

Signaler & System – Föreläsning 12: z-transformanalys av tidsdiskreta signaler & system

VIDEON,
Del 1

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow \mathcal{Z}\{h[n]\} \rightarrow Y[n] = Y_{zs}[n] = \mathcal{Z}\{X[n]\}$

$X_m[n] \rightarrow Y_m[n]$

Linjärt System $\rightarrow Y[n] = \sum_m a_m Y_m[n]$

Ex. på bra val: $X_m[n] = \delta[n-m] \xrightarrow{TT} Y_m[n] = h[n-m]$

$\Rightarrow X[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] \delta[n-m] \xrightarrow{LTI} Y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m] h[n-m]$

$X[n] = \sum_m a_m (z_m)^n$ $Y_m[n] = ?$

$Y_m[n] = (z_m)^n * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (z_m)^{n-k} h[k]$

$= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] (z_m)^{-k} \right) \cdot (z_m)^n = H[z_m] \cdot (z_m)^n$

Andra lämpliga $X_m[n]$?

$X_m[n] = (z_m)^n = \mathcal{Z}\{h[k]\} \Big|_{z=z_m}$

$\Rightarrow Y[n] = \sum_m a_m H[z_m] \cdot (z_m)^n$

VIDEON,
Del 2

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow \mathcal{Z}\{h[n]\} \rightarrow Y[n] = Y_{zs}[n] = \mathcal{Z}\{X[n]\}$

$X_m[n] \rightarrow Y_m[n]$

$X[n] = \sum_m a_m \frac{(z_m)^n}{X_m[n]} \xrightarrow{LTI} Y[n] = \sum_m a_m \frac{H[z_m] (z_m)^n}{Y_m[n]}$

$X[z]$ $H[z]$ $Y[z]$

Summera längs en cirkel C (enl. grafen), över ett kontinuum av komplexvärden z :

$X[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X[z] z^{n-1} dz \xrightarrow{LTI} Y[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X[z] H[z] z^{n-1} dz$

$a_m = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X[z] z^{-1} dz \xrightarrow{X_m[n] = z^n} = \mathcal{Z}^{-1}\{X[z]\}$

$Y[z] = X[z] H[z]$

$X[z] = \mathcal{Z}\{X[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] z^{-n}$

$H[z] = \mathcal{Z}\{h[n]\}$

$Y[z] = \mathcal{Z}\{Y[n]\}$

Energifritt LTI-system

$X[n]$ \rightarrow $h[n]$ $H[z]$ \rightarrow $Y[n] = y_{zs}[n] = (X * h)[n]$
 $X[z]$ \rightarrow $Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z]$

Systemfunktioner: $H[z] := \frac{Y_{zs}[z]}{X[z]}$

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

EXEMPEL: $X[n] = 1,3 \cdot 0,5^n u[n] - 0,3 \delta[n]$

$h[n] = 2(-0,8)^n u[n]$

$y_{zs}[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y_{zs}[z]\}$, där $Y_{zs}[z] = X[z]H[z]$

$X[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 1,3 \cdot 0,5^n z^{-n} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} 0,3 \delta[n] z^{-n}$
 $= 1,3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (0,5 \cdot z^{-1})^n = 1,3 \cdot \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}} - 0,3$

$\Rightarrow |z| > 0,5$

Formels: $\begin{cases} \delta^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1 \\ \delta[n] \leftrightarrow 1 \end{cases}$

$H[z] = 2 \cdot \frac{z}{z+0,8} \quad |z| > 0,8$

Energifritt LTI-system

$X[n]$ \rightarrow $h[n]$ $H[z]$ \rightarrow $Y[n] = y_{zs}[n] = (X * h)[n]$
 $X[z]$ \rightarrow $Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z]$

z-TRANSFORMANALYS AV TIDSDISKRETA LTI-SYSTEM

EXEMPEL: $X[n] = 1,3 \cdot 0,5^n u[n] - 0,3 \delta[n]$

$h[n] = 2(-0,8)^n u[n]$

$Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z] = \frac{(z+0,15) \cdot 2z}{(z-0,5)(z+0,8)} \quad |z| > 0,8$

P.B.U. $Y_{zs}[z] = \frac{Az+B}{z-0,5} + \frac{Cz+D}{z+0,8}$

P.B.U. $\frac{Y_{zs}[z]}{z} = \frac{2z+0,3}{(z-0,5)(z+0,8)} = \frac{1}{z-0,5} + \frac{1}{z+0,8}$

$\Rightarrow Y_{zs}[z] = \frac{z}{z-0,5} + \frac{z}{z+0,8}$
 $|z| > 0,5 \quad |z| > 0,8$

Formelsamlingen, Tab... : $y_{zs}[n] = (0,5^n + (-0,8)^n) u[n]$

Energifritt LTI-system

$X[n] \rightarrow X[z] \rightarrow \begin{matrix} h[n] \\ H[z] \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} y[n] = y_{zs}[n] = (X * h)[n] \\ Y[z] = Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z] \end{matrix}$

