiskreta frekvensselektiva filtertyper

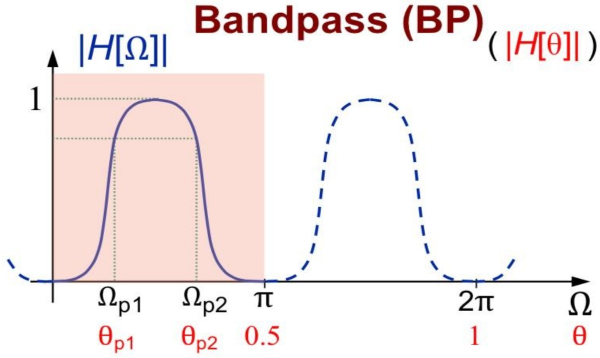
Lågpass (LP)



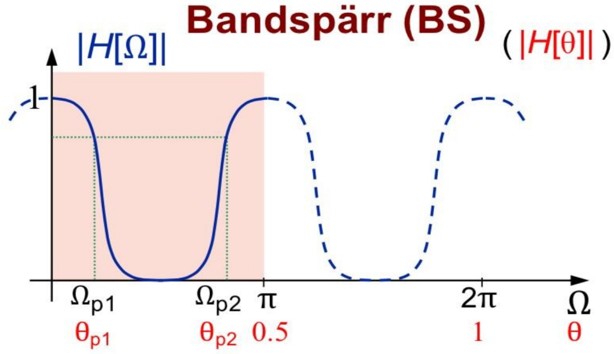
Högpass (HP)



Bandpass (BP)

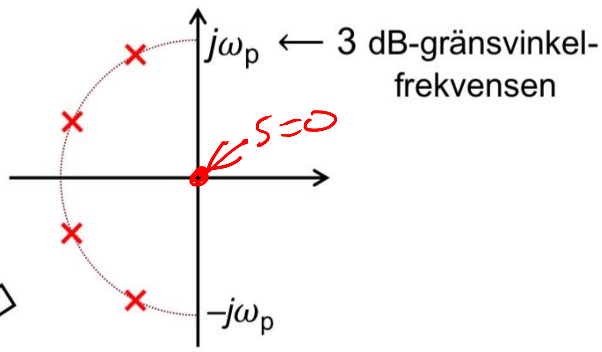


Bandspärr (BS)

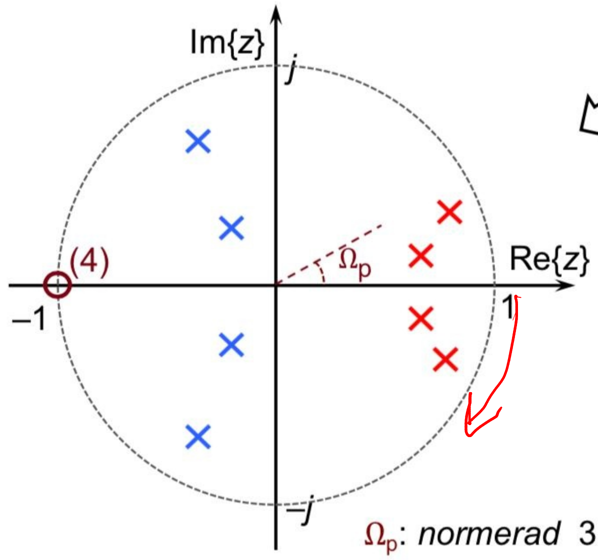


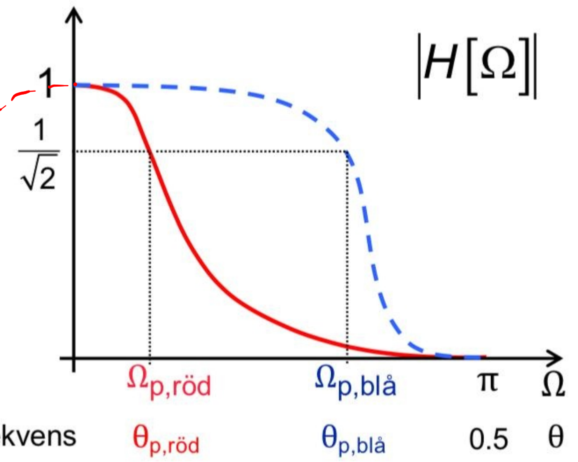
Exempel – poler & nollställen för LP-filter

T.ex. **butterworthfilter** –
poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel:



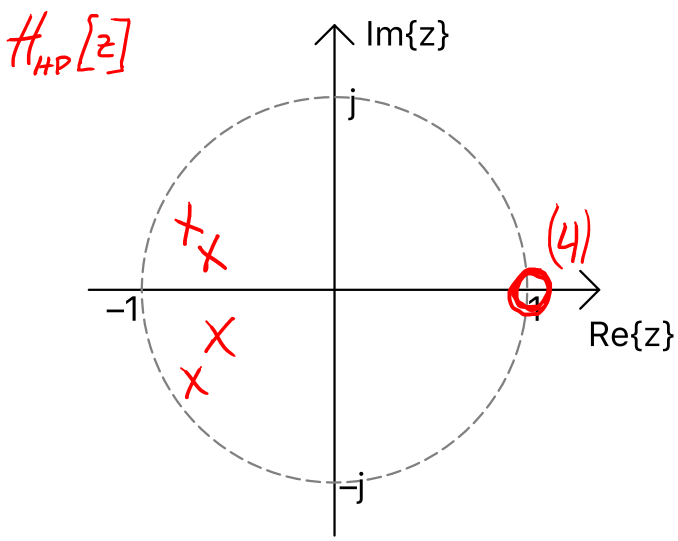
Poler & nollställen hos $H[z]$:

