Fråga	$x(t) \Leftrightarrow C_n, D_n$			$x(t) \Leftrightarrow X(\omega)$			$x(t) \Leftrightarrow X(s)$			$x[n] \Leftrightarrow X[z]$			$x[n] \Leftrightarrow X[\Omega]$		
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Svar	**d**	**b**	**b**	**a**	**c**	**d**	**a**	**b**	**a**	**c**	**b**	**d**	**c**	**d**	**b**

1 d) $C_n = 2|D_n|$

2 b) är korrekt påstående

$x(t)$ har cos/sin med vinkelfr. $\omega_a = 2$ rad/s resp. $\omega_b = 3$ rad/s

$\Rightarrow \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x(t)$ är T_0-periodisk, med $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, där

$\omega_0 = SGD(2,3) = 1$ rad/s $\Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$ sek

$\Rightarrow$ Alt. a) och d) är felaktiga. (Dvs. a) eller c) är korrekt)

I $z(t)$ har cos-termerna vinkelfr. $\omega_c = 2\pi$ rad/s och $\omega_d = 3\pi$ rad/s $\Rightarrow$

$\frac{\omega_c}{\omega_d} = \frac{2}{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow z(t)$ är periodisk $\Rightarrow$ Alt. c) är fel.

Koll av $y(t)$: Ingående vinkelfrekvenser är $\omega_e = \frac{2}{3}$ rad/s, $\omega_f = 3$ rad/s

$\Rightarrow \frac{\omega_e}{\omega_f} = \frac{2}{3\cdot 3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow y(t)$ är T_0-periodisk, med $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, där

$\omega_0 = SGD\left(\frac{2}{3}, 3\right) = SGD\left(\frac{1}{3}\cdot 2, \frac{1}{3}\cdot 3\cdot 3\right) = \frac{1}{3}$ rad/s $\Rightarrow$

$\omega_f = 3 = 9\cdot\omega_0 \Rightarrow$ Alt. b är korrekt

3 b) $D_n = \frac{e^2 - 1}{2(1 - jn\pi)}$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \Big/ T_0 = 5\text{ sek},\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{5}\text{ rad/s} \Big/ = \frac{1}{5}\int_0^5 e^{0,4t}e^{-jn\frac{2\pi}{5}t}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^5 e^{\frac{2}{5}(1-jn\pi)t}\,dt = \frac{1}{5}\left[\frac{e^{\frac{2}{5}(1-jn\pi)t}}{\frac{2}{5}(1-jn\pi)}\right]_0^5$$

$$= \frac{e^{\frac{2}{5}(1-jn\pi)5} - e^0}{2(1-jn\pi)} = \frac{e^2\cdot e^{-jn2\pi} - 1}{2(1-jn\pi)}$$

$$= \Big/ e^{-jn2\pi} = \left(e^{-j2\pi}\right)^n = 1^n = 1 \Big/ = \frac{e^2 - 1}{2(1-jn\pi)}$$

4) a) $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \, dt < \infty$

5) c) $\tilde{X}(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega t_0}$

Utgå från $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t-t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega(t-t_0)} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{X(\omega) e^{-j\omega t_0}} \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\tilde{X}(\omega)} e^{j\omega t} dt$$

Identifiera: $\tilde{X}(\omega) = X(\omega) e^{-j\omega t_0}$

6) d) $x(t) = -3e^{4t} u_0(-t)$

Det är mycket svårare att här inverstransformera $X(\omega)$ är att fouriertransformera något av de angivna $x(t)$-alternativen.
Vi har bara två principiella fall/signaltyper att transformera:
$e^{-4t}u(t)$ (a&c) och $e^{4t}u_0(-t)$ (b&d).
$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$ i alla fallen $\Rightarrow X(\omega) \exists$ (existerar) föralla alternativen

b) & d): $\mathcal{F}\{e^{4t}u_0(-t)\} = \int_{-\infty}^{0-} e^{4t} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{(4-j\omega)t}}{4-j\omega}\right]_{-\infty}^{0-}$

= / Redan nu ser vi att b eller d måste vara korrekt, eftersom nämnaren är $4-j\omega = -(j\omega-4)$.
Alt. a&c ger motsvarande nämnare $-4-j\omega = -(j\omega+4)$ vilket inte överensstämmer med givna $X(\omega)$! /

$$= \frac{e^0 - \lim_{t\to-\infty} e^{(4-j\omega)t}}{4-j\omega} = \Big/ \; e^{(4-j\omega)t} = e^{4t} \cdot e^{-j\omega t}, \text{ där } e^{4t} \to 0 \text{ då } t \to -\infty \; \Big/$$

$$= \frac{1-0}{4-j\omega} = \frac{-1}{j\omega - 4}$$

$\Rightarrow \mathcal{F}\{-3 \cdot e^{4t}u_0(-t)\} = \frac{3}{j\omega-4}$, dvs. d) är korrekt