$Y_{zs}[z] = X[z] \cdot H[z] = \frac{(z+0,15) \cdot 2z}{(z-0,5)(z+0,8)}$ $|z| > 0,8$

POL-NOLLSTÄLLEDIAGRAM

$X[z] = \frac{z+0,15}{z-0,5} ; |z| > 0,5$ $K=1$

$H[z] = \frac{2z}{z+0,8} ; |z| > 0,8$ $K=2$

$K=1 \cdot 2 = 2$

Beräkning av $y[n]$ vid differensekvationsbeskrivning av systemet

Tidskoninuerligt system

$$Q(D)y(t) = P(D)x(t)$$

Tidsdiskret system

$$Q[E]y[n] = P[E]x[n]$$

Skriv om på negativ form, $y[n-k]$

Vid kausal insignal till kausalt system \Rightarrow enkelsidiga transformer:

$$\frac{dy(t)}{dt} \stackrel{\mathcal{L}}{\Leftrightarrow} sY(s) - y(0^-) \quad \text{osv.}$$

$$y[n-1] \stackrel{\mathcal{Z}}{\Leftrightarrow} z^{-1}Y[z] - y[-1] \quad \text{osv.}$$

($y[n-1]u[n]$) ↪ Ska vara "+"

$$\Rightarrow Y(s) = Y_{zi}(s) + X(s) \cdot H(s)$$

$$\Rightarrow Y[z] = Y_{zi}[z] + X[z] \cdot H[z]$$

där $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{\sum_{j=0}^M b_{N-j} s^j}{\sum_{i=0}^N a_{N-i} s^i}$

där $H[z] = \frac{P[z]}{Q[z]} = \frac{\sum_{j=0}^M b_{N-j} z^j}{\sum_{i=0}^N a_{N-i} z^i}$

$$\Rightarrow y(t) \quad (= y_{zi}(t) + x(t) * h(t))$$

$$\Rightarrow y[n] \quad (= y_{zi}[n] + x[n] * h[n])$$

Blockdiagram & Systemrealisering

Samma typ av blockdiagram & direktformsrealiseringar som för tidskontinuerliga LTI-system!

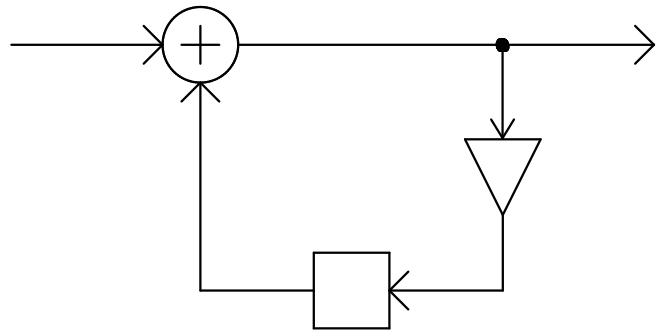
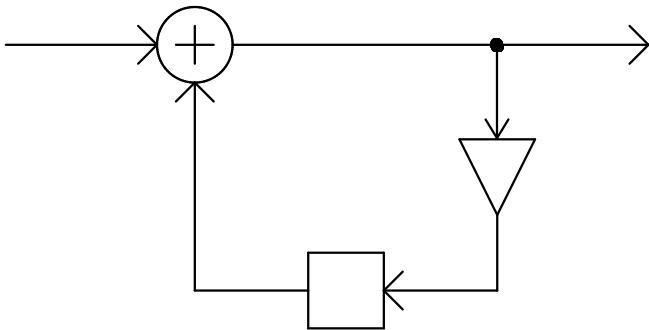
Tidskontinuerligt system

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

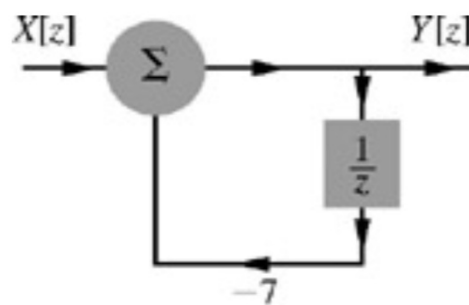
Tidsdiskret system

$$x[n-1] \Leftrightarrow \frac{1}{z} X[z] = z^{-1} X[z]$$

Exempel:



Kursbokens Exempel 5.8:



Läs mer själv i kapitel 5.4 och läs på kurswebbsidan om viktning av kurslitteraturen: Du behöver bara kunna realisera system av låg ordning i någon form – inte specifikt om de olika realiseringsformerna.