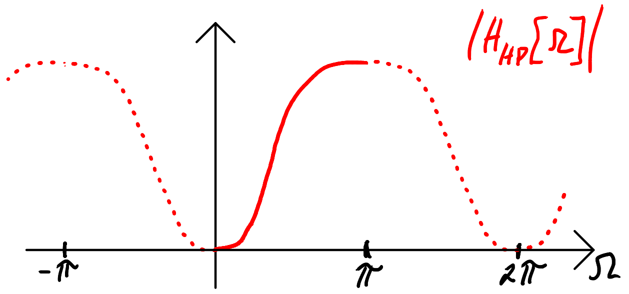




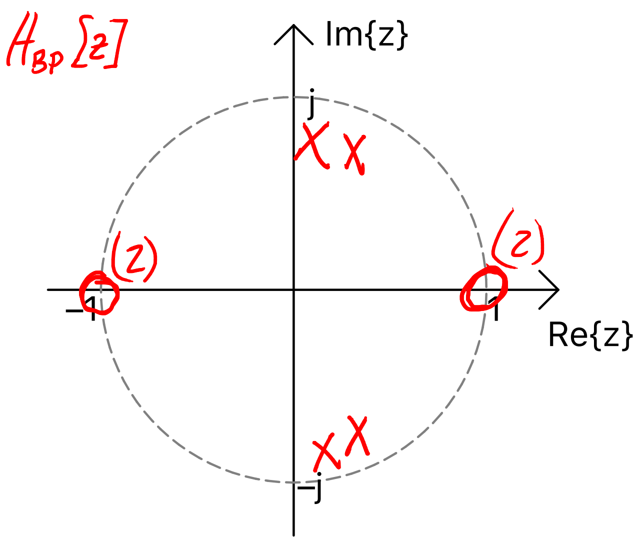
Ω_p: *normerad* 3 dB-gränsvinkelfrekvens

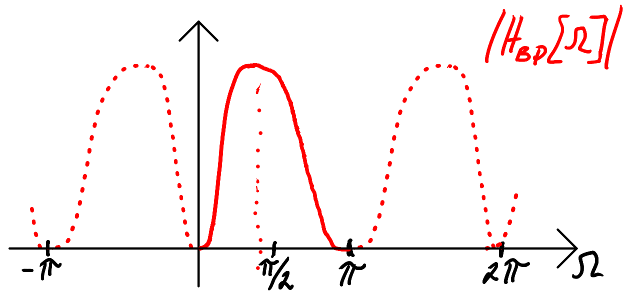
Exempel: Högpassfilter



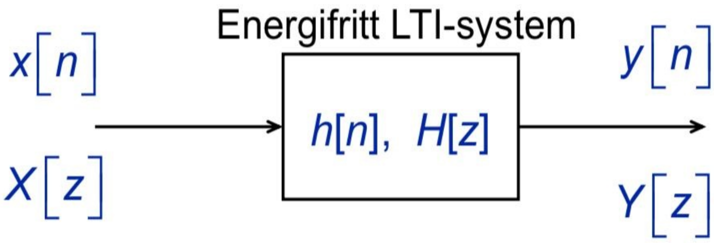


Exempel: Bandpassfilter





Analys m.h.a. dubbelsidig z-transform



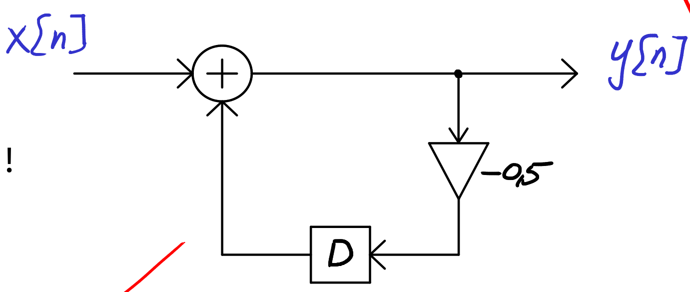
$$y[n] = y_{zs}[n] = x[n] * h[n] \quad (y_{zi}[n] = 0)$$

$$Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z]H[z]$$

- Om $x[n]$ är icke-kausal ($x[n<0] \neq 0$) och/eller systemet är icke-kausalt ($h[n<0] \neq 0$) så används den **dubbelsidiga z-transformen**!
- Håll koll på konvergensområdet – använd korrekt transformpar!!
- Repetera – läs själv i **Kap. 5.9**!

Exempel (som jag antagligen inte hinner med på föreläsningen...):

$x[n] = 0{,}9^n u[n] + 1{,}2^n u_0[-n]$



Beräkna det energifria systemets utsignal y[n]!

$X(z)$

$H(z)$

$Y\{z\} = X\{z\}H(z) \longrightarrow y\{n\}$

I slutet av föreläsningen sa jag att du rekommenderas att lösa uppgiften själv (eftersom jag, som jag trodde...) inte hann med exemplet på föreläsningen.   Utsignalen blir följande:

$$y[n] \approx 0{,}64 \cdot 0{,}9^n u[n] + 0{,}71 \cdot 1{,}2^n u_0[-n] + 0{,}06(-0{,}5)^n u[n]$$