⑦ a) $Re\{s\}<2$

$x(t) = -e^{2t}u_0(-t)$

$\Rightarrow$ en vänstersidig signal $\Rightarrow$ $X(s)$ har ett vänstersidigt konvergensområde (⇒ a) eller c) är korrekt)

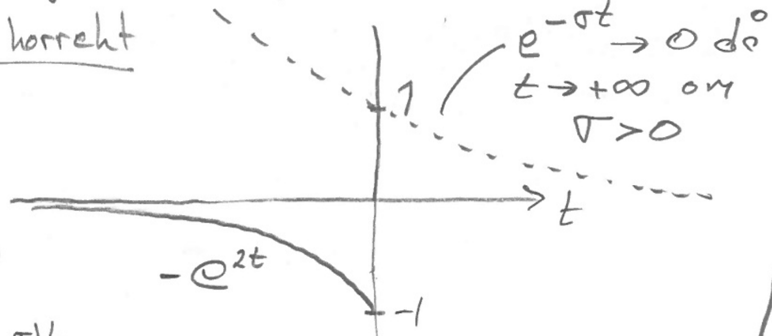
$x(t)$ är absolutintegrerbar $\left(\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt < \infty\right)$ $\Rightarrow$ $X(\omega)$ existerar

$\Rightarrow$ $X(\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$ $\Leftrightarrow$ $j\omega$-axeln ligger i konvergensområdet för $X(s)$ $\Rightarrow$ Alt. a är korrekt

Alternativt resonemang:

$\tilde{x}(t) = x(t)e^{-\sigma t}$

$= -e^{(2-\sigma)t}u_0(-t)$



$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{x}(t)|dt = \int_{-\infty}^{0-} e^{(2-\sigma)t}dt < \infty$ om $2-\sigma>0$,

dvs. om $Re\{s\} = \sigma < 2$ $\Rightarrow$ Alt. a) är korrekt

⑧ b) $\tilde{x}(t) = x(-t)$

Utgå från $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$

$\Rightarrow \tilde{X}(s) = X(-s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{st}dt = \Big/ e^{st} = e^{-s(-t)}$: låt $\tau = -t$ $\Rightarrow \frac{d\tau}{dt} = -1 \Rightarrow dt = -d\lambda \Big/$

$= -\int_{\infty}^{-\infty} x(-\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau)e^{-s\tau}d\tau$ ★

$\tilde{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ ⊙

Identifiera ★ & ⊙ $\Rightarrow$ $\tilde{x}(t) = x(-t)$

(Anm: Det spelar ingen roll om man har t eller τ som integrationsvariabel i ★ och ⊙)

9 a) $x(t) = e^{2t}u(t) + e^{3t}u(t)$

$X(s)$ är, enligt uppgift, en <u>enkelsidig</u> Laplacetransform $\Rightarrow$

<u>högersidigt</u> konvergensområde $\Rightarrow$ <u>högersidig $x(t)$</u>

$\Rightarrow$ Alt. c) och d) är felaktiga, de består av <u>vänsters</u>idiga termer.

$$X(s) = \frac{2s-1}{s^2-s-6}$$ $\Rightarrow$ $X(s)$ har poler (singulära punkter)

där $s^2-s-6=0$ (vilket enligt a) och d) är $s=-2$ och

$s=-3$ eller $s=+3$). Vi erhåller lätt $s^2-s-6=(s+2)(s-3)$,

Dvs. polerna är $s=-2$ och $s=+3$, vilket ger att <u>a) är korrekt</u>

<u>Koll:</u> $X(s) = \frac{2s-1}{(s+2)(s-3)} = \Big/ \begin{array}{c}\text{part. bråksuppdeln.} \\ \text{(handpåläggning)}\end{array} \Big/ = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-3}$

Högersidigt konv.omr. $\Rightarrow$ Till höger om de respektive polerna,

dvs. $Re\{s\} > -2$ resp. $Re\{s\} > 3$ $\Rightarrow$

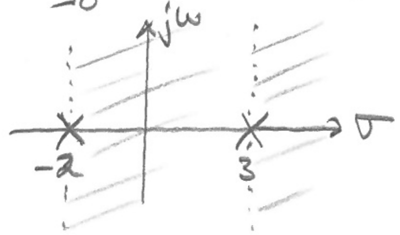
$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{3t}u(t)$, utgående från din beräkningserfarenhet