Stabilitet – för LTI-system

Tidskontinuerligt system

Stabilt LTI-system $\Leftrightarrow j\omega$ -axeln ligger i konvergensområdet för $H(s)$

Bivillkor, $H(s)$: Antal poler \geq Antal nollställen

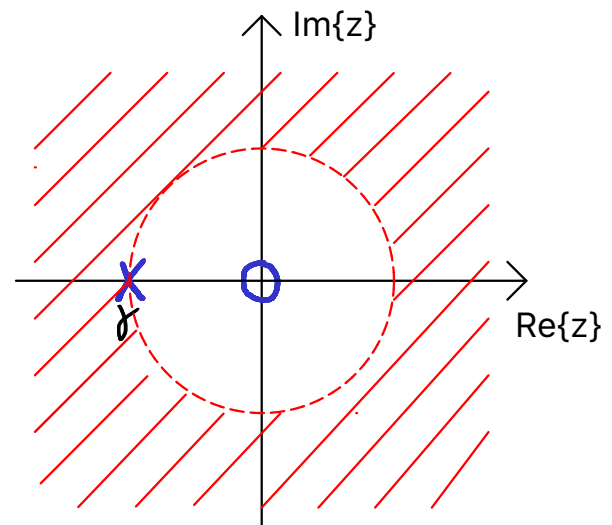
Tidsdiskret system

Stabilt LTI-system \Leftrightarrow enhetscirkeln ligger i konvergensområdet för $H[z]$

(Antal poler \geq Antal nollställen hos $H[z]$ är *inte* nödvändigt för stabilitet – men för *kausalitet!*)

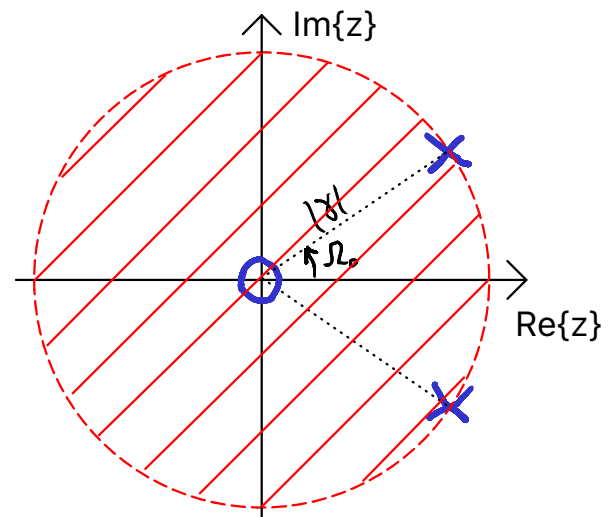
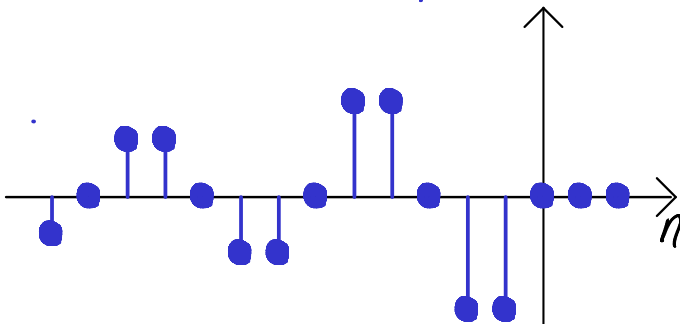
Exempel 1:

$$h[n] = \delta^n u[n] \Leftrightarrow H[z] = \frac{z}{z-\delta} \quad ; \quad |z| > |\delta|$$



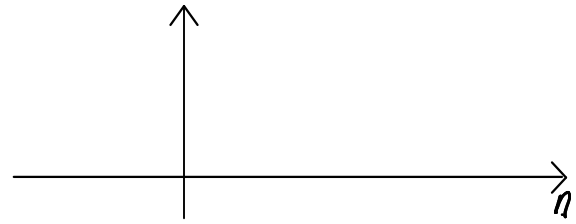
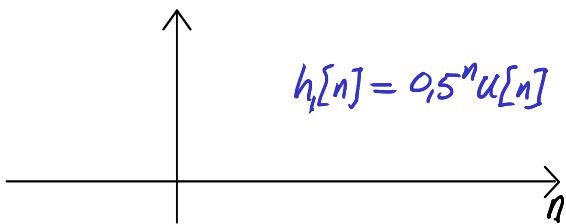
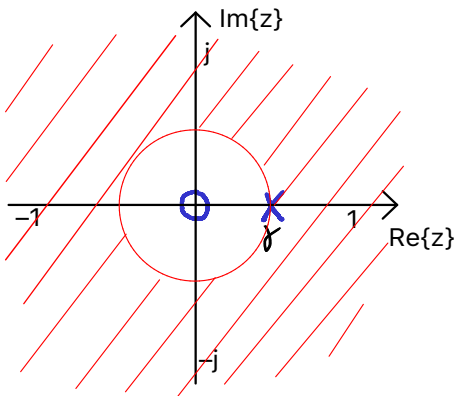
Exempel 2:

$$h[n] = \delta^n \sin(\Omega_0 n) u[-n] \Leftrightarrow H[z] = \frac{-z\delta \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2\delta \cos(\Omega_0)z + \delta^2} \quad ; \quad |z| < |\delta|$$



Exempel på kausalitetskravet att #poler \geq #nollställen:

$$H_1[z] = \frac{z}{z-0.5} ; |z| > 0.5$$



Marginellt stabilt LTI-system \Leftrightarrow

- Enkelpol(er) hos $H(s)$ på $j\omega$ -axeln
- $j\omega$ -axeln = en rand till konvergensområdet
- Antal poler \geq Antal nollställen
(egentligen $\#P \geq \#N - 1$)

Marginellt stabilt LTI-system \Leftrightarrow

- Enkelpol(er) hos $H[z]$ på enhetscirkeln
- Enhetscirkeln = en rand till konvergensområdet

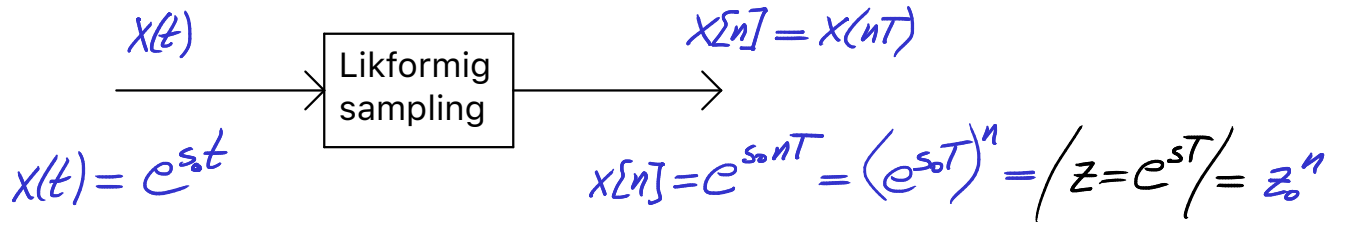
Instabilt LTI-system \Leftrightarrow

- $j\omega$ -axeln ligger *inte* i konvergensområdet
eller
- Multipelpol(er) på $j\omega$ -axeln, som utgör en rand till konvergensområdet

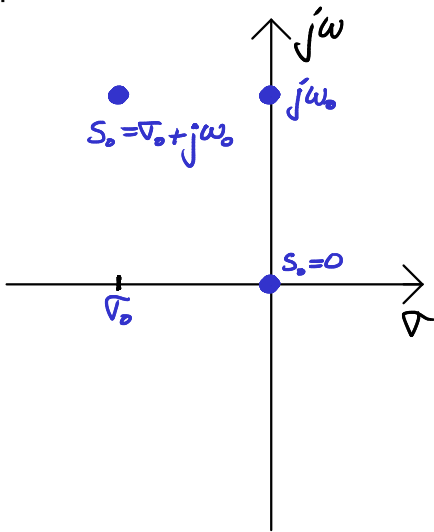
Instabilt LTI-system \Leftrightarrow

- Enhetscirkeln ligger *inte* i konvergensområdet
eller
- Multipelpol(er) på enhetscirkeln, som utgör en rand till konvergensområdet

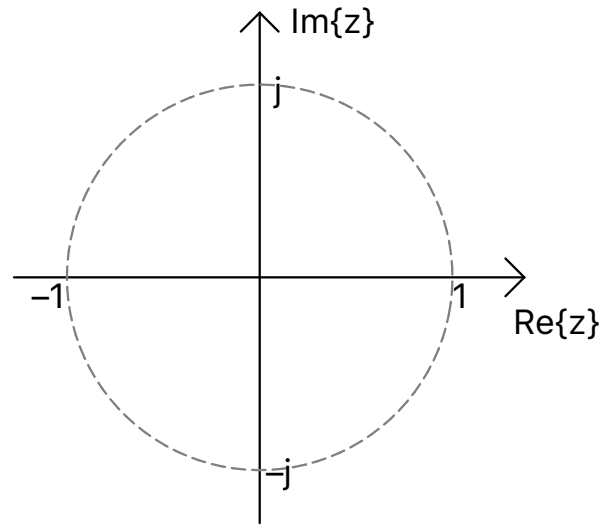
Frekvensrelationer



s-planet



z-planet



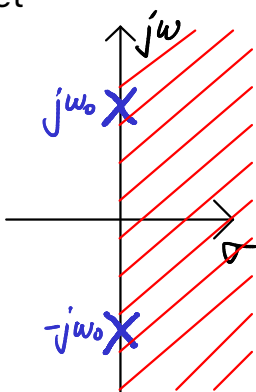
$x(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$