<u>Alt. koll:</u> Laplacetransformera $x(t)$ i uppg. a) $\Rightarrow$

$$\mathcal{L}_I\{e^{-2t}u(t) + e^{3t}u(t)\} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-2t}e^{-st}}_{e^{-(s+2)t}} dt + \int_0^\infty \underbrace{e^{3t}e^{-st}}_{=e^{-(s-3)}} dt$$

$$= \left[\frac{e^{-(s+2)t}}{-(s+2)}\right]_0^\infty + \left[\frac{e^{-(s-3)t}}{-(s-3)}\right]_0^\infty = \ldots = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s-3}$$

$$= \frac{2s-1}{s^2-s-6}$$



10 Samband c) är korrekt

Dubbelsidig signal (ändlig utbredning i tidsdomänen)

ger dubbelsidigt konvergensområde för dess z-transform

<u>Kommentar:</u> a) För antikausal signal är motsv. konv.omr. för $X[z]$ av typen $|z| < R_1$.

b) För kausal signal är motsv. konv.omr. för $X[z]$ av typen $|z| > R_0$

d) Orimligt angivet konvergensområde!

(11) Påstående b) är korrekt

Anm: Påstående c) och d) faller bort direkt, p.g.a. orimlighet

Avbildningstest: $s_0 = -1$ (en punkt i vänstra halvplanet) avbildas på $z_0 = e^{s_0 T} = e^{-T_0} < 1$, dvs. en punkt innanför enhetscirkeln.

(12) d) $x[n] = 3^n u[-n-1] + (-2)^n u[n]$

(Anm: Detta transformexempel visades på föreläsning 4)

$$X[z] = \frac{-5z}{z^2 - z - 6} = \Big/ \text{Faktorisera } z^2 - z - 6 = (z+2)(z-3) \text{ dvs. samma faktorisering som i uppg. 9} \Big/$$

$$= \frac{-5z}{(z+2)(z-3)}, \quad \text{Konv. omr. } 2 < |z| < 3 \text{ dvs } \begin{cases} |z| > 2 \\ |z| < 3 \end{cases}$$

Pol i $z = -2$ & $|z| > 2$ ger en högersidig signalterm $(-2)^n$

Pol i $z = +3$ & $|z| < 3$ ger en vänstersidig signalterm 3^n $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Alternativ d!

Koll: $$\mathcal{Z}\{3^n u[-n-1] + (-2)^n u[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \underbrace{3^n z^{-n}}_{\left(\frac{z}{3}\right)^{-n}} + \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^{-n}$$

$$= \Big/ \text{Låt } k = -n \text{ i den första } \Sigma \Big/$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{z}\right)^n = \Big/ \left|\frac{z}{3}\right| < 1 \Rightarrow |z| < 3, \quad \left|\frac{-2}{z}\right| < 1 \Rightarrow |z| > 2 \Big/$$

$$= \left(\frac{z}{3}\right)^1 \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} + \frac{1}{1 - \frac{-2}{z}} = \frac{-z}{z-3} + \frac{z}{z+2}$$

$$= \frac{-5z}{(z-3)(z+2)} = \frac{-5z}{z^2 - z - 6}, \quad 2 < |z| < 3$$

(13) Påstående c) är korrekt

Anm: a) relateras mer med sambandet mellan $X(\omega)$ och $X(s)$

b) gäller bara om $X[z]$ är enkelsidig

d) Man kan inte integrera en tidsdiskret signal...

(14) d) $X[\Omega] = \dfrac{e^{j2\Omega}}{0{,}6(e^{j\Omega}-0{,}6)}$

Beräkna fouriertransformen direkt:

$$\underline{X[\Omega]} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-1}^{\infty} \underbrace{0{,}6^{n} \cdot e^{-j\Omega n}}_{=(0{,}6\cdot e^{-j\Omega})^{n}}$$

$$= \Big/ \begin{array}{l} |0{,}6e^{-j\Omega}| < 1 \\ \Rightarrow \sum \text{ konvergerar} \end{array} \Big/ = (0{,}6e^{-j\Omega})^{-1} \cdot \frac{1}{1-0{,}6e^{-j\Omega n}}$$

$$= \frac{e^{j2\Omega}}{0{,}6\,(e^{j\Omega}-0{,}6)}$$

(15) b) $x[n] = \sin(\Omega_0 n)$

Inverstransformera direkt:

$$\underline{x[n]} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X[\Omega]\, e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big(j\pi(\delta(\Omega+\Omega_0) - \delta(\Omega-\Omega_0))\big) e^{j\Omega n}\, d\Omega$$

$$= \frac{j}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega+\Omega_0)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega - \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\Omega-\Omega_0)\, e^{j\Omega n}\, d\Omega\right)$$

$$= \frac{j}{2}\left(e^{j\Omega n}\Big|_{\Omega=-\Omega_0} - e^{j\Omega n}\Big|_{\Omega=\Omega_0}\right)$$

$$= \frac{j}{2}\left(e^{-j\Omega_0 n} - e^{j\Omega_0 n}\right) = \frac{e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n}}{2j} = \underline{\sin(\Omega_0 n)}$$