 $\xrightarrow{\text{Sampling}}$
 $x[n] = X(nT) = \sin(\Omega_0 n) u[n], \quad \Omega_0 = \omega_0 T$

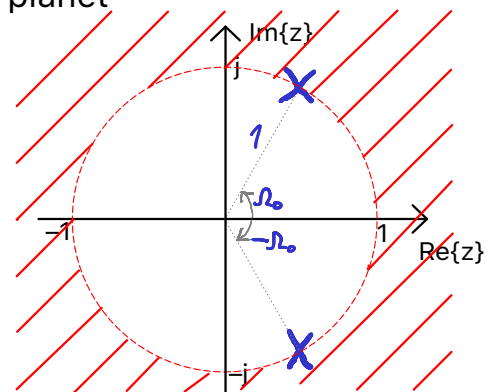
$\Leftrightarrow X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} ; \text{Re}\{s\} > 0$

$\Leftrightarrow X(z) = \frac{z \cdot \sin(\Omega_0)}{(z - e^{j\Omega_0})(z - e^{-j\Omega_0})} ; |z| > 1$

s-planet



z-planet



Frekvenssvar/frekvensfunktion för stabila LTI-system

Tidskontinuerligt system

$$\mathcal{H}\{e^{s_0 t}\} = H(s_0)e^{s_0 t}$$

$$s=j\omega \Rightarrow \mathcal{H}\{e^{j\omega_0 t}\} = H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}$$

Tidsdiskret system

$$\mathcal{H}\{z_0^n\} = H[z_0]z_0^n$$

$$z=e^{j\Omega} \Rightarrow \mathcal{H}\{e^{j\Omega_0 n}\} = H[e^{j\Omega_0}]e^{j\Omega_0 n}$$

$C = e^{j0t}$, $\cos \alpha = \text{Re}\{e^{j\alpha}\}$ medför följande samband:

$$\underline{x(t) = C + A\cos(\omega_0 t + \theta)} \Rightarrow \underline{y(t) = C \cdot H(j0) + A|H(j\omega_0)|\cos(\omega_0 t + \theta + \arg H(j\omega_0))}$$

$$\underline{x[n] = C + A\cos(\Omega_0 n + \theta)} \Rightarrow \underline{y[n] = C \cdot H[e^{j0}] + A|H[e^{j\Omega_0}]|\cos(\Omega_0 n + \theta + \arg H[e^{j\Omega_0}])}$$

Systemets frekvensfunktion:

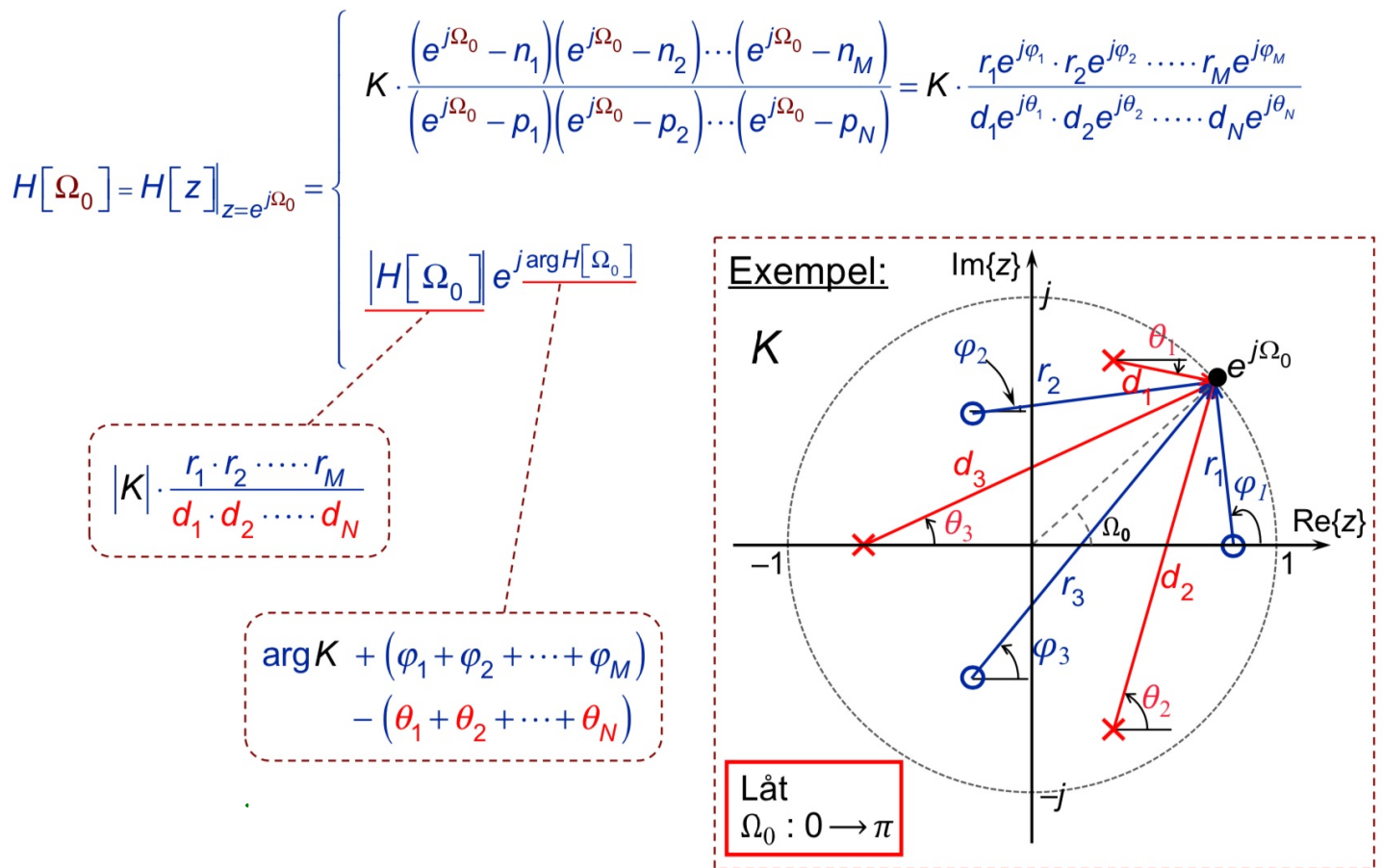
$$H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega} (= H(j\omega)) \\ = |H(\omega)| e^{j\arg H(\omega)}$$

$$H[\Omega] = H[z]|_{z=e^{j\Omega}} (= H[e^{j\Omega}]) \\ = |H[\Omega]| e^{j\arg H[\Omega]}$$

med $\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\text{Amplitudkaraktäristik}} & |H(\omega)| \quad \text{resp. } |H[\Omega]| \quad \left(\text{alt. } |H(j\omega)| \text{ resp. } |H[e^{j\Omega}]| \right) \\ \underline{\text{Faskaraktäristik}} & \arg H(\omega) \quad \text{resp. } \underline{\arg H[\Omega]}, \quad \angle H \\ & \left(\text{alt. } \arg H(j\omega) \text{ resp. } \arg H[e^{j\Omega}] \right) \end{array} \right.$

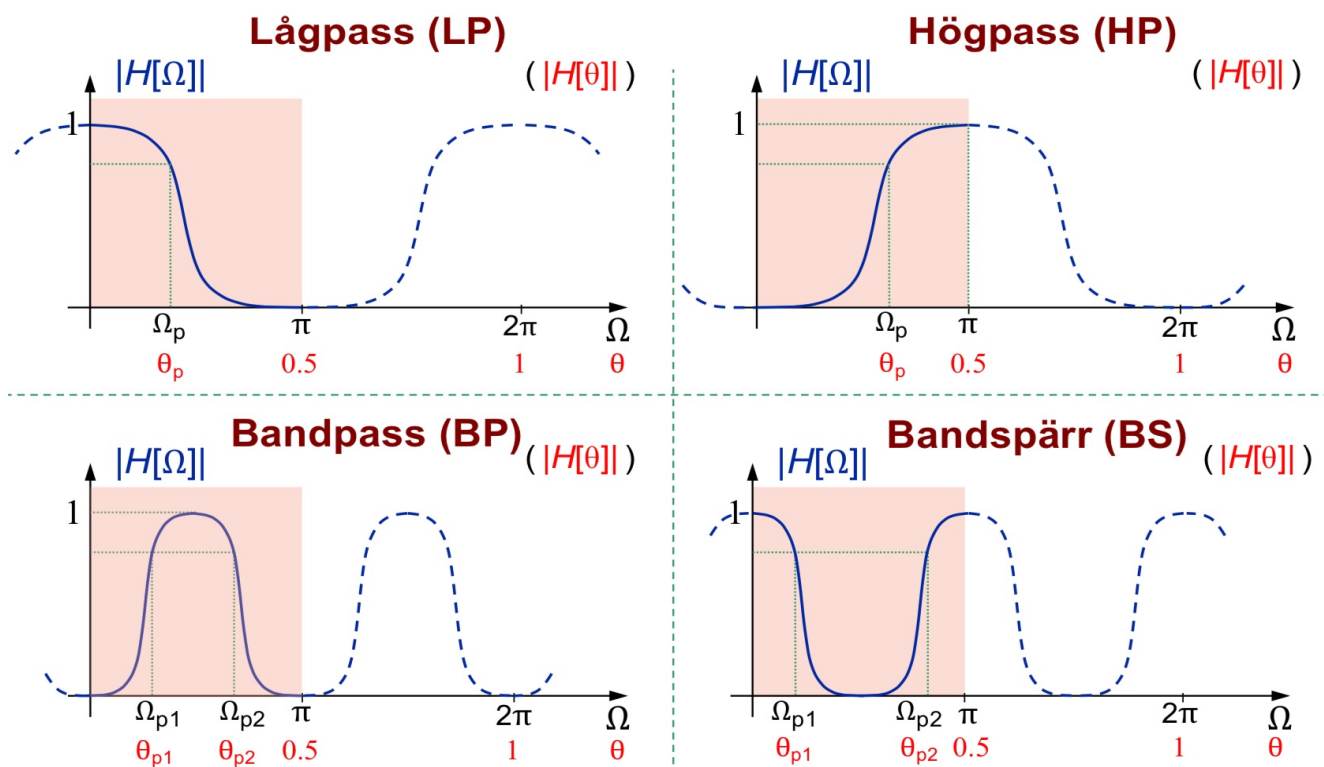
Även det tidsdiskreta LTI-systemet utför en **frekvensselektiv filtrering** (amplitudskalning och faskförskjutning) av inkommande frekvenssignaler!

$|H[e^{j\Omega}]|$ & $\arg H[e^{j\Omega}]$ från pol-nollställediagram



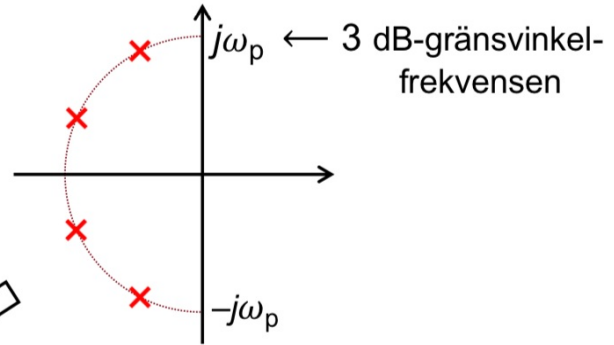
Demonstration i pzchange!

Tidsdiskreta frekvensselektiva filtertyper

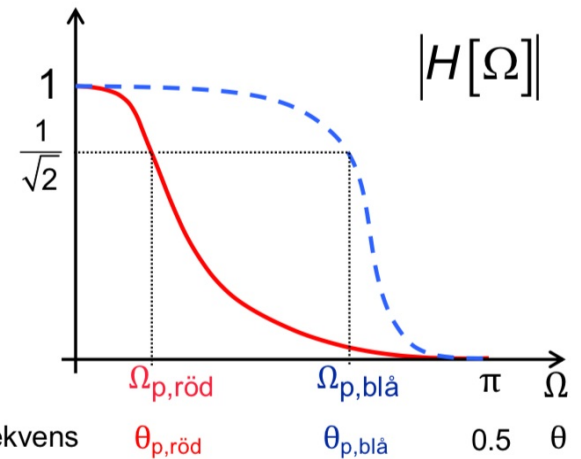
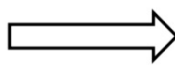
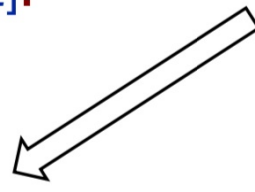
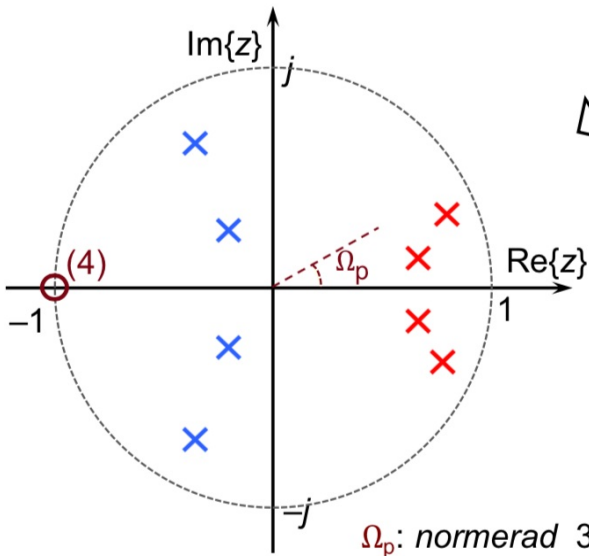


Exempel – poler & nollställen för LP-filter

T.ex. **butterworthfilter** –
 poler hos $H(s)$ längs en halvcirkel:

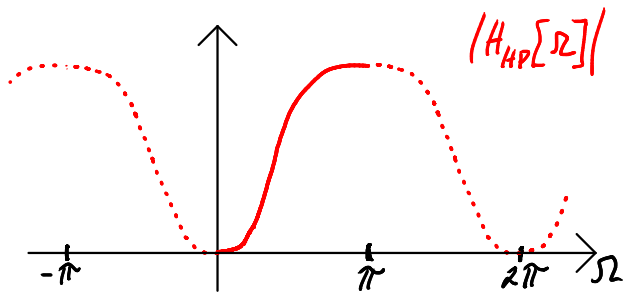
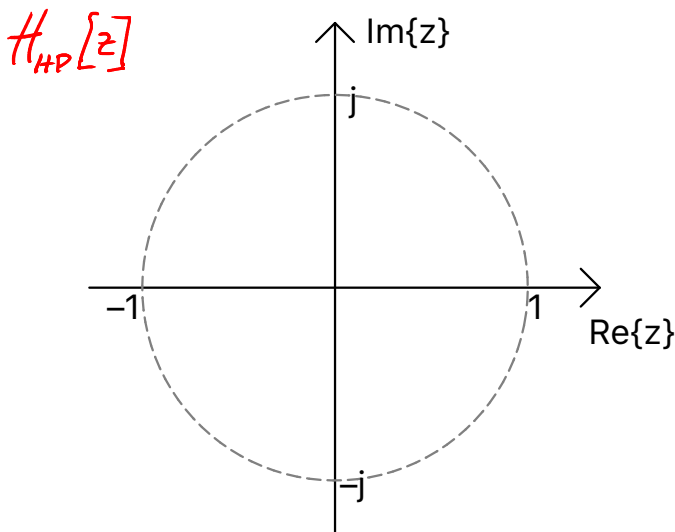


Poler & nollställen hos $H[z]$:

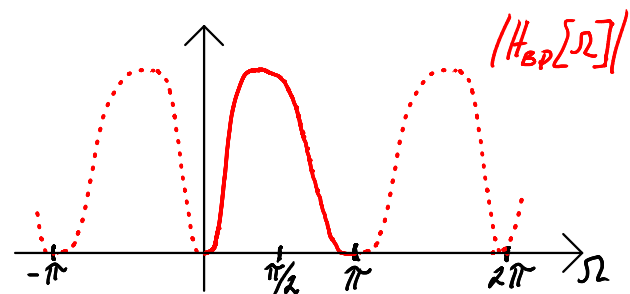
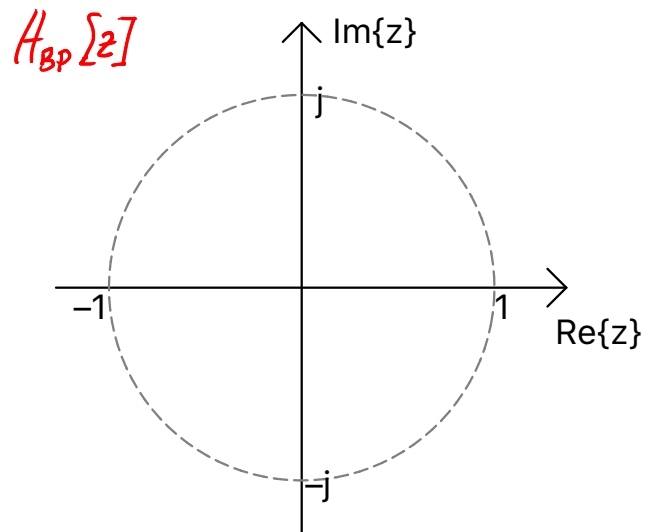


Ω_p : normerad 3 dB-gränsvinkelfrekvens

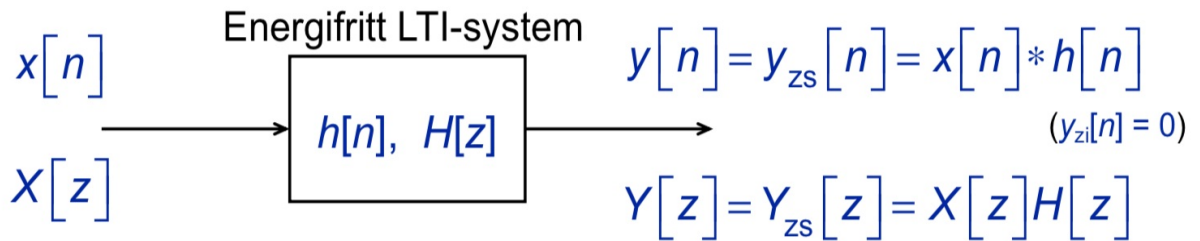
Exempel: Högpasfilter



Exempel: Bandpassfilter



Analys m.h.a. dubbelsidig z-transform



- Om $x[n]$ är **icke-kausal** ($x[n < 0] \neq 0$) och/eller systemet är **icke-kausalt** ($h[n < 0] \neq 0$) så används den **dubbelsidiga z-transformen**!
- Håll koll på konvergensområdet – använd korrekt transformpar!!
- Repetera – läs själv i **Kap. 5.9**!

Exempel (som jag antagligen inte hinner med på föreläsningen...):

$$x[n] = 0,9^n u[n] + 1,2^n u_0[-n]$$

Beräkna det energifria systemets utsignal $y[n]$!

